БИБЛИОТЕКА ШКОЛЬНИКА

А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ



1998

УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721
А46

Условные обозначения

△ — начало решения задачи.

▲ — конец решения задачи.

□ — начало доказательства.

■ — конец доказательства.

∩ — пересечение.

∈ — является элементом, принадлежит.

⊂ — является подмножеством, содержится в...

Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.
А46 Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов.— Висагинас, Alfa, 1998.— 576 с. (Библиотека школьника).
ISBN 9986-582-53-9.

В учебном пособии содержится теоретический и практический материал по стереометрии за курс средней школы. В книге имеется около 100 задач с решениями и более 800 задач для самостоятельного решения. Приведены также задачи, которые использовались на вступительных экзаменах в различных вузах. Пособие рассчитано на учащихся школ, абитуриентов, преподавателей.

А 5140000000 ББК 22.151я721

ISBN 9986-582-53-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Г л а в а 4. **Объемы тел и площади их поверхностей**

Г л а в а 5. **Координаты и векторы**

Г л а в а 6. **Преобразования**

ПРЕДИСЛОВИЕ

К ЧИТАТЕЛЮ

Это учебное пособие отличается от других учебников геометрии, написанных тем же авторским коллективом, тем, что оно предназначено прежде всего для самостоятельной работы с ним старшеклассников, собирающихся стать студентами. Навыки самостоятельной работы с литературой значительно важнее для студентов, чем для школьников. Их отсутствие сильно затрудняет учебу первокурсников, и мы надеемся, что работа с этой книгой поможет выпускникам школ стать студентами и успешно начать учебу в вузе.

Настоящее пособие содержит материал двух уровней сложности. На первом уровне излагается обязательный материал курса стереометрии общеобразовательной средней школы. Этот материал составляет большую часть первых четырех глав пособия. В первых трех из них, занимающих почти половину книги, идет знакомство с важнейшими пространственными фигурами. Об этом говорят названия параграфов: "Сфера и шар", "Цилиндр", "Призма" и т.д. В этих главах происходит как бы построение этих фигур, и потому мы назвали ее "строительной геометрией".

А в четвертой главе речь пойдет уже об измерении, во-первых, объемов построенных фигур и, во-вторых, площадей их поверхностей. Так что эту главу можно было бы назвать "измерительной геометрией".

Содержание этих глав соответствует классической, известной еще в Древней Греции, элементарной стереометрии. Изучив эти главы, те учащиеся, которые в дальнейшем собираются продолжать учебу в техническом вузе, могут быть спокойны: их знаний по стереометрии достаточно для экзамена по математике в таком вузе.

Второй уровень предполагает углубленное изучение стереометрии. Разделы пособия (главы, параграфы, пункты), соответствующие углубленному уровню, отмечены значком *.

Главы пособия разбиты на параграфы (у них единая нумерация), а параграфы — на пункты (у пунктов двой-

ная нумерация: например, п.2.7 — это седьмой пункт §2, а пункты 0.1, 0.2, и т.д. — это пункты введения).

Вводя новое понятие, мы выделяем его (или все его определение) полужирным шрифтом (например, **куб**). Формулировки аксиом, теорем и лемм набраны полужирным прямым шрифтом. Остальные же утверждения, на которые надо обратить особое внимание, выделены курсивом.

Если вы забыли какое-то определение, то найти его в пособии вам поможет предметный указатель в конце книги.

В этой книге собрано много задач, известных и не очень, даже новых, но главная их особенность в общей структуре, которую необходимо пояснить тому, кто будет работать с этой книгой. Прежде всего они разбиты на два раздела: "Задачи с решениями" и "Задачи для самостоятельного решения".

Задачи с решениями лучше всего внимательно (и не один раз!) прочитать, пытаясь затем ответить на все вопросы, поставленные в тексте (они отмечены специальным знаком (?)), а все опущенные в тексте выкладки проделать самостоятельно. Разбираясь с этими задачами, вы познакомитесь с разнообразными приемами решения геометрических задач, "тонкостями", возникающими в процессе решения оных, красивыми чисто геометрическими идеями.

Задачи для самостоятельного решения позволят вам проверить собственные силы. Умение решать геометрические задачи — интегральное, оно предполагает, что вы умеете делать (или понимаете, что надо делать) более "элементарные" операции (хотя сами по себе они могут быть достаточно длинными).

Вам надо научиться правильно (и красиво!) рисовать разные геометрические фигуры. В стереометрии это не всегда просто, но правильный рисунок часто помогает быстрее получить нужный результат. Поэтому в задачах есть раздел "Рисуем".

Ни одна серьезная геометрическая задача не может быть решена, если не поработало ваше пространственное мышление (раздел "Представляем"). Задачи этого раздела вы можете решать исключительно из наглядных соображений. Главное в них — "увидеть" верный ответ, позво-

ляя себе не обосновывать его длинными рассуждениями или нудными выкладками (но если угодно, то пожалуйста).

При решении достаточно трудоемкой задачи необходимо составить план решения (раздел "Планируем"). В задачах этого раздела вы можете себе позволить не доводить дело до ответа, если он обязательно получается после более или менее очевидных выкладок, последовательность которых предопределена вашим планом.

В задачах раздела "Исследуем" главной особенностью является то, что в них обязательно есть некая неопределенность. Вам, к примеру, предлагается что-то найти, но неизвестно возможно ли это в принципе. Или ситуация, данная в условии, неоднозначна, а тогда ответов может быть более одного.

В задачах из раздела "Дополняем теорию" содержатся теоретические сведения, которые не вошли в теорию, но на которые можно ссылаться, употребляя фразы типа "Известно, что ...".

В рубрике "Сделаем" приведены более трудные задачи на доказательство.

В рубрике "Оцениваем" собраны задачи, связанные с нахождением наибольших и наименьших значений. Не всегда они решаются с использованием аппарата алгебры и начал математического анализа, порой можно обойтись и "чистой" геометрией.

Рубрика "Поступаем в ВУЗ" говорит сама за себя. Здесь находятся задачи для поступающих в вузы. Как всем хорошо известно, они являются "вещью в себе". Все эти задачи реально предлагались в вузах, в первую очередь — в московских. Среди них есть очень трудные — не отчаивайтесь, если не решите. Ответы к этим задачам даются сразу после формулировки их условия.

И, наконец, в рубрике "Переключаемся" вы встретите задачи, которые, возможно, убедят вас в том, насколько неожиданна может быть геометрия.

Желаем удачи.

ВВЕДЕНИЕ

0.1. **О геометрии.** Своеобразие геометрии заключается в неразрывной связи живого воображения со строгой логикой. Можно сказать, что геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой. Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, определение, теорема или задача, непременно присутствуют эти два элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, строгая логика — привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины — "лед и пламень не столь различны меж собой". Геометрия соединяет в себе эти две противоположности. Так ее и надо изучать: соединяя наглядные картины со строгими формулировками и доказательствами.

Поэтому основное правило состоит в том, что, встречаясь с определением, теоремой или задачей, нужно прежде всего понять их содержание: представить наглядно, нарисовать или еще лучше, хотя и труднее, вообразить то, о чем идет речь.

Ничего не старайтесь изучить, не нарисовав, не вообразив того, о чем идет речь, не поняв, как это наглядное представление точно выражается в формулировке определения, теоремы или задачи.

Геометрия возникла из практических задач, ее предложения выражают реальные факты и находят многочисленные применения. В конечном счете, в основе всей техники так или иначе лежит геометрия, потому что она появляется везде, где нужна малейшая точность в определении формы и размеров. И технику, и инженеру, и рабочему, и архитектору необходимо геометрическое воображение.

Математика, геометрия в частности, представляет собой могущественный инструмент познания природы и создания техники.

Идеальные геометрические понятия возникают в результате отвлечения от всего внешнего и случайного относительно самих пространственных отношений и форм, как таковых, в их собственном виде. Это отвлечение за-

крепляется в выводах геометрии, которой нужна прочная логическая структура, как нужна прочная структура хорошей машине.

0.2. **О пространственных фигурах.** Раньше вы изучали, главным образом, геометрию на плоскости — планиметрию, а теперь будете заниматься геометрией в пространстве. Ее называют стереометрией (от греческих слов "стереос" — пространственный, "метрео" — измеряю). Обращаясь к геометрии в пространстве — стереометрии, — предполагаем, что геометрия на плоскости — планиметрия — вам, в основном, известна.

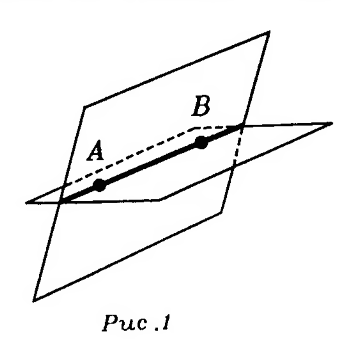


Рис.1

Каждый представляет, что такое **плоскость** или, по крайней мере, конечный кусок плоскости, как поверхность стола, доски и т. п. В планиметрии плоскость рассматривается сама по себе, независимо от окружающего пространства. В стереометрии же мы рассматриваем плоскости как такие фигуры в пространстве, на каждой из которых выполняется планиметрия.

Вместе с каждой плоскостью в пространстве есть содержащиеся в ней известные вам фигуры — **точки, отрезки, треугольники, окружности** и т.д. Основными свойствами этих фигур, теоремами о них, доказанными в планиметрии, мы будем пользоваться.

Через каждые две точки в пространстве проходит плоскость и даже не одна. На плоскости выполняется планиметрия, и, следовательно, на плоскости между любыми двумя точками есть определенное **расстояние** — длина соединяющего их отрезка. Хотя две точки принадлежат одновременно разным плоскостям, расстояние между ними на каждой их этих плоскостей будет одно и то же (рис.1).

Пользуясь понятием расстояния, можно определить равенство и подобие фигур в пространстве буквально так же, как это было сделано в планиметрии. Две фигуры F и F' называются **равными**, если можно так сопоставить

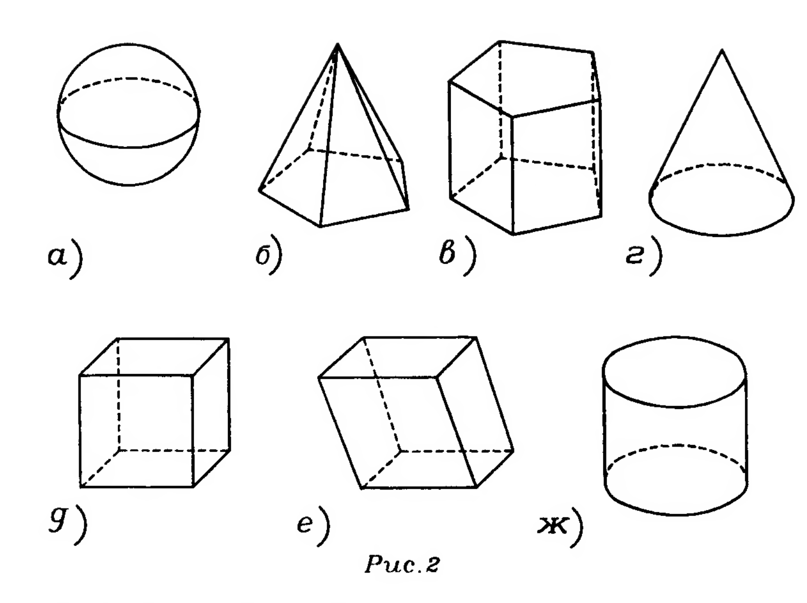


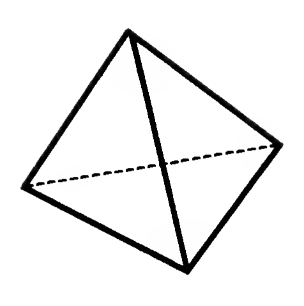
Рис.2

все их точки, что расстояние между соответствующими парами точек одно и то же.

Конечно, важнейшие в стереометрии — пространственные фигуры, не лежащие ни в какой плоскости. Простешие знакомые вам тела изображены на рисунке 2: а) шар; б) пирамида; в) призма; г) конус; д) куб; е) параллелепипед; ж) цилиндр.

Напомним, что **куб** — это многогранник, у которого шесть граней и все они квадраты. **Прямоугольный параллелепипед** — это многогранник, у которого шесть граней и все они прямоугольники. А вообще **параллелепипед** — это многогранник, у которого шесть граней и все они параллелограммы.

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — какой-либо многоугольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной. Первая грань называется **основанием пирамиды**, остальные же называются **боковыми гранями**; их общая вершина называется **вершиной пирамиды**. Стороны граней пирамиды называются ее **ребрами**, причем ребра, сходящиеся в вершине, называются **боковыми**.



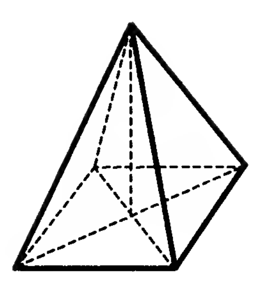




Рис. 3

Рис .4

Если основание пирамиды n-угольник, то она называется n-угольной. Простейшей среди всех пирамид (и даже среди всех многогранников) является треугольная пирамида, которую называют также **тетраэдром**, т.е. четырехгранником (рис.3). У тетраэдра четыре грани и все они треугольники.

Пирамида называется **правильной**, если ее основание — правильный многоугольник, а все боковые ребра равны (рис.4). Знаменитые египетские пирамиды — правильные четырехугольные.

Тетраэдр же называется **правильным**, если все его грани — правильные треугольники (т.е. все его ребра равны). Правильный тетраэдр — это частный случай правильной треугольной пирамиды.

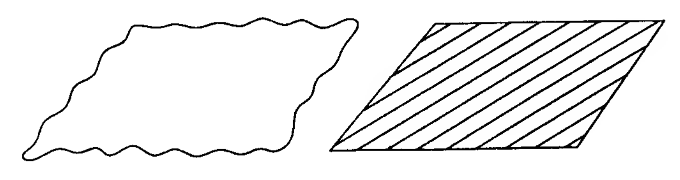


Рис. 5

n**-угольная призма** — это многогранник, две грани которого, называемые **основаниями**, — равные n-угольники, а остальные n граней — параллелограммы (рис.2*в*). Они называются **боковыми гранями призмы.** При этом любая боковая грань имеет с каждым из

оснований по общей стороне. Таким образом, параллелепипед — это призма, в основании которой — параллелограмм (рис.2*е*). Призма, у которой боковые грани прямоугольники, называется **прямой**. Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной**.

0.3. **О рисунках.** Отличие рисунков, используемых в стереометрии (например, рисунков 1—4), от тех, какими иллюстрируется курс планиметрии, состоит в том, что на плоскости рисунка (в книге, в тетради, на доске) изображены не только плоские, но и пространственные фигуры. Основные правила и приемы таких изображений известны из курсов рисования и черчения. Напомним самые простые из них.

1) Плоскость изображается в виде произвольной области, а иногда в виде параллелограмма (рис.5).

2) Параллельные отрезки (как и прямые) изображаются параллельными отрезками (как при изображении куба или параллелепипеда на рис.2).

3) Середина отрезка изображается как середина его изображения, которое тоже является отрезком.

4) Те линии, которые нам не видны, изображаются пунктиром.

Решая задачи, доказывая теоремы, вы будете много рисовать, строить плоские сечения различных многогранников. Такие сечения ограничены отрезками, по которым плоскость сечения пересекает грани многогран-

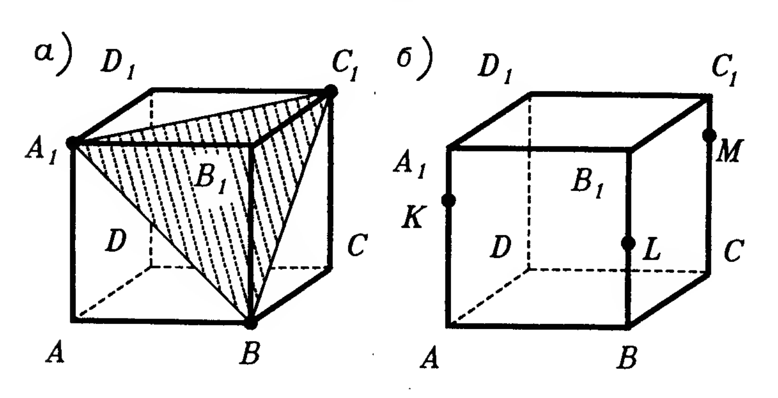


Рис. 6

ника. Например, если нужно изобразить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через его вершины A_1, B, C_1 (рис.6*а*), то ясно, что таким сечением будет треугольник A_1BC_1, ограниченный диагоналями трех граней куба (рис.6*б*). Для большей наглядности мы выделяем его штриховкой.

Пусть теперь нужно нарисовать сечение того же куба плоскостью, проходящей через три точки K, L, M, которые лежат на его ребрах AA_1, BB_1, CC_1 (рис.6*в*). Как вы будете действовать?

Подумайте также, какие многоугольники могут получиться в сечении куба плоскостью?

ГЛАВА 1

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

В основе "строительной геометрии" лежат теоремы о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве, об их параллельности и перпендикулярности. Этому и посвящена глава 1.

§1. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

1.1. **Плоскости в пространстве.** Начать "строительную геометрию" естественно с предложений о задании положения плоскости в пространстве. Здесь мы сформулируем три таких предложения.

Начнем с вопроса о том, сколько точек в плоскости надо задать, чтобы этими точками ее положение определилось бы однозначно. Ясно, что одной или двух точек для этого мало. Но уже заданием трех точек, не лежащих на одной прямой, положение плоскости определится однозначно (рис.1.1). Реальный пример: две петли и замок фиксируют положение двери, а две петли — нет. Итак, справедливо такое предложение:

Предложение 1. *Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.*

Плоскость, проходящую через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, называют "плоскость ABC" и пишут (ABC).

Кроме этого (основного) способа задания плоскости мы будем использовать и другие.

Предложение 2. *Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и притом только одна* (рис.1.2).

Реальный пример: приоткрыв обложку книги, вы фиксируете ее положение в пространстве.

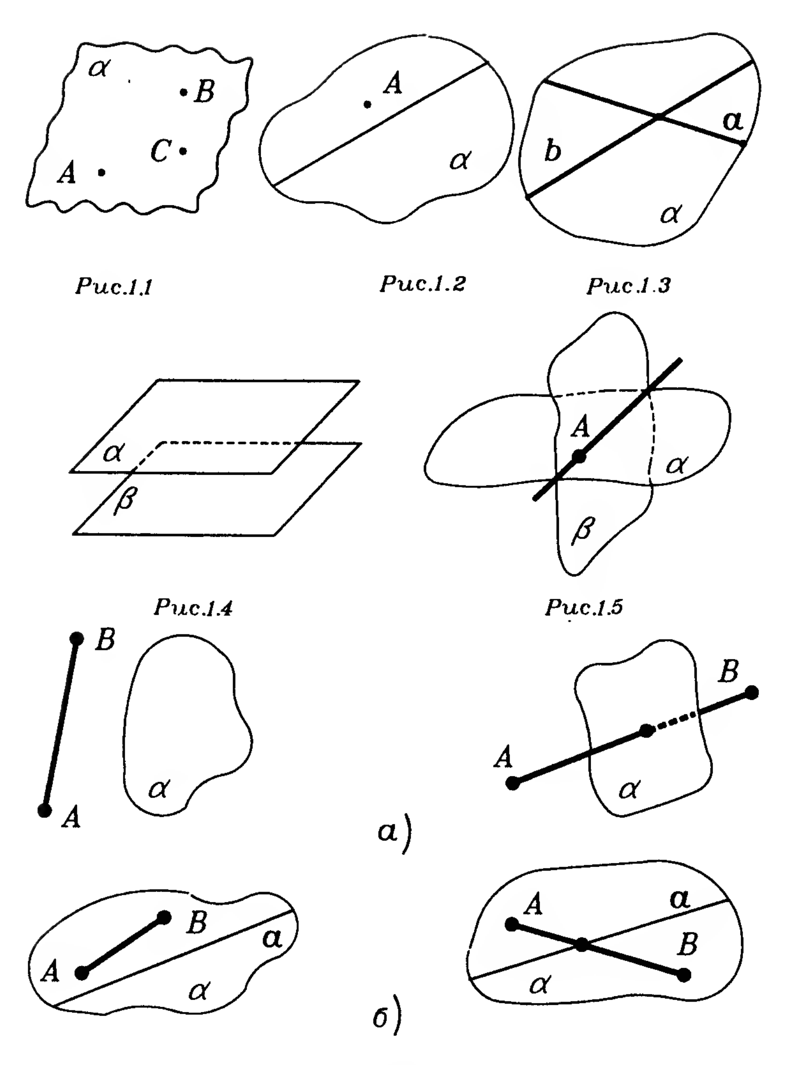


Рис.1.1 Рис.1.2 Рис.1.3

Рис.1.4 Рис.1.5

Рис.1.6

П р е д л о ж е н и е 3. *Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна* (рис.1.3).

Реальный пример: фанера, прибитая к пересекающимся рейкам.

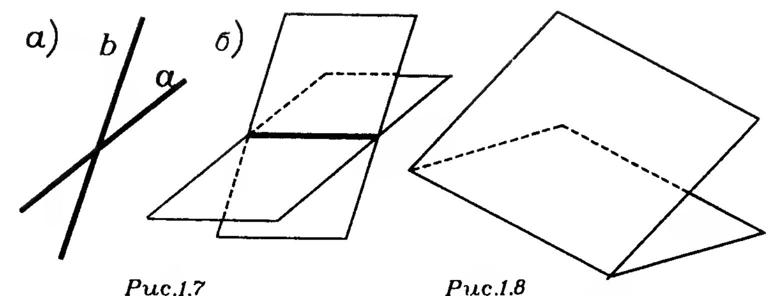


Рис.1.7 *Рис.1.8*

Для двух плоскостей в пространстве есть лишь две возможности их взаимного расположения.

1) Две плоскости не имеют общих точек (рис.1.4). Такие плоскости называются **параллельными.** Параллельные плоскости α и β обозначаются так: $\alpha \parallel \beta$.

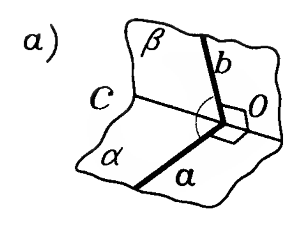
2) Две плоскости имеют общую точку. Тогда эти *плоскости пересекаются по прямой*, проходящей через эту точку (рис.1.5). Плоскости, имеющие общую точку (а, тем самым, и общую прямую) называются **пересекающимися.**

Попробуйте сами перечислить и нарисовать все случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве.

Отметим еще, что *каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства* (рис.1.6*а*), подобно тому, как в планиметрии каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости (рис.1.6*б*).

1.2. **Двугранный угол. Угол между плоскостями.** Подобно тому, как две пересекающиеся прямые на плоскости образуют пару вертикальных углов (рис.1.7*а*), так две пересекающиеся плоскости в пространстве образуют две пары вертикальных двугранных углов (рис.1.7*б*). А **двугранным углом** называют фигуру, которая состоит из двух полуплоскостей, имеющих общую граничную прямую и не лежащих в одной плоскости (рис.1.8). Сами полуплоскости называют **гранями двугранного угла,** а их общую граничную прямую — его **ребром.**

Измеряют двугранные углы следующим образом. Возьмем на ребре p двугранного угла с гранями α и β точку O. Проведем из точки O в его гранях лучи a и b, перпендикулярно ребру p: a в грани α и b в грани β



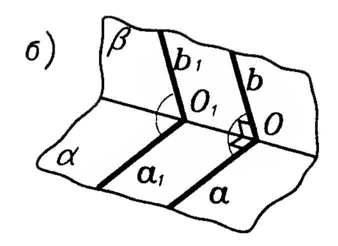


Рис.1.9

(рис.1.9*а*). Угол со сторонами a, b называется **линейным углом двугранного угла.** *Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.*

Действительно, возьмем другую точку $O_1 \in p$ и проведем в гранях α и β из точки O_1 лучи $a_1 \perp p$ и $b_1 \perp p$ (рис.1.9*б*). Если теперь произвести перенос (сдвиг) на вектор $\overrightarrow{OO_1}$, то в грани α луч a совместится с лучом a_1, а в грани β луч b совместится с лучом b_1. Поэтому угол ab совместится переносом с углом a_1b_1, т.е. эти углы равны, что и утверждалось. ■

Теперь можно дать такое определение: **величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.**

Углом между пересекающимися плоскостями называется величина меньшего из образованных ими двугранных углов. Если этот угол равен 90°, то плоскости называются взаимно **перпендикулярными.**

Угол между плоскостями α и β, как и величина двугранного угла с гранями α и β, обозначается так: $\angle\alpha\beta$.

Угол между гранями многогранника, имеющими общее ребро, — это величина соответствующего этим граням двугранного угла.

1.3. **Плоскость и прямая в пространстве.** Для плоскости и прямой в пространстве возможны три случая их взаимного расположения.

1) Прямая и плоскость не имеют общих точек (рис.1.10). О таких прямой и плоскости говорят, что они

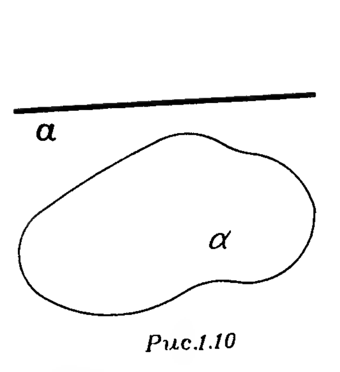
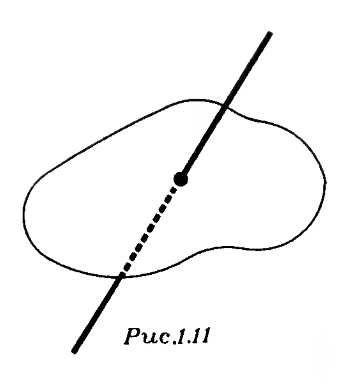


Рис.1.10


Рис.1.11

параллельны. Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \| \alpha$.

2) Прямая и плоскость имеют единственную общую точку (рис.1.11). В этом случае говорят, что **прямая и плоскость пересекаются** или, что **прямая пересекает плоскость.**

3) *Если же прямая и плоскость имеют две общие точки, то все точки этой прямой принадлежат данной плоскости* (рис.1.12). В этом случае говорят, что **прямая лежит в данной плоскости** (или, что прямая принадлежит данной плоскости, или, что плоскость проходит через прямую).

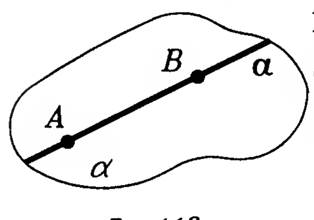


Рис.1.12

1.4. Аксиомы стереометрии. Как вы знаете еще из курса планиметрии, в геометрии только самые начальные сведения берутся из практики и наблюдения, они наглядны и очевидны. Исходя из них, дальнейшие выводы получают путем логических рассуждений. Приступая к изучению стереометрии, мы выбрали за исходное понятие понятие плоскости, теорию которой — планиметрию — вы уже изучили, она вам уже знакома. Мы определили плоскость как фигуру в пространстве, на которой выполняется планиметрия. Из наглядно очевидных утверждений о точках, прямых и плоскостях, сформулированных в п.п.1.1—1.3, можно выбрать как аксиомы несколько утверждений, опираясь на которые уже

можно построить всю стереометрию. Выбор этот можно сделать по-разному. Например так:

А к с и о м а 1 (аксиома плоскости). **В пространстве существуют плоскости. Через каждые три точки пространства проходит плоскость.**

А к с и о м а 2 (аксиома пересечения плоскостей). **Если две плоскости имеют общую точку, то их пересечение есть их общая прямая.**

А к с и о м а 3 (аксиома о прямой и плоскости). **Если прямая проходит через две точки плоскости, то она лежит в плоскости.**

А к с и о м а 4 (аксиома расстояния). **Расстояние между любыми двумя точками пространства одно и то же на всех плоскостях, содержащих эти точки.**

А все остальные утверждения стереометрии можно вывести из этих четырех аксиом. Недаром великий Ньютон говорил: "Геометрия за то и прославляется, что, заимствовав извне столь мало основных положений, она столь многого достигает".

Вывод из аксиом 1—4 остальных утверждений п.п.1.1 — 1.3 достаточно прост и мало интересен. Но как иллюстрацию строгого вывода докажем два из них.

Т е о р е м а 1. **Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит лишь одна плоскость.**

□ Пусть три точки A, B, C не лежат на одной прямой. По аксиоме 1 через эти три точки проходит плоскость α. Докажем, что она только одна. Допустим, что через точки A, B, C проходит еще одна плоскость β, отличная от α. Плоскости α и β имеют общие точки (например, точку A). По аксиоме 2 пересечением плоскостей α и β является их общая прямая. На этой прямой лежат все общие точки плоскостей α и β, а значит и точки A, B, C. Но это противоречит условию теоремы, так как согласно ему точки A, B, C не лежат на одной прямой. Итак, через точки A, B, C проходит лишь одна плоскость α. ■

Т е о р е м а 2. **Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и притом только одна.**

□ Пусть даны прямая a и не лежащая на ней точка A. Возьмем на прямой a две точки B и C (рис.1.13).

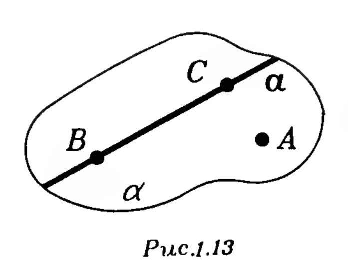
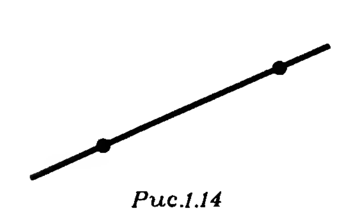


Рис.1.13

По аксиоме 1 через точки A, B, C проходит плоскость α. Прямая a имеет с плоскостью α две общие точки B и C и, значит, по аксиоме 3, лежит на ней. Таким образом, плоскость α и есть плоскость, проходящая через прямую a и точку A. Докажем ее единственность. Допустим, что есть еще одна плоскость β, содержащая точку A и прямую a. Тогда она содержит и точки B и C. По предыдущей теореме плоскости α и β совпадают. ■

В заключение этого пункта еще раз отметим, что из утверждений п.п. 1.1—1.3 в качестве аксиом можно было бы выбрать и другие утверждения. Например, заменить аксиому 1 на утверждение о том, что через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна. Так, например, сделано в учебнике геометрии А.В.Погорелова [4].


Рис.1.14

1.5. **Взаимное расположение двух прямых в пространстве.** Во-первых, отметим, что в пространстве, как и на плоскости, прямую можно задать парой ее точек (рис.1.14).

Действительно, пусть две точки A и B лежат на некоторой прямой a. Допустим, что кроме прямой a через точки A, B проходит еще прямая b (рис.1.15). Прямая a лежит в некоторой плоскости α. Прямая b имеет с этой плоскостью две общие точки A и B. По аксиоме 3 прямая, имеющая с плоскостью две общие точки, лежит в этой плоскости. Поэтому прямая b лежит в плоскости α. Но в плос-

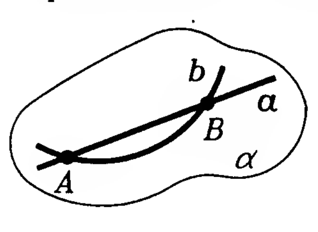


Рис.1.15

кости α выполняется планиметрия, и, следовательно, через точки A, B проходит только одна прямая. Значит, прямые a и b совпадают. ■

Итак, мы доказали, что *в пространстве через две точки проходит лишь одна прямая.*

З а м е ч а н и е. Предложение о том, что в пространстве через две точки проходит е д и н с т в е н н а я прямая, нуждалось в обосновании. Ведь не для любых фигур утверждение, верное в планиметрии, справедливо и в стереометрии. Так, например, на плоскости через две данные точки N и S проходит лишь одна окружность с диаметром NS, а в пространстве таких окружностей бесконечное множество (рис.1.16). Иллюстрацией могут служить все меридианы глобуса, проходящие через Северный полюс N и Южный полюс S. ■

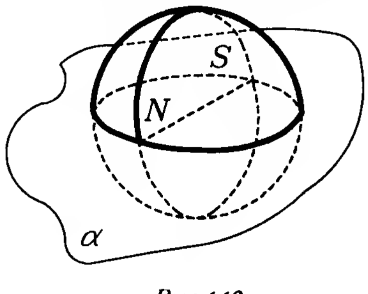
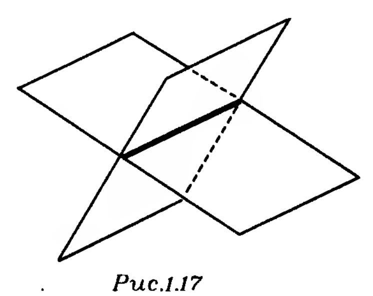


Рис.1.16

О прямой, проходящей через точки A, B, говорят "прямая AB" и пишут (AB).

Но кроме этого способа в пространстве есть и еще один способ задания прямой — пересечением двух проходящих через нее плоскостей (рис.1.17).


Рис.1.17

А теперь перечислим возможные случаи расположения двух прямых в пространстве. Первые два из них вам хорошо известны.

1) Две прямые лежат в одной плоскости и имеют единственную общую точку — **пересекающиеся прямые** (рис.1.18).

2) Две прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек — **параллельные прямые** (рис. 1.19).

3) Но в пространстве две прямые могут и не лежать в одной плоскости (рис.1.20). Такие прямые называются **скрещивающимися.**

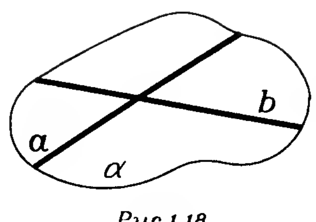


Рис.1.18

Ясно, что у скрещивающихся прямых нет общей точки, потому что тогда бы они лежали в одной плоскости (предложение 3 п.1.1). Поэтому о трех случаях возможного расположения двух прямых в пространстве можно сказать и так:

Если две прямые имеют общую точку, то это пересекающиеся прямые (они всегда лежат в одной плоскости). Если же две прямые не имеют общей точки, то они либо лежат в некоторой плоскости, и тогда это — параллельные прямые, либо они не лежат в одной плоскости, и тогда это — скрещивающиеся прямые.

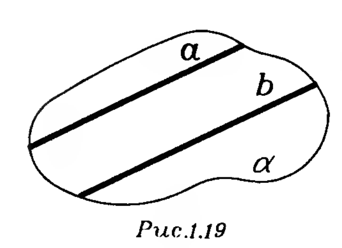


Рис.1.19

Заметим, что эти рассуждения дают нам еще один способ задания положения плоскости в пространстве: двумя параллельными прямыми, лежащими в этой плоскости (рис.1.19).

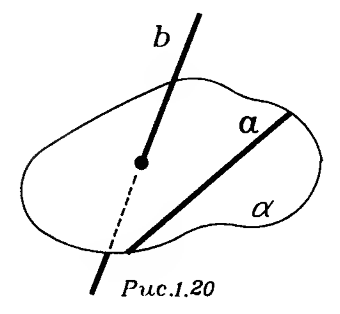


Рис.1.20

1.6. **Признаки скрещивающихся прямых.** Скрещивающиеся прямые легко распознать по таким признакам.

П р и з н а к 1. *Если на двух прямых найдутся четыре точки, не лежащие в одной плоскости, то эти прямые скрещиваются* (рис.1.21).

Действительно, если бы данные прямые пересекались бы или были бы параллельны, то они лежали бы в одной плоскости, а тогда и данные точки лежали бы в одной плоскости, что противоречит условию. ■

П р и з н а к 2. *Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает плоскость α в некоторой точ-*

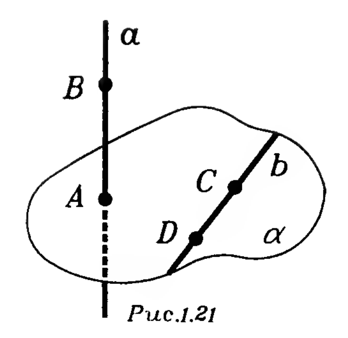


Рис.1.21

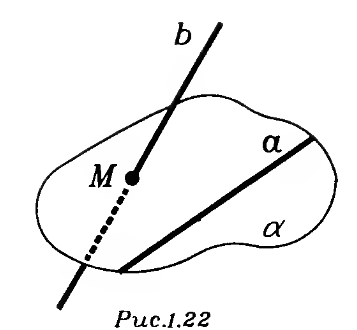


Рис.1.22

ке M, не лежащей на прямой a, то прямые a и b скрещиваются (рис.1.22).

Действительно, взяв любые две точки на прямой a и любые две точки на прямой b, мы приходим к признаку 1, т.е. a и b скрещиваются. ■

Реальные примеры скрещивающихся прямых дают транспортные развязки (рис.1.23).

Рис.1.23

В пространстве пар скрещивающихся прямых, в известном смысле, больше, чем пар параллельных или пересекающихся прямых. Это можно пояснить так.

Возьмем в пространстве некоторую точку A и некоторую прямую a, не проходящую через точку A. Чтобы провести через точку A прямую, параллельную прямой a, надо через точку A и прямую a провести плоскость α (предложение 2 п.1.1), а затем в плоскости α провести прямую b, параллельную прямой a (рис.1.24).

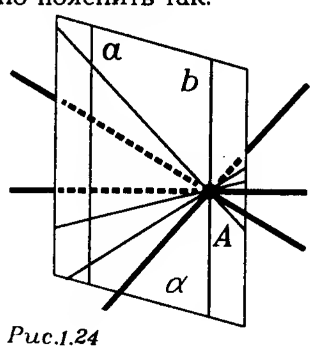


Рис.1.24

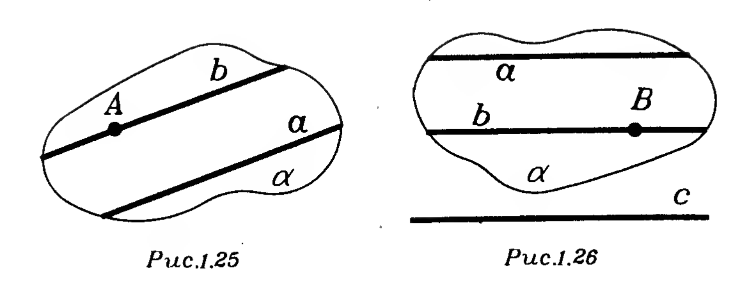


Рис.1.25 Рис.1.26

Такая прямая b лишь одна. Все прямые, проходящие через точку A и пересекающие прямую a, также лежат в плоскости α и заполняют ее всю за исключением прямой b. Все же остальные прямые, идущие через A и заполняющие все пространство кроме плоскости α, будут скрещиваться с прямой a. Можно сказать, что скрещивающиеся прямые в пространстве — это общий случай, а пересекающиеся и параллельные — это частные случаи. "Малые шевеления" скрещивающихся прямых оставляют их скрещивающимися. Но свойства быть параллельными или пересекающимися при "малых шевелениях" в пространстве не сохраняются.

1.7. **Параллельные прямые.** Как и на плоскости, для параллельных прямых в пространстве справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. *Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная ей, и притом только одна.*

Действительно, пусть точка A не лежит на прямой a (рис.1.25). В плоскости α, проходящей через точку A и прямую a, через точку A проходит единственная прямая b, параллельная прямой a. Те же прямые, которые проходят через A и пересекают плоскость α, скрещиваются с прямой a (по признаку 2 п.1.6). ■

Предложение 2. *Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.*

Действительно, пусть каждая из прямых a и b параллельна прямой c (рис.1.26). Докажем, что $a \| b$. При доказательстве будет использована следующая лемма.

Л е м м а. **Если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую из них.**

□ Пусть прямые p и q параллельны и плоскость α пересекает прямую p в точке P (рис.1.27). Проведем плоскость β через параллельные прямые p и q. Плоскости β и α имеют общую точку P, а потому пересекаются по прямой r, проходящей через точку P. Прямая q пересекает прямую r в некоторой точке Q. В этой точке прямая q и пересекает плоскость α. ■

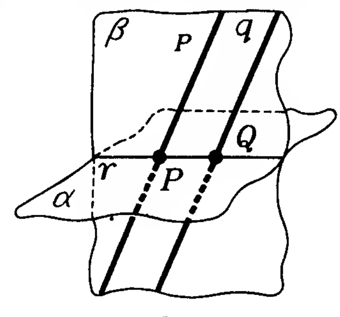


Рис.1.27

А теперь снова продолжим доказательство предложения 2. Возьмем на прямой b любую точку B и проведем плоскость α через эту точку и прямую a. Тогда прямая b также лежит в плоскости α. Если бы прямая b пересекала плоскость α, то по лемме, параллельная ей прямая c также пересекала бы плоскость α. А тогда, снова по лемме, прямая a, параллельная прямой c, пересекла бы плоскость α. А это противоречит тому, что a лежит в плоскости α. Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости α. Общей точки они не имеют, так как в этом случае мы получили бы противоречие с предложением 1. Следовательно, прямые a и b параллельны. Предложение 2 доказано. ■

Как вы видите, доказательство предложения 2 достаточно сложно. Простое его доказательство мы сможем получить в следующем параграфе, когда докажем ряд теорем о перпендикулярности прямой и плоскости.

1.8. **Параллельное проектирование.** Рисунки пространственных фигур, иллюстрирующие эту книгу, выполнены в параллельной проекции. Она определяется так.

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая a. Возьмем в пространстве произвольную точку X. В том случае, когда точка X не лежит на a, через X проводим прямую a', параллельную прямой a (рис.1.28).

Прямая a' пересекает плоскость α в некоторой точке X'. Эта точка называется **проекцией (на плоскость α) точки X при проектировании параллельно прямой a** или, короче, **параллельной проекцией точки X**. Если точка X лежит на прямой a, то ее параллельной проекцией X' называется точка, в которой a пересекает α. Заметим, что в случае, когда $X \in \alpha$, точка X' совпадает с точкой X.

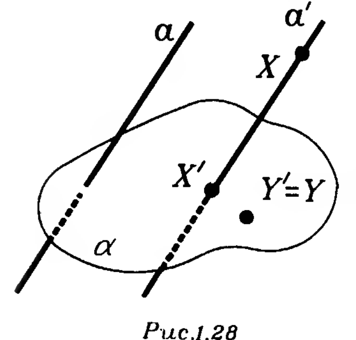


Рис.1.28

Таким образом, если заданы плоскость α и пересекающая ее прямая a, то каждой точке X пространства можно сопоставить единственную точку X' — параллельную проекцию точки X на плоскость α (при проектировании параллельно прямой a). Плоскость α называется **плоскостью проекций**. О прямой a говорят, что она задает **направление проектирования**, потому что при замене прямой a любой другой параллельной ей прямой результат проектирования не изменится (поскольку две прямые, параллельные третьей, параллельны). Все прямые, параллельные прямой a, задают одно и то же направление проектирования и называются вместе с прямой a **проектирующими прямыми**.

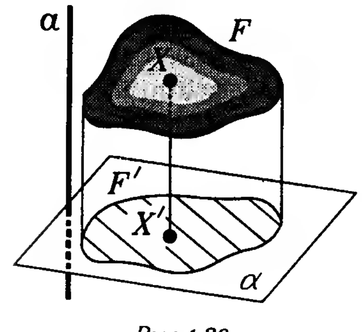


Рис.1.29

Проекцией фигуры F называется множество F' проекций всех ее точек. Отображение, сопоставляющее каждой точке X фигуры F ее параллельную проекцию $X' \in F'$, называется **параллельным проектированием** фигуры F (рис.1.29).

Параллельную проекцию реальной фигуры представляет, например, ее тень, падающая на плоскую поверхность при солнечном освещении, поскольку солнечные

лучи можно считать параллельными. Так что, глядя на свою тень на земле или на стене, вы видите свою параллельную проекцию.

Основные свойства параллельного проектирования выражает

Теорема (о параллельном проектировании). **При параллельном проектировании для прямых, не параллельных направлению проектирования, и для лежащих на них отрезков выполняются следующие свойства:**

1. Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка — отрезок.

2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

3. Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков. В частности, при параллельном проектировании середина отрезка проектируется в середину его проекции.

С доказательством этой теоремы можно ознакомиться в учебнике [3].

§2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

2.1. **Перпендикуляры и наклонные к плоскости.** Представление о прямых или, вернее, об отрезках, перпендикулярных плоскости, дают вертикально стоящие

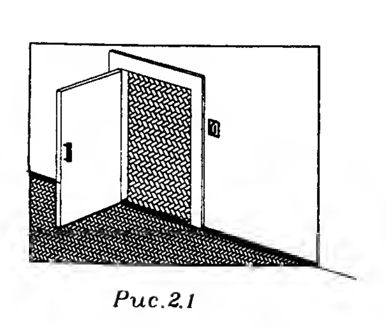


Рис.2.1

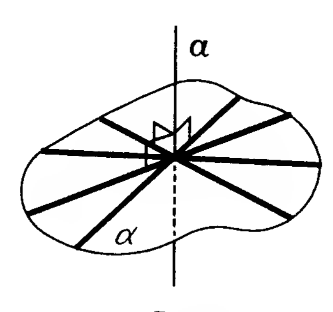


Рис.2.2

столбы и мачты (они перпендикулярны поверхности земли или палубе), натянутый шнур, на котором висит лампа (он перпендикулярен потолку). Нижний край двери перпендикулярен косяку при всех положениях двери (рис.2.1). Этим свойством и определяется перпендикулярность прямой и плоскости.

О п р е д е л е н и е. **Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна ко всякой прямой в этой плоскости, проходящей через точку пересечения** (рис.2.2).

Говорят также, что **плоскость перпендикулярна прямой** или, что они **взаимно перпендикулярны.** Для взаимно перпендикулярных прямой a и плоскости α применяются обозначения $a \perp \alpha$ или $\alpha \perp a$.

Отрезок или луч перпендикулярен плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости. Если отрезок перпендикулярен плоскости и его конец лежит в этой плоскости, то он называется **перпендикуляром к данной плоскости.** Отрезок же, имеющий с плоскостью одну общую точку — конец отрезка, но не перпендикулярный данной плоскости, называется **наклонной к плоскости.**

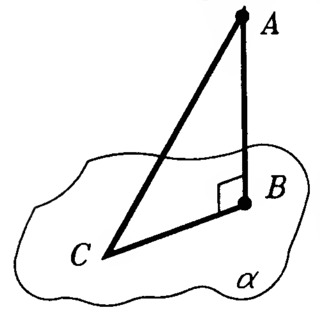


Рис.2.3

Пусть из одной точки A, не лежащей в плоскости α, проведены перпендикуляр AB и наклонная AC (рис.2.3). Отрезок BC называется **проекцией наклонной AC на плоскость α**, а точка B — **проекцией точки A на плоскость α**. Угол ACB называется **углом между прямой AC (или наклонной AC) и плоскостью α**. Угол же между перпендикуляром и плоскостью полагается равным 90°.

Перпендикуляр AB короче наклонной AC, т.е. $AB < AC$.

Действительно, в прямоугольном треугольнике ABC катет AB короче гипотенузы AC. Итак, перпендикуляр

короче наклонной, если они проведены из одной и той же точки к одной плоскости. ■

Это можно сказать и так: перпендикуляр AB из точки A на плоскость α — **кратчайший из отрезков**, соединяющих точку A с точками плоскости α. А основание перпендикуляра AB — точка B — является **ближайшей точкой** плоскости α к точке A.

Свойство перпендикуляра быть кратчайшим отрезком является **характерным свойством**. Это значит, что справедливо и обратное утверждение: *если AB — кратчайший отрезок, идущий из точки A до плоскости α, то AB — перпендикуляр к плоскости α.*

Докажем это методом "от противного". Допустим, что AB не перпендикуляр к плоскости α. Тогда через точку B в плоскости проходит прямая a, не перпендикулярная к AB (рис.2.4). Опустим из точки A перпендикуляр AM на прямую a. В прямоугольном треугольнике ABM катет AM меньше гипотенузы AB. Но тогда отрезок AB не будет кратчайшим из всех отрезков, идущих из точки A до плоскости α. Получили противоречие. Следовательно, $AB \perp \alpha$. ■

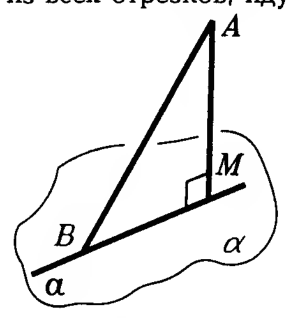


Рис.2.4

Установленное характерное свойство подсказывает, как через точку A, не лежащую в плоскости α, провести прямую, перпендикулярную к α: надо взять в плоскости α точку B, ближайшую к точке A, и провести прямую AB. Она и будет перпендикулярна к плоскости α.

Перпендикуляр AB, опущенный из точки A на плоскость α, единственный. Действительно, допустив, что существует еще один перпендикуляр AD, мы получим треугольник ABD, в котором два прямых угла, что невозможно. ■

Методом "от противного" можно доказать и единственность прямой, проходящей через данную точку A и перпендикулярной данной плоскости α. Допустим, что через точку A проходят две прямые b и c, перпендику-

лярные плоскости α (рис.2.5). Проведем через прямые b и c плоскость β. Она пересечет плоскость α по некоторой прямой a. В плоскости β обе прямые b и c будут перпендикулярны прямой a, что, как известно из планиметрии, невозможно. Поэтому *прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная данной плоскости, — единственная.* ■

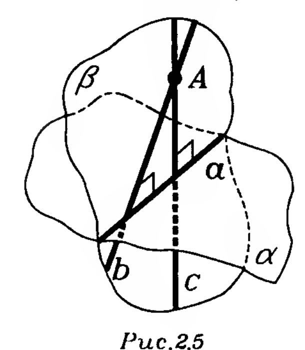


Рис.2.5

Длиной перпендикуляра, опущенного из самой высокой точки предмета на его основание, измеряют высоту предмета. Так, **высотой пирамиды** называется длина перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также сам перпендикуляр (рис.2.6).

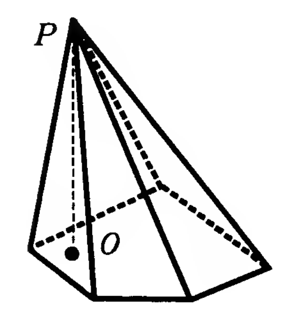


Рис.2.6

Из минимального свойства перпендикуляра к плоскости вытекает и минимальное свойство угла между наклонной и ее проекцией, т.е. **угла между наклонной и плоскостью**. Оно состоит в следующем.

Пусть AC — наклонная к плоскости α из точки A, а BC — проекция этой наклонной на плоскость α и $\varphi_0 = \angle ACB$. Проведем в плоскости α через точку C любую прямую d и обозначим через φ нетупой угол между AC и d (рис.2.7). Тогда

$$\varphi_0 < \varphi .$$

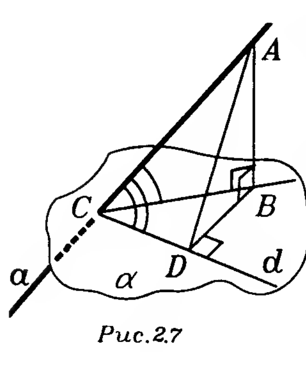


Рис.2.7

Действительно, если $\varphi = 90^\circ$, то это очевидно, поскольку угол ACB — острый. Поэтому пола-

гаем, что $\varphi < 90^\circ$. Опустим из точки A перпендикуляр AD на прямую d и рассмотрим прямоугольные треугольники ACB и ACD. Так как $AB < AD$, то

$$sin\varphi_0 = \frac{AB}{AC} < \frac{AD}{AC} = sin\varphi .$$

Поскольку углы φ_0 и φ — острые, то из неравенства $sin\varphi_0 < sin\varphi$ следует, что $\varphi_0 < \varphi$. ■

2.2. **О значении перпендикуляра**. Конечно, перпендикуляр к плоскости важен уже тем, что он является кратчайшим среди всех отрезков, идущих от данной точки до точек плоскости. Но не только этим минимальным свойством.

Важнейшее свойство перпендикуляра состоит в том, что плоскость расположена симметрично относительно него. Что это значит? Все лучи, лежащие в данной плоскости, образуют с перпендикуляром к плоскости равные углы — прямые углы (рис.2.2). Для наклонной же это не так. Лучи, проведенные из точки C в плоскости α, образуют с наклонной AC различные углы (рис.2.8). *Угол между наклонной AC и плоскостью α будет наименьшим (минимальным) из этих углов.* Это утверждение мы доказали в предыдущем пункте.

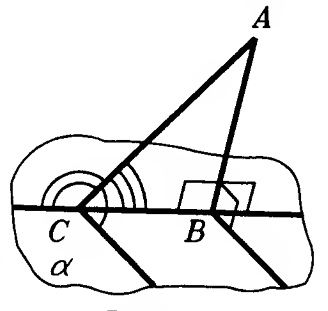
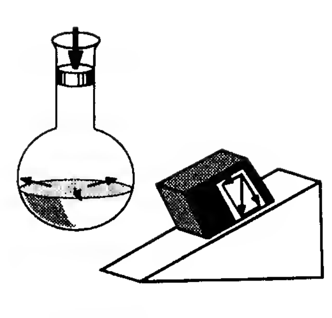


Рис.2.8

При вращении вокруг перпендикуляра плоскость совмещается сама с собой: колесо должно быть насажено на ось так, чтобы его плоскость была перпендикулярна оси. Прямоугольник со стороной, перпендикулярной плоскости, можно вращать вокруг этой стороны, а другая сторона будет скользить по плоскости. Это хорошо видно на правильно навешенной двери. Если же ее край не вертикален, то дверь не открывается свободно и задевает пол.

Приведем примеры из физики: давление жидкости или газа на стенку сосуда направлено по перпендикуляру



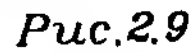


Рис.2.9

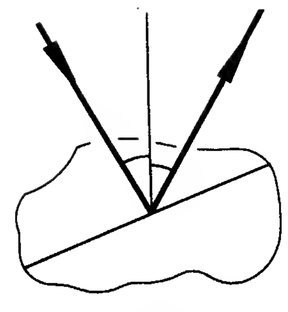


Рис.2.10

к стенке (закон Паскаля), так же как давление груза на опору направлено по перпендикуляру к ней (рис.2.9).

Перпендикуляр к поверхности фигурирует в законах отражения и преломления света. Так закон отражения гласит: "Луч падающий и луч отраженный расположены в одной плоскости с перпендикуляром к поверхности зеркала в точке падения и образует с ним равные углы". "Угол падения" и "угол отражения" — это углы между указанным перпендикуляром и лучами — падающим и отраженным (рис.2.10).

Можно сказать, что в быту мы окружены перпендикулярами: ножки стола перпендикулярны полу, край шкафа перпендикулярен стене и т.д.

Перпендикулярность играет главную роль в строительстве: междуэтажные перекрытия укладываются перпендикулярно столбам каркаса здания. Параллельность прямых и плоскостей связана с наличием у них общих перпендикуляров. Вообще, перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей — это существенный элемент в строительстве, так что учение о перпендикулярах и параллелях можно назвать основами "строительной геометрии".

2.3. **Теорема о трех перпендикулярах.** Вы уже давно знаете из планиметрии, что перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, является кратчайшим из всех отрезков, соединяющих данную точку с точками данной прямой. Теперь аналогичное свойство вы знаете и для перпендикуляра, опущенного на плоскость. Эти два экстре-

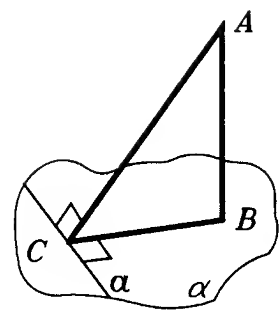


Рис.2.11

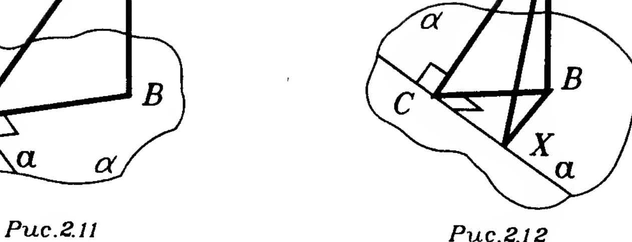


Рис.2.12

мальных свойства объединяет следующая важная теорема.

Т е о р е м а 1 (о трех перпендикулярах). **Наклонная к плоскости перпендикулярна к прямой, лежащей в этой плоскости, тогда и только тогда, когда проекция наклонной перпендикулярна этой прямой.**

□ Пусть даны наклонная AC к плоскости α, ее проекция BC и прямая a, лежащая в плоскости α и проходящая через точку C (рис.2.11).

В теореме два утверждения: 1) если $AC \perp a$, то $BC \perp a$; 2) обратно, если $BC \perp a$, то $AC \perp a$. Докажем их.

Возьмем переменную точку X прямой a (рис.2.12). Рассмотрим две функции: $f(X) = AX^2$ и $g(X) = BX^2$. Так как $AB \perp \alpha$, то треугольник ABX — прямоугольный. Поэтому $AX^2 = AB^2 + BX^2$. Значит функции $f(X)$ и $g(X)$ отличаются на постоянное слагаемое $h = AB^2$: $f(X) = g(X) + h$. Поэтому функции $f(X)$ и $g(X)$ свои наименьшие значения принимают одновременно — в одной и той же точке. Из этого и следуют оба утверждения теоремы.

1) Пусть $AC \perp a$. Тогда перпендикуляр AC к прямой a короче любой наклонной AX к этой прямой. Значит и отрезок BC короче любого отрезка BX, когда $X \neq C$. Поэтому $BC \perp a$. Первое утверждение теоремы доказано. Докажем второе.

2) Пусть $BC \perp a$. Тогда перпендикуляр BC к прямой a короче любой наклонной BX к этой прямой. Поэтому $AC < AX$, если $X \neq C$. Следовательно, $AC \perp a$. ■

В доказанной теореме рассматриваются три перпендикуляра: $AB \perp \alpha$, $AC \perp a$, $BC \perp a$. Отсюда и ее название — теорема о трех перпендикулярах. Согласно этой теореме, проекцию точки A на прямую a — точку C — можно получить и так: сначала спроектировать точку A на плоскость α в точку B, а затем спроектировать точку B на прямую a. В результате получим ту же самую точку C.

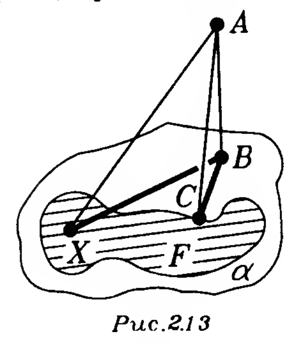


Рис.2.13

* З а м е ч а н и е. Можно получить интересное обобщение теоремы о трех перпендикулярах. Заменим в этой теореме прямую a на произвольную фигуру F в плоскости α (рис.2.13). Пусть X — переменная точка фигуры F. Из равенства $f(X) = g(X) + h$ делаем тот же вывод о наименьших расстояниях AX и BX: они становятся наименьшими одновременно. Получаем такое обобщение:

Т е о р е м а (о ближайшей точке). **Пусть фигура F лежит в плоскости α, A — иекоторая точка и B — ее проекция иа α. Точка фигуры F будет ближайшей к точке A тогда и только тогда, когда оиа является ближайшей к ее проекции B.**

Теорема о трех перпендикулярах оказалась, как мы видим, только частным случаем теоремы о ближайшей точке, относящейся к любой плоской фигуре. При этом доказательство ее ничуть не сложнее. Это примечательно! Один из моментов в развитии математики состоит в том, что результаты, которые прежде относились к более специальным фигурам, уравнениям, функциям или иным объектам математики, обобщаются позже на гораздо более общие объекты. Теорема о трех перпендикулярах восходит к древним грекам (но доказывали они ее по-другому), а теорема о ближайшей точке принадлежит геометрии XX века.

2.4. **Признак перпендикулярности прямой и плоскости.** Ясно, что нельзя проверить перпендикулярность прямой и плоскости, пользуясь непосредственно опреде-

лением этого понятия: ведь в нем речь идет о перпендикулярности бесконечного множества пар прямых. Но, оказывается, что для этого достаточно установить перпендикулярность лишь двух пар прямых. Об этом и говорится в следующей теореме.

Т е о р е м а 2. **Прямая, перпендикулярная двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, перпендикулярна этой плоскости.**



Рис.2.14

П о я с н е н и е: Вот пример: раскройте книгу и поставьте ее на стол (рис.2.14). Корешок книги перпендикулярен краям обложки, лежащим на столе, и, тем самым, самому столу. Еще пример. Устанавливая вертикально мачту, достаточно сделать так, чтобы она была перпендикулярна двум прямым, проведенным через ее основание на палубе или на земле. А это можно сделать, натянув из одной точки мачты две пары растяжек равной длины и закрепив их на одинаковых расстояниях от основания мачты на каждой из двух прямых (рис.2.15). Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости имеет в своей основе это реальное построение.

□ Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке O и перпендикулярна двум прямым b и c, проходящим в плоскости α через точку O. Нужно доказать, что прямая a перпендикулярна ко всякой прямой, проходящей через точку O в плоскости α. Возьмем любую такую прямую d, отличную от b и c (рис.2.16).

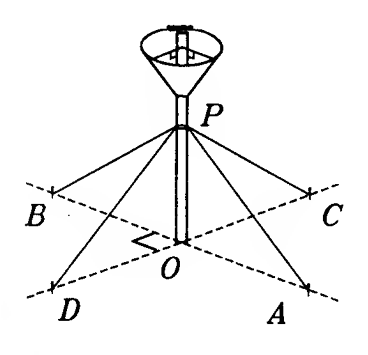


Рис.2.15

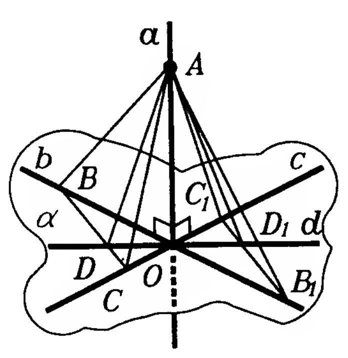


Рис.2.16

Выберем на прямых b и c по точке B и C так, чтобы отрезок BC пересекал прямую d в какой-то точке D. Возьмем точки $B_1 \in b$ и $C_1 \in c$ так, чтобы точка O была серединой отрезков BB_1 и CC_1, т.е. чтобы B_1 и C_1 были симметричны точкам B и C относительно точки O в плоскости α. Тогда отрезок B_1C_1, симметричный относительно O отрезку BC, пересечет прямую d в точке D_1, симметричной точке D относительно O (докажите!).

В силу симметричности точек B_1, C_1, D_1 точкам B, C, D имеем равенства

$$OD_1 = OD,\ B_1C_1 = BC,\ B_1D_1 = BD.$$

Возьмем теперь на прямой a любую точку $A \neq O$ и соединим ее отрезками AB, AC, AD, AB_1, AC_1 и AD_1 с точками B, C, D, B_1, C_1, D_1. Так как $a \perp b$ и $OB = OB_1$, то a является серединным перпендикуляром к отрезку BB_1. Поэтому $AB = AB_1$. Аналогично $AC = AC_1$. Так как, кроме того, $BC = B_1C_1$, то $\angle ABC = \angle AB_1C_1$, т.е. $\angle ABD = \angle AB_1D_1$. Кроме этих равных углов, в треугольниках ABD и AB_1D_1 имеем $AB = AB_1$ и $BD = B_1D_1$. Но тогда и $AD = AD_1$.

Следовательно, точка A равноудалена от концов отрезка DD_1. Так как точка O — середина отрезка DD_1, то прямая $a = (AO)$ является серединным перпендикуляром к отрезку DD_1 в плоскости ADD_1, т.е. $a \perp d$. Итак, $a \perp \alpha$. ■

2.5. **Построение плоскости, перпендикулярной данной прямой.** Признак перпендикулярности прямой и плоскости позволяет построить взаимно перпендикулярные прямую и плоскость, т.е. доказать существование таких прямых и плоскостей. Начнем с построения плоскости, перпендикулярной данной прямой и проходящей через данную точку. Решим две задачи на построение, соответствующие двум возможностям в расположении данной точки и данной прямой.

З а д а ч а 1. **Через данную точку A на данной прямой a провести плоскость, перпендикулярную этой прямой.**

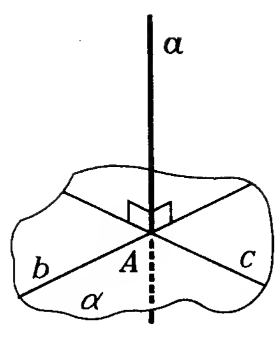


Рис.2.17

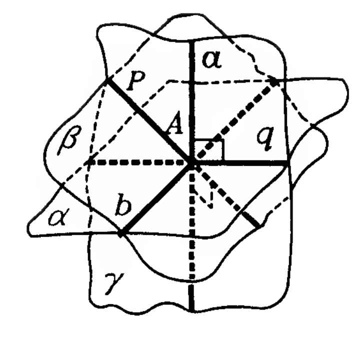


Рис.2.18

△ Проведем через прямую a любые две плоскости и в каждой их этих плоскостей через точку A проведем по прямой, перпендикулярной прямой a, обозначим их b и c (рис.2.17). Плоскость α, проходящая через прямые b и c, содержит точку A и перпендикулярна прямой a (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Поэтому плоскость α искомая. Задача решена.

Задача имеет лишь одно (т.е. единственное) решение. Действительно, допустим противное. Тогда, кроме плоскости α через точку A проходит еще какая-нибудь плоскость β, перпендикулярная прямой a (рис.2.18). Возьмем в плоскости β любую прямую p, проходящую через точку A и не лежащую в плоскости α. Проведем плоскость γ через пересекающиеся прямые a и p. Плоскость γ пересечет плоскость α по прямой q. Прямая q не совпадает с прямой p, так как q лежит в α, а p не лежит в α. Обе эти прямые лежат в плоскости γ, проходят через точку A и перпендикулярны прямой a ($p \perp a$, так как $p \in \beta$ и $a \perp \beta$; аналогично $q \perp a$, так как $q \in \alpha$ и $a \perp \alpha$). Но это противоречит известной теореме планиметрии, согласно которой в плоскости через каждую точку проходит лишь одна прямая, перпендикулярная данной прямой.

Итак, предположив, что через точку A проходят две плоскости, перпендикулярные прямой a, мы пришли к противоречию. Поэтому задача имеет единственное решение. ▲

З а д а ч а 2. **Через данную точку A, не лежащую на данной прямой a, провести плоскость, перпендикулярную этой прямой.**

△ Через точку A проводим прямую b, перпендикулярную прямой a. Пусть B — точка пересечения a и b. Через точку B проводим еще прямую c, перпендикулярную прямой a (рис.2.19). Плоскость, проходящая через обе проведенные прямые, будет перпендикулярна a по признаку перпендикулярности (теорема 2).

Как и в задаче 1, построенная плоскость единственная. Действительно, возьмем любую плоскость, проходящую через точку A перпендикулярно прямой a. Такая плоскость содержит прямую, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку A. Но такая прямая только одна. Это прямая b, которая проходит через точку B. Значит, плоскость, проходящая через A и перпендикулярная прямой a, должна содержать точку B, а через точку B проходит лишь одна плоскость, перпендикулярная прямой a (задача 1). ▲

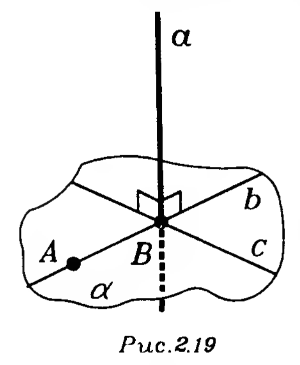


Рис.2.19

Итак, решив эти задачи на построение и доказав единственность их решений, мы доказали следующую важную теорему.

Т е о р е м а 3 (о плоскости, перпендикулярной прямой). **Через каждую точку проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна.**

С л е д с т в и е (о плоскости перпендикуляров). *Прямые, перпендикулярные данной прямой в данной ее точке, лежат в одной плоскости и покрывают ее.*

□ Пусть a — данная прямая и A — какая-либо ее точка. Через нее проходит плоскость $\alpha \perp a$. По определению перпендикулярности прямой и плоскости она по-

крыта прямыми, перпендикулярными прямой a в точке A, т.е. через каждую точку плоскости α в ней проходит прямая, перпендикулярная прямой a.

Допустим, что через точку A проходит прямая $b \perp a$, не лежащая в плоскости α. Проведем через нее и прямую a плоскость β. Плоскость β пересечет α по некоторой прямой c (рис.2.20). И так как $\alpha \perp a$, то $c \perp a$. Получается, что через точку A в плоскости β проходят две прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Это невозможно. Значит, прямых, перпендикулярных прямой a в точке A и не лежащих в плоскости α, нет. Все они лежат в этой плоскости. ■

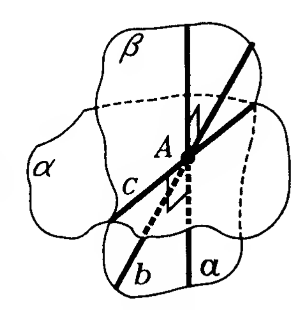


Рис.2.20

Пример к следствию теоремы 3 дают спицы в колесе, перпендикулярные его оси: при вращении они зачерчивают плоскость (точнее, круг), принимая все положения, перпендикулярные оси вращения.

Теоремы 2 и 3 помогают дать простое решение следующей задачи.

Задача 3. **Через точку данной плоскости провести прямую, перпендикулярную этой плоскости.**

△ Пусть даны плоскость α и точка A в плоскости α. Проведем в плоскости α через точку A какую-либо прямую a. Через точку A проведем плоскость β, перпендикулярную прямой a (задача 1). Плоскость β пересечет плоскость α по некоторой прямой b (рис.2.21). Проведем в плоскости β через точку A прямую c, перпендикулярную прямой b. Так как $c \perp b$ и $c \perp a$ (поскольку c лежит в плос-

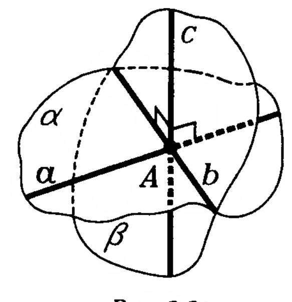


Рис.2.21

кости β и $\beta \perp a$), то по теореме 2 $c \perp \alpha$. Единственность ее решения установлена в п.2.1. ▲

З а м е ч а н и е. **О построениях в пространстве.** Напомним, что в главе 1 мы изучаем "строительную геометрию". А в этом пункте мы решили три задачи на построение в пространстве. Что же понимают в стереометрии под терминами "построить", "провести", "вписать" и т.п.? Сначала вспомним о построениях на плоскости. Указав, например, как строить окружность, описанную около треугольника, мы тем самым доказываем ее существование. Вообще, решая задачу на построение, мы доказываем теорему существования фигуры с заданными свойствами. Это решение сводится к составлению некоторого алгоритма построения искомой фигуры, т.е. к указанию последовательности выполнения простейших операций, приводящих к необходимому результату. Простейшие операции — это проведение отрезков, окружностей и нахождение точек их пересечения. Затем с помощью чертежных инструментов выполняется непосредственное построение фигуры на бумаге или на доске.

Итак, в планиметрии решение задачи на построение имеет как бы две стороны: теоретическую — алгоритм построения — и практическую — реализацию этого алгоритма, например, циркулем и линейкой.

У стереометрической задачи на построение остается лишь одна сторона — теоретическая, так как нет инструментов для построения в пространстве, аналогичных циркулю и линейке.

За основные построения в пространстве принимают те, которые обеспечиваются аксиомами и теоремами о существовании прямых и плоскостей. Это — проведение прямой через две точки, проведение плоскости (предложения п.1.1 и аксиома 1 п.1.4), а также построение прямой пересечения любых двух построенных плоскостей (аксиома 2 п.1.4). Кроме того, мы, естественно, будем считать, что можно выполнять планиметрические построения в уже построенных плоскостях.

Решить задачу на построение в пространстве — это значит указать последовательность основных построений, в результате которых получается нужная фигура. Обычно явно указываются не все основные построения, а делаются ссылки на уже решенные задачи на построение, т.е. на уже доказанные предложения и теоремы о возможности таких построений.

Кроме построений — теорем существования в стереометрии, возможны еще два вида задач, связанных с построениями.

Во-первых, задачи на рисунке или на чертеже. Таковы задачи на сечения многогранников или других тел. Мы не строим на самом деле само сечение, а только изображаем его на

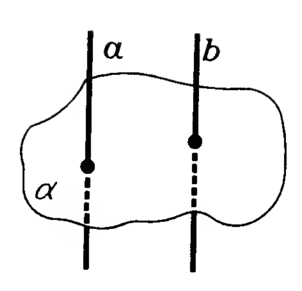




Рис.2.22

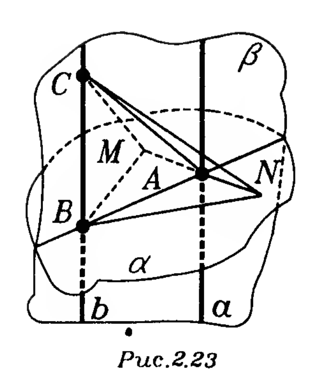


Рис.2.23

рисунке или чертеже, который у нас уже есть. Такие построения осуществляются как планиметрические с учетом аксиом и теорем стереометрии и правил изображений. Задачи такого типа постоянно решают в черчении и в конструкторской практике.

Во-вторых, задачи на построение на поверхностях тел. Задача: "Построить точки на поверхности куба, удаленные от данной его вершины на данное расстояние" — решается с помощью циркуля (как?). Задача: "Построить точки на поверхности шара, удаленные от данной точки на данное расстояние" — также решается с помощью циркуля (как?). Задачи такого типа решают не на уроках геометрии — их постоянно решает разметчик, разумеется, с точностью, которой позволяют добиться его инструменты. Но, решая такие задачи, он опирается на геометрию.

2.6. **Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости.** Наглядно ясно, что два перпендикуляра к одной плоскости параллельны, а плоскость, перпендикулярная к одной из параллельных прямых, перпендикулярна и к другой из них (рис.2.22).

Доказав одно из этих взаимно обратных утверждений, другое легко можно получить как следствие доказанного. Сначала мы докажем первое из них.

Т е о р е м а 4 (о параллельности перпендикуляров). **Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.**

□ Пусть две прямые a и b перпендикулярны плоскости α и пересекают ее соответственно в точках A и B (рис.2.23). Проведем через прямую a и точку B плос-

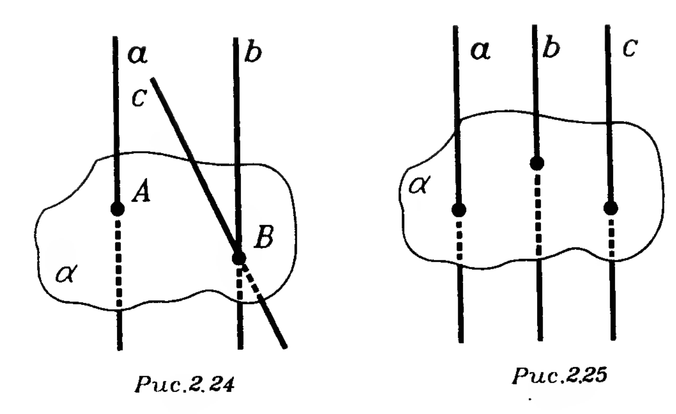


Рис.2.24

Рис.2.25

кость β и покажем, что прямая b также лежит в плоскости β.

В плоскости α возьмем отрезок MN, перпендикулярный отрезку AB и имеющий точку A своей серединой. Так как $AM = AN$ и $AB \perp MN$, то $BM = BN$.

Возьмем на прямой b любую точку $C \neq B$ и проведем отрезки CA, CM, CN. Поскольку $b \perp \alpha$ то треугольники CBM и CBN прямоугольные. Они равны, так как имеют общий катет CB и равные катеты BM и BN. Поэтому $CM = CN$, т.е. треугольник CMN равнобедренный. Его медиана CA является также его высотой, т.е. $CA \perp MN$.

Итак, три прямые, проходящие через точку A, — AC, AB и a — перпендикулярны прямой MN. По следствию о плоскости перпендикуляров (п.2.5) они лежат в одной плоскости — плоскости β. Следовательно, точка $C \in \beta$, т.е. прямая b лежит в плоскости β (как и прямая a). Но в этой плоскости a и b перпендикулярны одной и той же прямой AB (так как $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$ и прямая AB лежит в плоскости α). Поэтому $b \parallel a$. ■

Теперь уже просто доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 5. (о параллели к перпендикуляру). **Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.**

□ Пусть две прямые a и b параллельны и $a \perp \alpha$ (рис.2.24). Докажем, что $b \perp \alpha$. Прямая b пересекает плоскость α в некоторой точке B (по лемме п.1.8). Проведем через точку B прямую $c \perp \alpha$ (задача 3 п.2.5). По теореме 4 о параллельности перпендикуляров $c \parallel a$. Но через точку B проходит лишь одна прямая, параллельная прямой a, — это прямая b. Поэтому $c = b$. А так как $c \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$. ■

Теоремы 4 и 5 позволяют дать простое доказательство утверждению о том, что *две прямые, паралльные третьей прямой, параллельны* (см. п.1.8).

Действительно, пусть две прямые a и b параллельны прямой c. Докажем, что $a \parallel b$. Проведем плоскость α, перпендикулярную прямой c (рис.2.25). По теореме 5 о параллели к перпендикуляру $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$. А тогда по теореме 4 о параллельности перпендикуляров $a \parallel b$. ■

2.7. **Теорема о прямой, перпендикулярной плоскости.** Теорема 5 о параллели к перпендикуляру позволяет доказать следующую основную теорему о прямой, перпендикулярной плоскости.

Т е о р е м а 6. **Через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна.**

□ Пусть даны точка A и плоскость α (рис.2.26). Проведем через какую-либо точку этой плоскости перпендикулярную ей прямую a (задача 3 п.2.5). Если прямая a проходит через точку A, то она искомая прямая. Если это не так, то проведем через точку A прямую b, параллельную прямой a. По теореме 5 о параллели к перпендикуляру $b \perp \alpha$. Итак, мы построили прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную плоскости α. Единственность такой прямой установлена в п.2.1. ■

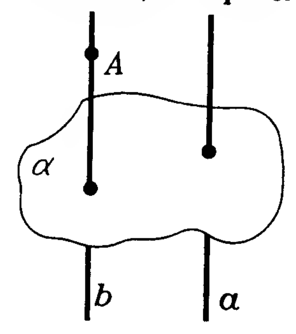


Рис.2.26

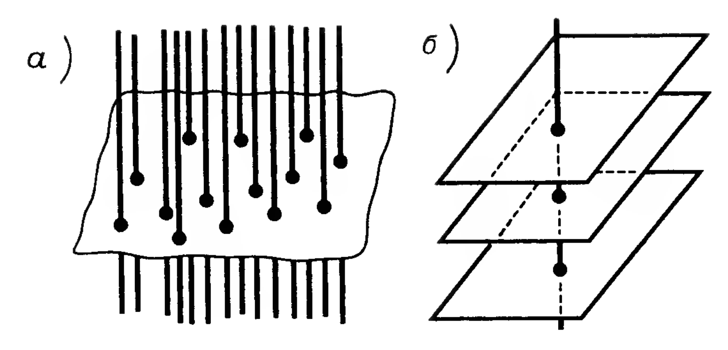


Рис.2.27

Согласно доказанной теореме 6 все пространство покрыто параллельными друг другу прямыми (рис.2.27*а*). Точно так же пространство (согласно теореме 3 п.2.5) заполняется плоскостями, перпендикулярными заданной прямой (рис.2.27*б*). Эти плоскости параллельны друг другу.

2.8. **Перпендикулярность плоскостей.** Напомним, что плоскости α и β называются перпендикулярными, если угол между ними прямой. А угол этот определяется так. Берут точку O на прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β, и проводят через нее в плоскостях α и β прямые $a \perp c$ и $b \perp c$ (рис.1.9*а*). Углом между a и b и измеряется угол между α и β. Когда этот угол прямой, то говорят, что плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пишут $\alpha \perp \beta$.

Вы, конечно, уже заметили, что когда $\alpha \perp \beta$, то из трех прямых a, b, c любые две взаимно перпендикулярны (рис.2.28). В частности, $a \perp b$ и $a \perp c$. Поэтому $a \perp \beta$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Аналогично, $b \perp \alpha$.

Итак, *каждая из двух взаимно перпендикулярных плоскостей содержит перпендикуляр к другой плоскости.* Более того, *эти перпендикуляры заполняют взаимно перпендикулярные плоскости.* (рис.2.29).

Докажем последнее утверждение. Действительно, если через любую точку плоскости α провести прямую

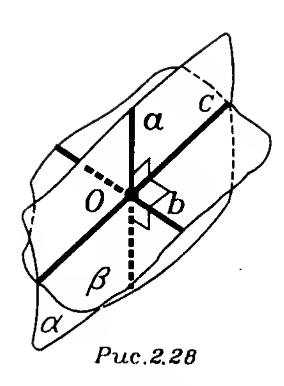
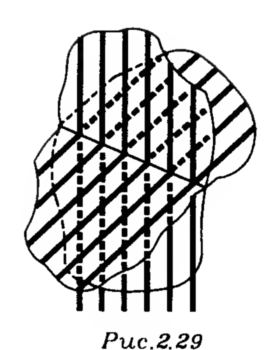


Рис.2.28


Рис.2.29

$l \parallel a$, то $l \perp \beta$ (по теореме 5 о параллельности перпендикуляров).

А для признака перпендикулярности плоскостей достаточно одного перпендикуляра к плоскости.

Т е о р е м а 7. (признак перпендикулярности плоскостей). **Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то эти плоскости взаимно перпендикулярны.**

□ Пусть плоскость α содержит прямую a, перпендикулярную плоскости β (рис.2.28). Тогда прямая a пересекает плоскость β в точке O. Точка O лежит на прямой c, по которой пересекаются α и β. Проведем в плоскости β через точку O прямую $b \perp c$. Так как $a \perp \beta$ и b лежит в плоскости β, то $a \perp b$. Следовательно, $\alpha \perp \beta$. ■

Данный признак имеет простой практический смысл: плоскость двери, навешенной на перпендикулярный полу косяк, перпендикулярна плоскости пола при любых положениях двери (рис.2.1). Другое практическое применение этого признака: когда требуется проверить, вертикально ли установлена плоская поверхность (стена, забор и т.п.), то это делают с помощью отвеса — веревки с грузом. Отвес всегда направлен вертикально, и стена стоит вертикально, если в любом ее месте отвес, располагаясь вдоль нее, не отклоняется.

При решении задач, в которых встречаются перпендикулярные плоскости, часто используются следующие три предложения.

П р е д л о ж е н и е 1. *Прямая, лежащая в одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная их общей прямой, перпендикулярна другой плоскости.*

□ Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c. Пусть, далее, прямая a лежит в плоскости α и $a \perp c$ (рис.2.28). Прямая a пересекает прямую c в некоторой точке O. Проведем через точку O в плоскости β прямую b, перпендикулярную прямой c. Так как $\alpha \perp \beta$, то $a \perp b$. Поскольку $a \perp b$ и $a \perp c$, то $a \perp \beta$ (по теореме 2). ■

Второе предложение обратно первому.

П р е д л о ж е н и е 2. *Прямая, имеющая общую точку с одной из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и перпендикулярная другой плоскости, лежит в первой из них.*

□ Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны, прямая $a \perp \beta$, а также прямая a имеет с плоскостью α общую точку A (рис.2.30). Через точку A в плоскости α проведем прямую l, перпендикулярную прямой c — линии пересечения плоскостей α и β. Согласно предложению 1 $l \perp \beta$. Поскольку в пространстве через каждую точку проходит лишь одна прямая, перпендикулярная данной плоскости, то прямые a и l совпадают. Так как l лежит в плоскости α, то и a лежит в плоскости α. ■

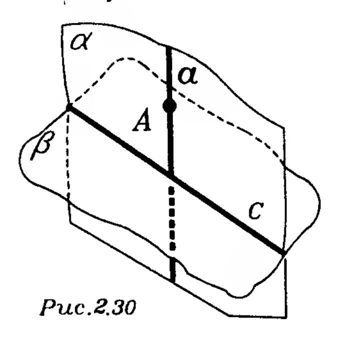


Рис.2.30

П р е д л о ж е н и е 3. *Если две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, пересекаются, то прямая их пересечения перпендикулярна третьей плоскости.*

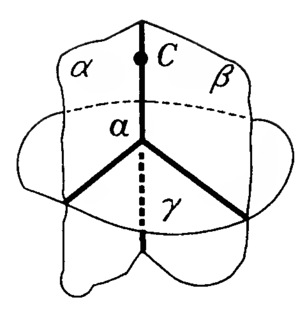


Рис.2.31

☐ Пусть две плоскости α и β, пересекающиеся по прямой a, перпендикулярны плоскости γ (рис.2.31). Тогда через любую точку прямой a проведем прямую, перпендикулярную плоскости γ. Согласно предложению 2, эта прямая лежит и в плоскости α, и в плоскости β, т.е. совпадает с прямой a. Итак, $a \perp \gamma$. ■

2.9. **Ортогональное проектирование.** Мы постоянно встречаемся с различными способами проектирования (или, как еще говорят, проецирования) как в математике, так и в быту: оно применяется при изображении пространственных фигур на плоскости, в частности, при фотографировании и в кино; тени от предметов являются их проекциями; на проектировании основано введение координат как на плоскости, так и в пространстве, изготовление чертежей, планов и т.д. Об одном из способов проектирования — параллельном проектировании — уже говорилось в п.1.9. Сейчас мы рассмотрим самый простой, но наиболее важный из способов проектирования в пространстве — ортогональное проектирование ("ортогональный" в переводе и значит — "прямоугольный"). В этом пункте мы будем говорить просто о проектировании, имея в виду ортогональное проектирование.

О проекции точки и проекции наклонной на плоскость уже говорилось в п.2.1. **Проекцией же фигуры F на плоскость** α называется фигура F', состоящая из проекций всех точек фигуры F на эту плоскость α (рис.2.32). Преобразование фигуры F, сопоставляющее каждой точке X фигуры F ее проекцию $X' \in \alpha$, называется **проектированием (или проецированием) фигуры F на**

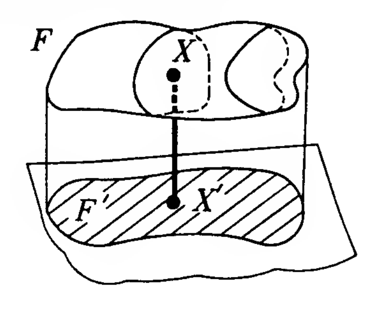


Рис.2.32

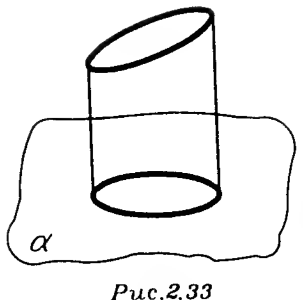


Рис.2.33

плоскость α.

Поскольку все прямые, перпендикулярные к одной плоскости, параллельны друг другу, то ортогональное проектирование на плоскость является частным случаем параллельного проектирования и обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

Кроме точек и отрезков, рисуя изображения сферы, цилиндра или конуса, мы будем встречаться с проекцией окружности на плоскость (когда плоскость окружности не перпендикулярна и не параллельна плоскости проекции). Кривая, которая является проекцией окружности в этом случае, называется **эллипсом** (рис.2.33). Эллипсом является и параллельная проекция окружности на плоскость (если направление проектирования не параллельно плоскости окружности). Окружность является частным случаем эллипса. Эллипсы обладают многими замечательными свойствами. Эллипс имеет центр симметрии и две взаимно перпендикулярные оси симметрии. По эллипсам (эллиптическим орбитам) двигаются планеты вокруг Солнца. Солнце, однако, находится не в центре эллипса — орбиты планеты, а в точке, называемой **фокусом эллипса.**

Ортогональное проектирование на одну, две и три плоскости широко используется в технике, в черчении. Изображение предмета в проекциях позволяет судить о его устройстве, без чего часто невозможно ни конструирование предмета, ни его изготовление.

В дальнейшем, говоря "проекция" или "проектирование", мы имеем в виду ортогональное проектирование и ортогональную проекцию, если нет специальных оговорок.

На ортогональном проектировании основан такой важный для инженеров раздел прикладной математики, как начертательная геометрия. Начертательная геометрия была создана знаменитым французским математиком Гаспаром Монжем (1746—1818). В ее основе лежит идея о том, что положение любой точки пространства

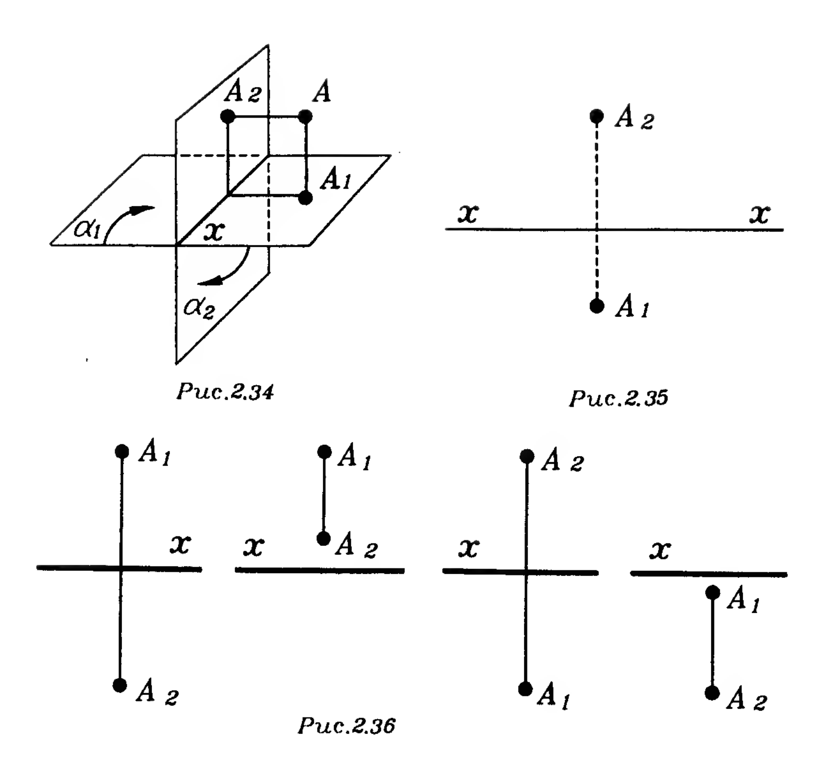


Рис.2.34

Рис.2.35

Рис.2.36

можно задать ее ортогональными проекциями на две взаимно перпендикулярные плоскости α_1 и α_2 (рис.2.34).

Повернем плоскость α_1 вокруг прямой x пересечения плоскостей α_1 и α_2 в направлении, указанном на рисунке 2.34, до совпадения с плоскостью α_2. После такого поворота обе плоскости изобразятся на одном и том же чертеже, называемом **эпюром** (рис.2.35).

Прямая x называется **осью проекции**. Плоскости α_1 и α_2 разбивают все пространство на четыре четверти — **квадранта.** В зависимости от того, в каком квадранте лежит точка A, изображения ее проекций A_1 и A_2 на эпюре находятся выше или ниже оси проекции (рис.2.36), причем всегда отрезок A_1A_2 перпендикулярен прямой x.

Ясно, что если на эпюре заданы изображения A_1 и A_2 проекций точки A, то они однозначно определяют положение точки A в пространстве.

Тем самым метод Монжа дает возможность строить эпюр по данной фигуре и, наоборот, восстановить фигуру по ее изображению на эпюре. Сам Монж так определял предмет начертательной геометрии:

"Начертательная геометрия преследует две цели: во-первых, дать методы для изображения на листе чертежа, имеющего только два измерения, а именно длину и ширину, любых тел природы, имеющих три измерения — длину, ширину и высоту, при условии, однако, что эти тела могут быть точно заданы.

Во-вторых, дать способ на основании точного изображения определять формы тел и выводить все закономерности, вытекающие из их формы и взаимного расположения".

Г. Монж был не только геометром, но и общественным деятелем в период французской буржуазной революции. Он был морским министром и организатором национальной обороны, одним из создателей Политехнической школы в Париже.

§3. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

3.1. **Простейшие предложения о параллельности.** О параллельности прямых и плоскостей уже говорилось в §1. Напомним, что две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек. Аналогично, прямая и плоскость параллельны, если они не имеют об-

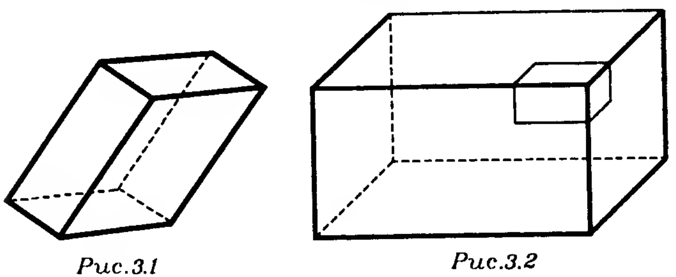


Рис.3.1 *Рис.3.2*

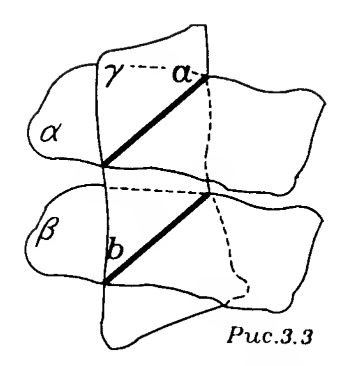
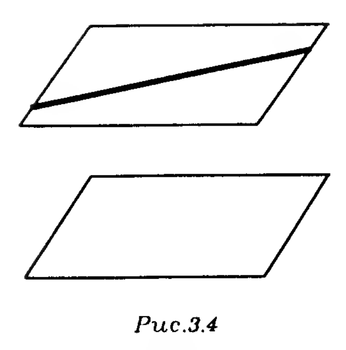


Рис.3.3


Рис.3.4

щих точек. На ребрах и гранях наклонного параллелепипеда (рис.3.1) видны все соотношения параллельности прямых и плоскостей и хорошо иллюстрируются предложения о параллельности. В тех же случаях, когда речь пойдет о соотношениях между параллельностью и перпендикулярностью, следует обращаться к ребрам и граням прямоугольного параллелепипеда (рис.3.2) или куба.

Начнем с двух простейших утверждений о параллельности, справедливость которых вытекает непосредственно из определений параллельных прямых и плоскостей.

Предложение 1. *Прямые, по которым две параллельные плоскости пересекают третью плоскость, параллельны* (рис.3.3).

Предложение 2. *Прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, параллельна другой из этих плоскостей* (рис.3.4).

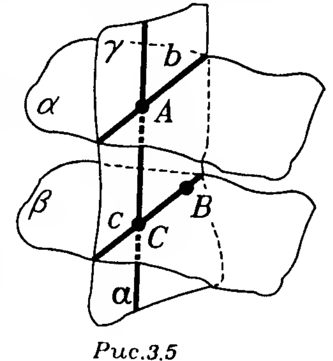


Рис.3.5

Чуть сложнее доказываются еще три предложения.

Предложение 3. *Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.*

Действительно, пусть плоскости α и β параллельны и прямая a пересекает плоскость α в точке A (рис.3.5). Проведем плоскость γ через прямую a и любую точ-

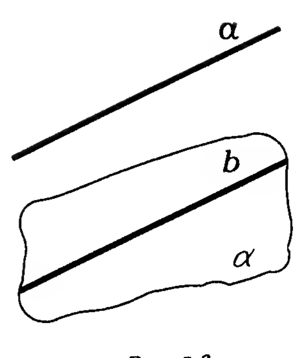


Рис.3.6

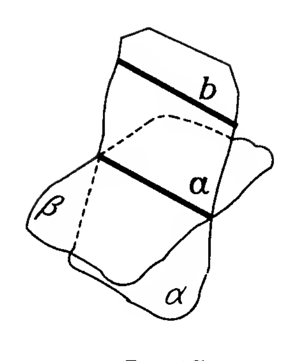


Рис.3.7

ку B плоскости β. Тогда γ пересекает α и β по параллельным прямым b и c (по предложению 1). В плоскости γ прямая a пересекает одну из этих прямых в точке A, а потому пересекает и параллельную ей прямую в некоторой точке C. В этой точке C и пересекает прямая a плоскость β. ■

П р е д л о ж е н и е 4. (признак параллельности прямой и плоскости). *Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в данной плоскости, но сама не содержится в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.*

Действительно, пусть прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, но сама не лежит в плоскости α (рис.3.6). Если бы прямая a пересекала плоскость α, то точка их пересечения не лежала бы на прямой b (так как $a \parallel b$). А тогда, по признаку 2 из п.1.6, следовало бы, что прямые a и b скрещиваются, что противоречит условию. Поэтому прямая a не пересекает плоскость α, т.е. $a \parallel \alpha$. ■

П р е д л о ж е н и е 5. *Если в одной из двух пересекающихся плоскостей, лежит прямая, параллельная другой плоскости, то эта прямая параллельна линии их пересечения.*

Действительно, пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a и в плоскости α лежит прямая b, которая параллельна плоскости β (рис.3.7). Прямая b не пе-

ресекает прямую a, так в этом случае она пересекла бы плоскость β. Так как a и b лежат в одной плоскости α, то $a \parallel b$. ■

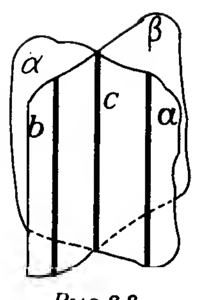


Рис.3.8

Следствием предложений 4 и 5 является следующее утверждение:

П р е д л о ж е н и е 6. *Если две пересекающиеся плоскости проходят через параллельные прямые, то прямая их пересечения параллельна этим прямым* (рис.3.8).

3.2. **Параллельность и перпендикулярность.** Две теоремы о связи параллельности и перпендикулярности в пространстве мы уже доказали в п.2.6: это теорема 4 о параллельности перпендикуляров и теорема 5 о параллели к перпендикуляру. Если в этих теоремах поменять местами слова "прямая" и "плоскость", то получим еще два предложения о соотношении параллельности и перпендикулярности в пространстве.

П р е д л о ж е н и е 7. (первый признак параллельности плоскостей). *Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны* (рис.3.9).

Действительно, такие плоскости не имеют общей точки. В противном случае мы пришли бы к противоречию с утверждением единственности в теореме 3 (п.2.5). ■

П р е д л о ж е н и е 8. *Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой из них.*

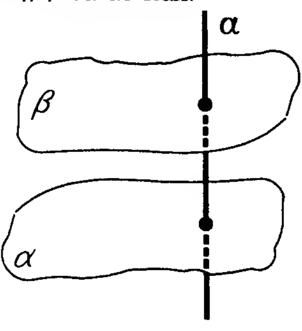


Рис.3.9

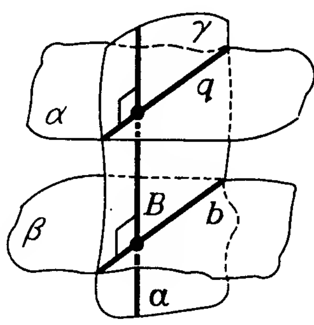


Рис.3.10

Действительно, пусть плоскости α и β параллельны и прямая $a\perp\alpha$ (рис.3.10). Согласно предложению 2 (п.3.1), прямая a пересекает и плоскость β в некоторой точке B. Возьмем любую прямую b в плоскости β, проходящую через точку B, и проведем плоскость γ через прямые a и b. Плоскость γ пересечет плоскость α по прямой q, параллельной прямой b (предложение 1 п.3.1). Кроме того $a\perp q$, так как $a\perp\alpha$. Из соотношений $b\parallel q$ и $q\perp a$ для прямых a, b, q, лежащих в плоскости γ, следует, что $b\perp a$. Поэтому $a\perp\beta$ (по определению перпендикулярности прямой и плоскости). ■

3.3. **Основная теорема о параллельных плоскостях.** Аналогом аксиомы о параллельных прямых на плоскости в стереометрии является следующая теорема.

Т е о р е м а 1. **Через каждую точку, не лежащую на данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной, и притом только одна.**

□ Пусть точка A не лежит в плоскости α (рис.3.11). Опустим из точки A перпендикуляр AB на плоскость α (теорема 6 п.2.7) и через точку A проведем плоскость β, перпендикулярную прямой AB (теорема 3 п.2.5). Плоскости α и β параллельны (предложение 7 п.3.2). Существование искомой плоскости доказано. Докажем ее единственность. Пусть γ — некоторая плоскость, проходящая

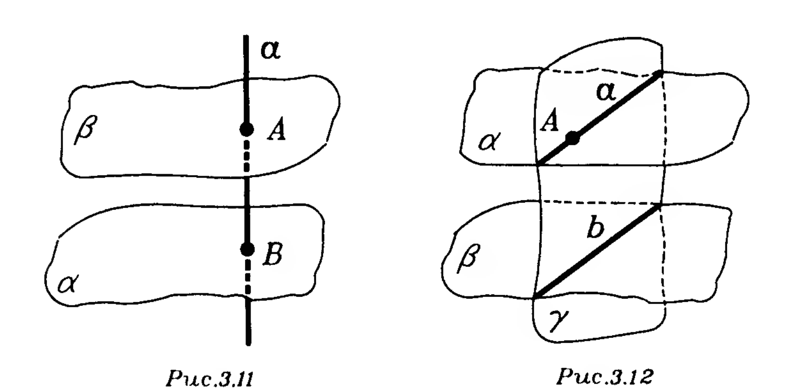


Рис.3.11 Рис.3.12

через точку A и параллельная плоскости α. Так как $\gamma \parallel \alpha$ и $AB \perp \alpha$, то $\gamma \perp AB$ (предложение 8 п.3.2). Но через точку A может проходить лишь одна плоскость, перпендикулярная прямой AB (теорема 3. п.2.5). Поэтому γ совпадает с β. ■

С л е д с т в и е 1. *Если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и вторую из них* (рис.3.12).

С л е д с т в и е 2. *Две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны.*

3.4. **Второй признак параллельности плоскостей.** Параллельность противоположных граней наклонного параллелепипеда или оснований призмы можно установить, используя следующий признак параллельности плоскостей.

Т е о р е м а 2. **Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, параллельны соответственно двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.**

□ Пусть в плоскости α лежат прямые a и b, пересекающиеся в точке O, а в плоскости β лежат параллельные им пересекающиеся прямые a_1 и b_1: $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$ (рис.3.13). Докажем, что $\alpha \parallel \beta$. Так как $a \parallel a_1$, то $a \parallel \beta$, а так как $b \parallel b_1$, то $b \parallel \beta$. Допустим, что плоскости α и β пересекаются по прямой c (рис.3.14). Тогда $a \parallel c$ и $b \parallel c$ (согласно предложению 5. п.3.1). Но через

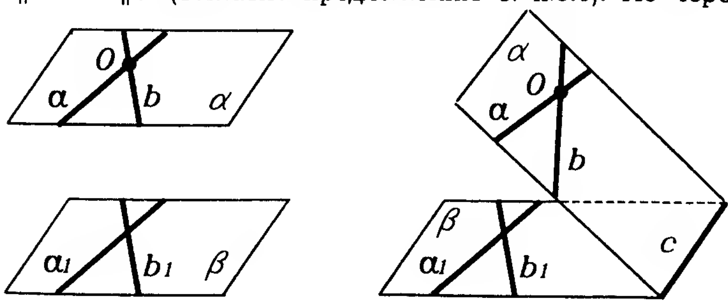


Рис.3.13 *Рис.3.14*

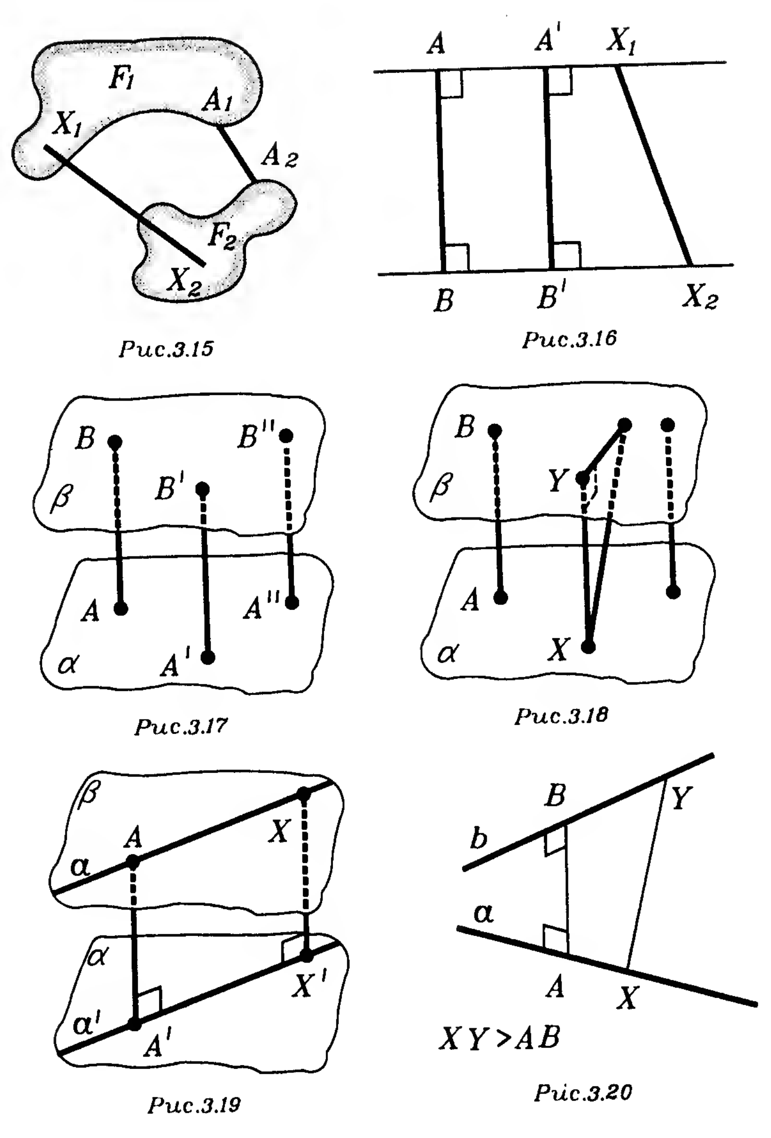


Рис.3.15

Рис.3.16

Рис.3.17

Рис.3.18

Рис.3.19

Рис.3.20

одну точку O не могут проходить две прямые a и b, параллельные прямой c. Это противоречие возникло из-за предложения, что α и β пересекаются. Поэтому $\alpha \parallel \beta$. ■

3.5. **Расстояние и параллельность.** Вообще, **расстояние между двумя фигурами** (например, расстояние между двумя островами) — это расстояние между ближайшими точками A_1 и A_2 этих фигур (рис.3.15). Расстояние между фигурами F_1 и F_2 обозначаем символом $|F_1F_2|$. Очевидно, что *расстояние между параллельными прямыми — это длина их общего перпендикуляра* (рис.3.16). Все общие перпендикуляры двух параллельных прямых равны друг другу (как противоположные стороны прямоугольника). По той же причине равны друг другу все общие перпендикуляры параллельных плоскостей (рис.3.17), и длины этих перпендикуляров меньше длины любого наклонного отрезка, соединяющего точки параллельных плоскостей (рис.3.18). Поэтому и *расстояние между параллельными плоскостями равно длине любого их общего перпендикуляра.* Эти перпендикуляры заполняют **слой между параллельными плоскостями.** Иначе говоря, параллельные плоскости проходят на постоянном расстоянии друг от друга или слой между параллельными плоскостями имеет всюду одинаковую толщину. Параллельность плоскостей так и проверяют, измеряя толщину слоя между этими плоскостями.

Так измеряют и высоту призмы, основания которой лежат в параллельных плоскостях. А именно, **высотой призмы** называется перпендикуляр, опущенный из любой точки основания призмы на плоскость другого ее основания, а также его длина.

И о прямой, параллельной плоскости, можно сказать, что она идет на постоянном расстоянии от плоскости, так как длины всех их общих перпендикуляров равны друг другу (рис.3.19).

А у скрещивающихся прямых a и b лишь один общий перпендикуляр AB, длина которого и является расстоянием между a и b (рис.3.20). Чтобы построить его, надо спроектировать прямую b на плоскость α, проходящую через прямую a и параллельную прямой b (рис.3.21). Точка пересечения прямой a с проекцией b' прямой b и будет точка A. Но вернемся к параллельным прямым и плоскостям.

Параллельные прямые (плоскости) определяются как прямые (плоскости), которые не пересекаются (на всем их бесконечном протяжении). Но реально мы имеем дело с конечными отрезками прямых и конечными кусками плоскостей, хотя бы и не идеальными, но прямыми и плоскими с той или иной точностью. Параллельность противоположных краев пола или доски, двух рельсов и т.п., так же как параллельность пола и потолка, двух противоположных стен или междуэтажных перекрытий, устанавливается не тем, что получается при их бесконечном продолжении. Никакой плотник не продолжает краев доски до бесконечности, как и строители, даже мысленно, не продолжают ни междуэтажных перекрытий, ни стен дома. Словом, на самом деле в теории параллельных прямых и плоскостей важны и имеют реальный смысл те свойства, которые относятся к их конечным отрезкам и кускам. По этим же свойствам производится построение параллельных прямых и плоскостей, а в реальности — их конечных кусков.

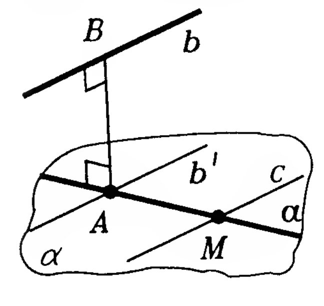


Рис.3.21

Важнейшим среди таких свойств, характеризующих параллельность прямых (плоскостей), является постоянство расстояния, т.е. равноудаленность точек одной прямой (плоскости) от другой. По доказанной теореме все общие перпендикуляры двух параллельных плоскостей равны.

Выполняется также обратное утверждение.

Концы равных перпендикуляров к данной плоскости, расположенные с одной стороны от нее, лежат в одной плоскости, параллельной данной, и заполняют ее. Докажите это самостоятельно.

Реальным воплощением отрезков, о которых идет речь, могут представляться столбы и колонны, стоящие на основании здания и подпирающие параллельное ему перекрытие. На колонны равной высоты опирается верхняя плоскость здания, например греческого храма (рис.3.22). И в современном строительстве сплошь и рядом укладывают междуэтажные перекрытия на верти-

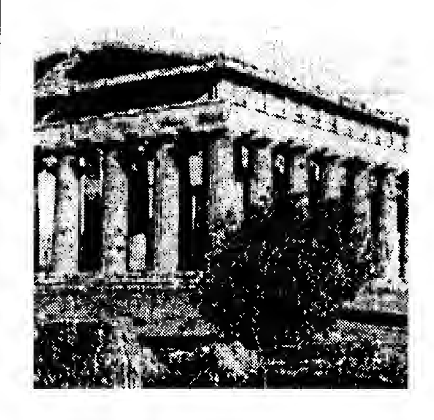


Рис.3.22

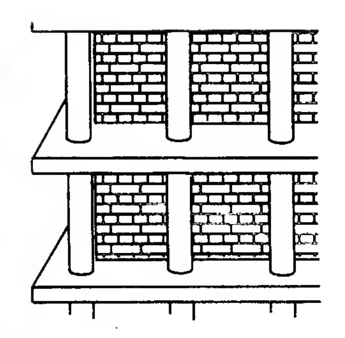


Рис.3.23

кальных столбах равной высоты. Их верхние концы оказываются в плоскости, параллельной той, где лежат их основания (рис.3.23).

3.6. **Сонаправленность лучей и угол между прямыми.** С параллельностью связано не только постоянство расстояний, но и равенство углов между параллельными фигурами и пересекающей их прямой или плоскостью. Вспомните, что именно так формулируются в планиметрии различные признаки параллельности прямых (рис.3.24). В основе аналогичных утверждений в стереометрии (а также затем и в теории векторов) лежат два важных предложения о сонаправленных лучах.

Сонаправленность двух лучей определяется так же, как и в планиметрии. Два луча называются **сонаправленными** или **одинаково направленными,** если либо один из них содержит другой, либо они лежат на параллельных прямых по одну сторону от прямой, проходящей через их начала (рис.3.25). Сонаправленные лучи p и q обозначаются так: $p \uparrow\uparrow q$. Угол между сонаправленными лучами полагается равным $0°$.

Если лучи p и q не сонаправлены и имеют общее начало, то они являются сторонами плоского угла (рис.3.26), и угол между ними — это величина этого плоского угла.

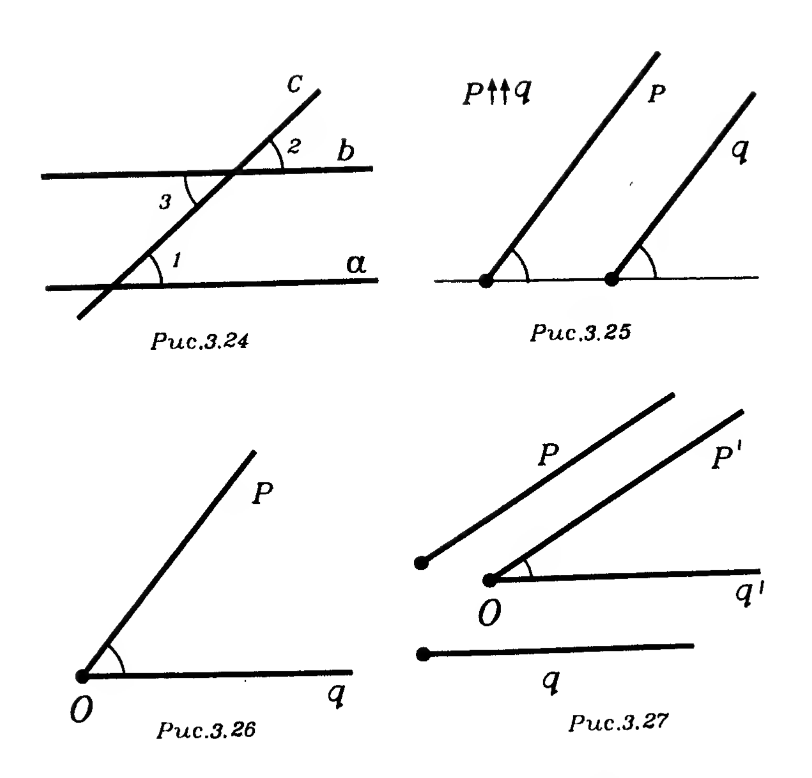


Рис.3.24

Рис.3.25

Рис.3.26

Рис.3.27

Наконец, в общем случае, когда лучи p и q не сонаправлены и имеют различные начала (рис.3.27), поступают так: из любой точки O проводят лучи p' и q', сонаправленные соответственно с лучами p и q. Углом между лучами p и q называется угол между лучами p' и q'. Угол между лучами p и q обозначается так: $\angle pq$.

Корректность данного определения, т.е. независимость угла между лучами p' и q' от выбора точки O, и вытекает из тех двух предложений, о которых уже было сказано. Докажем их.

Л е м м а 1. **Углы, стороны которых соответственно сонаправлены, равны.**

□ Пусть даны два угла с вершинами в точках O и O' и соответственно сонаправленными сторонами $p\uparrow\uparrow p'$

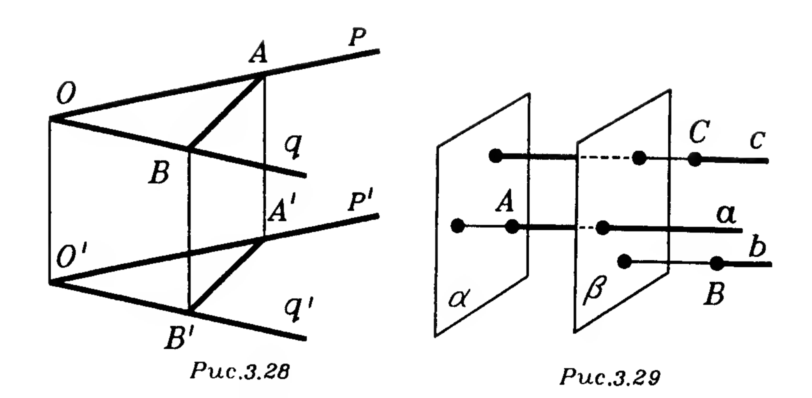


Рис.3.28

Рис.3.29

и $q \uparrow\uparrow q'$ (рис.3.28). Если данные углы лежат в одной плоскости, то утверждение леммы известно из планиметрии. Поэтому рассмотрим лишь случай, когда рассматриваемые углы не лежат в одной плоскости.

Отложим на сонаправленных сторонах этих углов равные отрезки: $OA = O'A'$ на p и p' и $OB = O'B'$ на q и q' соответственно. Проведем отрезки OO', AA', BB', AB и $A'B'$. Так как $OA = O'A'$ и $OA \parallel O'A'$, то четырехугольник $OAA'O'$ — параллелограмм. Поэтому $OO' = AA'$ и $OO' \parallel AA'$. Аналогично $OO' = BB'$ и $OO' \parallel BB'$. Поэтому $AA' = BB'$ и $AA' \parallel BB'$, т.е. четырехугольник $ABB'A'$ — параллелограмм. Следовательно, $AB = A'B'$.

Итак, в треугольниках OAB и $O'A'B'$ соответственные стороны равны. Но тогда в них равны и соответственные углы. Значит, $\angle AOB = \angle A'O'B'$, т.е. $\angle pq = = \angle p'q'$. ■

Л е м м а 2. **Два луча, сонаправленные с третьим, сонаправлены.**

□ Пусть лучи a и b сонаправлены с лучом c. Покажем, что $a \uparrow\uparrow b$. Так как $a \uparrow\uparrow c$, то они перпендикулярны некоторой плоскости α и лежат с одной стороны от плоскости α. Аналогично лучи b и c перпендикулярны некоторой плоскости β и лежат с одной стороны от

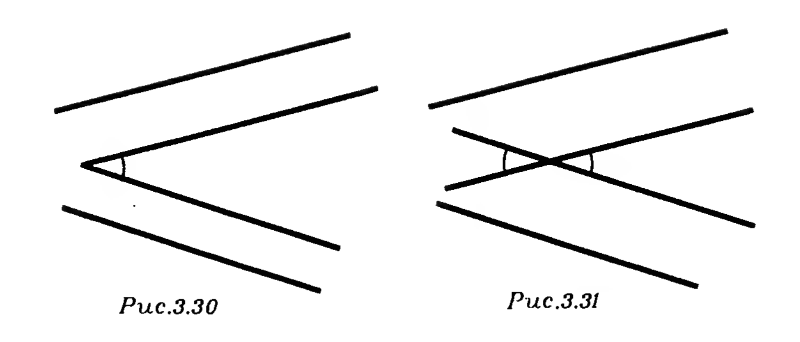


Рис.3.30 Рис.3.31

плоскости β. Так как α и β перпендикулярны одному лучу c, то $\alpha \parallel \beta$ (рис.3.29) или $\alpha = \beta$. Пусть плоскость α удалена от начала луча c дальше, чем плоскость β. Тогда все лучи a, b, c лежат с одной стороны от плоскости α и все перпендикулярны ей (по теоремам о параллельности перпендикуляров и о параллели к перпендикуляру из п.2.6). Поэтому $a \uparrow\uparrow b$. ■

Из лемм 1 и 2 вытекает корректность определения угла между лучами. Теперь мы можем определить **угол между прямыми** в пространстве как меньший из двух углов между лучами, параллельными этим прямым.

Согласно этому определению, угол между параллельными прямыми равен 0°. Для пересекающихся прямых это определение дает величину не тупого угла из пары вертикальных углов, образованных этими прямыми (рис.3.30).

Если же прямые скрещиваются, то, чтобы найти угол между ними, можно поступить так: через любую точку провести прямые, параллельные данным, и найти угол между этими прямыми (рис.3.31).

В частности, теперь можем говорить о *взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых* (а также лучах), если угол между ними равен 90°. Взаимно перпендикулярными называем и отрезки, лежащие на взаимно перпендикулярных прямых.

При таком расширении понятия перпендикулярности прямых, лучей и отрезков остаются справедливыми

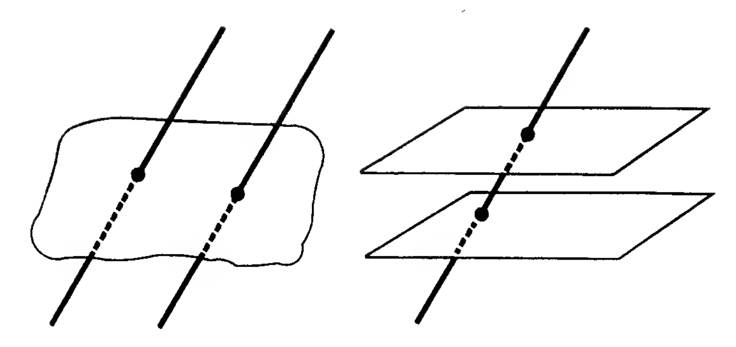


Рис.3.32 *Рис.3.33*

доказанные ранее теоремы, в которых перпендикулярность рассматривалась лишь для пересекающихся прямых, лучей и отрезков: признак перпендикулярности прямой и плоскости (теорема 2. п.2.4) и теорема о трех перпендикулярах (теорема 1 п.2.3). Убедитесь в этом! В дальнейшем мы будем применять эти теоремы именно в этом более широком смысле. Так, например, для того чтобы установить перпендикулярность прямой a и плоскости α, теперь можно найти на этой плоскости любые две пересекающиеся прямые, перпендикулярные прямой a. Эти прямые могут a не пересекать.

3.7. **Параллельность и углы.** Следует рассмотреть три возможности: 1) две параллельные прямые и плоскость (рис.3.32); 2) две параллельные плоскости и прямая (рис.3.33); 3) две параллельные плоскости и пересекающая их третья плоскость (рис.3.34). Им соответствуют следующие предложения.

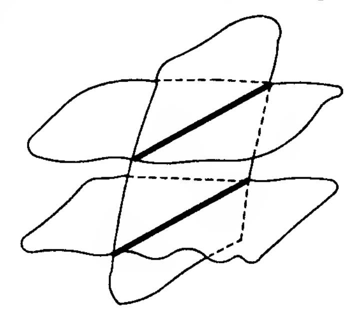


Рис.3.34

Предложение 9. *Две параллельные прямые образуют с данной плоскостью равные углы.*

Действительно, пусть прямые a и b параллельны и α — некоторая плоскость. Рассмотрим случай, когда прямые a и b не параллельны и не перпендикулярны плоскости α (рис.3.35). Спроекти-

руем прямые a и b на плоскость α в прямые a' и b'. Так как $a \| b$, то $a' \| b'$ или $a' = b'$. В обоих случаях $\angle aa' = \angle bb'$. Но этими углами и измеряются углы между прямыми a и b и плоскостью α. Поэтому для рассматриваемого случая предложение 9 доказано. В случае параллельности одной из прямых плоскости α углы между прямыми a и b и плоскостью α равны 0°, а для случая перпендикулярности — эти углы равны 90°. ■

П р е д л о ж е н и е 10. *Углы, которые образует прямая с каждой из двух параллельных плоскостей, равны.*

Действительно, пусть плоскости α и β параллельны и a — некоторая прямая. Если a перпендикулярна одной из плоскостей α или β, то a перпендикулярна и второй из них, и в этом случае углы между прямой a и плоскостями α и β равны 90°. В случае параллельности прямой a одной из плоскостей α или β углы между прямой a и этими плоскостями будут равны 0°. Осталось рассмотреть общий случай, когда прямая a пересекает плоскости α и β и не перпендикулярна к ним. Тогда через любую точку прямой a проведем прямую b, перпендикулярную плоскостям α и β, и через прямые a и b проведем плоскость γ (рис.3.36). Плоскость γ пересечет плоскости α и β по параллельным прямым a'

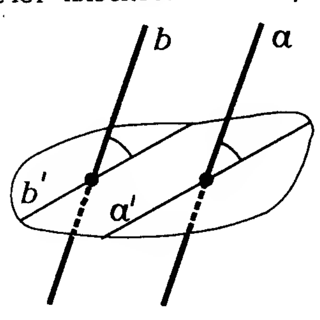


Рис.3.35

Рис.3.36

и a'', которые являются проекциями прямой a на плоскости α и β. Так как $\angle aa' = \angle aa''$ (как соответственные углы при параллельных прямых a' и a'' и секущей a), а этими углами измеряются углы между прямой a и плоскостями α и β, то предложение 10 доказано. ■

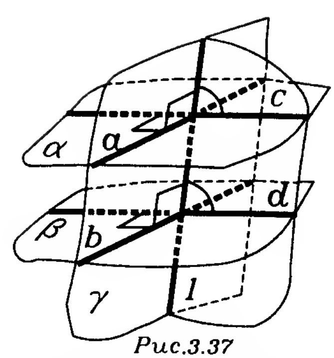


Рис.3.37

Предложение 11. *Если плоскость пересекает две параллельные плоскости, то углы, которые она образует с этими плоскостями, равны.*

Действительно, пусть параллельные плоскости α и β пересекает плоскость γ по параллельным прямым a и b (рис.3.37). Любая плоскость, перпендикулярная прямым a и b, пересекает плоскости α и β по параллельным прямым c и d, а плоскость γ по некоторой прямой l — секущей для этих прямых c и d. Поскольку $\angle cl = \angle dl$, а этими углами и измеряются углы между плоскостями α и β и плоскостью γ, то предложение 11 доказано. ■

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

ЗАДАЧИ К §1

1.1. Пусть $PABC$ — тетраэдр. Нарисуйте его сечение плоскостью (XYZ), если точка X лежит внутри ребра PB, точка Y лежит внутри ребра AC, точка Z лежит внутри ребра AB.

△ Сечение многогранника — многоугольник. Он определяется своими вершинами. Его вершинами являются точки, в которых плоскость сечения пересекается с ребрами многогранника. Если какие-то из этих точек пересечения лежат в одной грани многогранника, то соединив их, получим сторону ис-

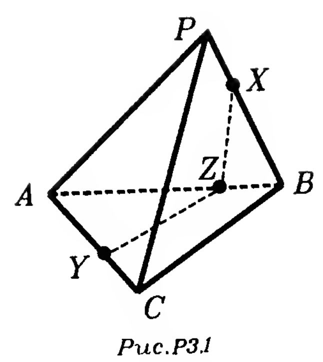


Рис.Р3.1

комого сечения. Естественно начинать построение сечения с проведения таких отрезков, если они есть. Поэтому проведем отрезки XZ и YZ — две стороны искомого сечения (рис.Р3.1).

Для нахождения других его сторон можно действовать по-разному. Вот один из способов. Посмотрим, где плоскость сечения пересекает прямые, содержащие ребра тетраэдра. В данном случае нас могут интересовать прямые BC, PC, PA. Выберем одну из них, пусть это будет (PA). Внимание! Сейчас главный момент решения! Эта прямая будет пересекать плоскость сечения в той точке, в которой она пересекает прямую, лежащую в плоскости сечения. Найдем точку пересечения (PA) с (XZ) — эти прямые лежат в плоскости PAB и, судя по рисунку (?), не являются параллельными.

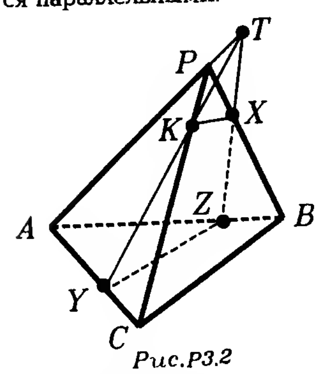


Рис.Р3.2

Пусть T — общая точка прямых PA и XZ, а значит, точка, в которой прямая PA пересекается с плоскостью XYZ (рис.Р3.2).

Точка T дает нам также общую точку плоскости сечения и плоскости PAC — ведь (PA) лежит в (PAC). А одна такая точка, общая для (PAC) и плоскости сечения, уже есть — это точка Y. Тогда прямая YT является общей для этих плоскостей. На нашем рисунке она пересекает ребро PC. Обозначим точку их пересечения через K. Теперь, осталось только соединить точку K с точкой X, и нужное сечение нарисовано.

Можно было бы действовать несколько иначе. Например, можно сначала найти точку пересечения прямой BC с плоскостью сечения — результат был бы один и тот же (?).

И, наконец, о том, почему у нас получилось такое построение. Ведь могло бы оказаться, что тех точек пересечения, которые мы ищем, просто нет! Прямая PA вполне может быть па-

раллельна (XZ) при соответствующем выборе точек. Как быть тогда? ▲

1.2. Дано n попарно скрещивающихся прямых. Докажите, что: а) существуют точки, не лежащие иа этих прямых; б) существует плоскость, которая пересекает каждую из иих; в) существует прямая, которая скрещивается с каждой из них.

△ а) Проведем плоскость через одну из данных прямых. Остальные прямые либо пересекают эту плоскость, либо не имеют с ней общих точек — других случаев расположения быть не может. Как бы там ни было, в проведенной плоскости найдутся точки, не принадлежащие данным прямым (?).

б) Выберем точку в пространстве и проведем через нее прямые, параллельные каждой из данных прямых. Найдется плоскость, которая пересекает все эти прямые (?). Но тогда она пересекает и все данные прямые (?).

А вот решение, основанное на наглядных соображениях. Через одну из данных прямых проведем плоскость. Если нам повезет, то она будет пересекать все остальные данные прямые. Если нет и найдутся прямые, которых она не пересекает, то будем поворачивать нашу плоскость вокруг прямой, через которую она была проведена, пока не добьемся нужного нам положения. Осталось добиться того, чтобы плоскость пересекала и первоначально взятую прямую. Но ведь таким поворотом этого не добиться! Как же быть? А мы эту плоскость "чуть-чуть пошевелим" так, чтобы она уже не содержала первую прямую, а пересекала ее — этого можно добиться также поворотом, но только вокруг другой прямой (какой?). Ясно, что при таком "малом шевелении" можно считать, что взаимное положение плоскости и каждой из этих прямых не изменилось. Значит задача решена.

в) В плоскости, построенной в пункте б), возьмем прямую, которая проходит мимо всех точек пересечения этой плоскости с данными прямыми. Такая прямая всегда найдется (?). Она и будет искомой согласно одному из признаков скрещивающихся прямых. ▲

1.3. **Пусть A, B, C, D — точки пространства. Известно, что расстояния $|AB| = |CD| = 4$, $|AC| = 3$, $|BC| = |AD| = 5$. Может ли $|BD| = 4$?**

△ Вопрос задачи на первый взгляд выглядит странно. В самом деле, а почему расстояние $|BD|$ не может равняться 4? Иначе говоря, а какие могут быть на величину $|BD|$ ограничения? Точки A, B, C, D будем считать вершинами тетра-

эдра. Вот и нарисуем тетраэдр, у которого все ребра, включая BD, отвечают условию задачи. И все.

Здесь уместно остановиться и подумать...

Полезно, например, найти аналогию с планиметрией. Фигура плоскости, аналогичная тетраэдру, — треугольник. И вы помните, конечно, что стороны треугольника не могут быть любыми отрезками — сумма двух любых из них должна быть больше третьего (так называемое неравенство треугольника). Значит, существование треугольника, стороны которого равны данным отрезкам, должно быть доказано.

Так же обстоят дела и с тетраэдром. Откуда мы знаем, что существует тетраэдр с любыми ребрами? Между прочим, ясно, что с любыми ребрами и не существует. Ведь каждая его грань — треугольник, а значит, для его ребер, лежащих в каждой грани, должно выполняться неравенство треугольника.

В данной задаче для ребер каждой грани неравенство треугольника выполняется. Но может быть, есть и другие условия, необходимые для существования тетраэдра с шестью произвольными ребрами? Аналогия с треугольником оказалась полезной, но все-таки тетраэдр не треугольник.

Задачу о существовании тетраэдра с шестью заданными ребрами нам пока не решить, мы сделаем это позже. Но с данной задачей все же попробуем справиться.

Прежде всего заметим, что вычислить $|BD|$, исходя из условий задачи, невозможно. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно мысленно вращать треугольник ACD вокруг (AC), а треугольник ABC оставить неподвижным. Очевидно, что все данные в задаче от этого не изменяются, а $|BD|$ меняться будет.

Далее заметим, что треугольники ACD и ABC прямоугольные. (По существу это обстоятельство не принципиально — они могли бы быть и другими, от этого содержание задачи и ее решение не изменяются.)

Посмотрим теперь, какие значения может принимать $|BD|$. Для этого зафиксируем два положения треугольника ACD, когда его плоскость совпадает с плоскостью ABC. Первое положение, когда точка D находится с той же стороны от (AC), что и точка B (рис.Р3.3). Второе положение, когда она находится с другой стороны от (AC), нежели точка B (рис.Р3.4). В первом положении $|BD| = 3$. Во втором положении $|BD| = \sqrt{73}$ (?). Первое число меньше 4, а второе число больше 4.

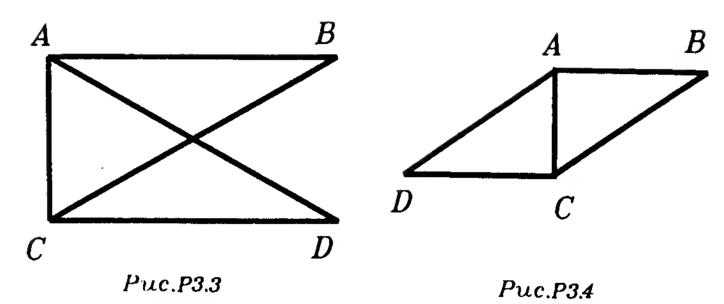


Рис.Р3.3

Рис.Р3.4

Значит, при каком-то положении треугольника ACD $|BD| = 4$. Задача решена.

Обратите внимание на то, что нам неважно, как изменяется $|BD|$: увеличивается или уменьшается. Важным для решения оказалось то, что число 4 находится между двумя значе-ниями $|BD|$. Отсюда ясно, что вместо 4 мы могли бы взять любое число, которое находится в границах от 3 до $\sqrt{73}$ — решение было бы таким же. ▲

1.4. **В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 2 через точку K — середину ребра PA проводится сечение, параллельное (BC). В каких границах находятся его площадь и периметр?**

△ Мы приводим решение этой несложной задачи, ибо в ней есть некоторые "тонкости".

Прежде всего, какова форма сечения? Для того чтобы установить это, полезно (но не обязательно) представить себе некую переменную плоскость, удовлетворяющую условию задачи. В нашем случае такой плоскостью является, например, плоскость, проходящая через прямую $(KL) \| (BC)$ (рис.Р3.5). Представим себе, что такая плоскость вращается вокруг (KL). Что же мы увидим в сечении тетраэдра такой плоскостью?

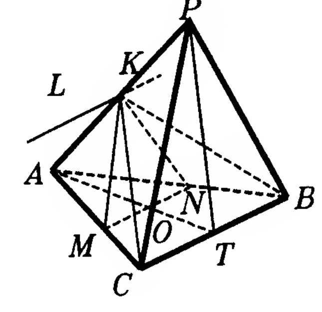


Рис.Р3.5

Мы увидим треугольник с вершиной в точке K, одна из сторон которого параллельна (BC) (?). Такая сторона может лежать в грани ABC и в грани PBC. При более внимательном

взгляде обнаруживается, что треугольник этот равнобедренный и точка K — его вершина (?).

Треугольник KBC для большей общности также будем считать одним из возможных сечений. Эта оговорка необходима, так как по определению прямая, лежащая в плоскости, не является ей параллельной. А у нас прямая BC лежит в плоскости KBC. Эту оговорку (а также ей аналогичную для переменной плоскости, параллельной некоторой плоскости) примем на все задачи подобного рода.

Кроме того, нельзя забывать о плоскости PKL. Сечение тетраэдра этой плоскостью — отрезок PA.

Итак, сечение тетраэдра в этой задаче — равнобедренный треугольник или отрезок. Можно договориться для некоторой общности результатов, что площадь отрезка принимается равной 0. (С периметром отрезка дело обстоит сложнее, но содержательно это уже ничего не добавляет.)

Разберемся теперь с площадью треугольника сечения. Пусть MN — переменное основание сечения, KO — переменная его высота. (Здесь надо объяснить, почему точка O находится на отрезке AT, где точка T — середина ребра BC). Легко доказать, что наибольшее значение $|MN|$ равно $|BC|$, а наибольшее значение $|KO|$ равно $|KT|$ (?). Тогда наибольшее значение площади сечения равно площади треугольника KBC (?).

Наименьшего значения площадь треугольного сечения не достигает, ибо основание $|MN|$, а значит, и площадь треугольника KMN (при ограниченности высоты KO) можно сделать сколь угодно малыми.

Перейдем к периметру сечения. Он равен $2|KM|+|MN|$. Наибольшее значение $|MN|$ равно $|BC|$, а наибольшее значение $|KM|$ равно $|KC|$ (?). Поэтому наибольшее значение периметра сечения — периметр треугольника KBC. Вычислите его.

Наименьшее значение периметра сразу определить трудно(?). Без выкладок тут не обойтись. Пусть $|AM|=x$. Тогда $|MN|=x$, $|KM|=\sqrt{x^2-x+1}$, а периметр — $2\sqrt{x^2-x+1}+x$ $(0<x\le 2)$ (?).

С использованием производной получаем, что наименьшее значение данной функции на промежутке $[0;2]$ достигается в точке $x = 0$. (Разумеется, вам нужно самостоятельно проделать все необходимые выкладки.)

Но при $x = 0$ треугольное сечение перестает существовать, оно, как говорят, вырождается в отрезок PA (именно поэтому мы считаем, что $x > 0$, а не $x \geq 0$). А для нас представляет интерес, повторяем, именно треугольные сечения. Значит, нам приходится считать, что периметр сечения наименьшего значения не достигает.

Итак, ответ: площадь треугольного сечения лежит в границах от 0 до $\sqrt{2}$, не включая 0; периметр треугольного сечения лежит в границах от 2 до $2+2\sqrt{3}$, не включая 2. ▲

ЗАДАЧИ К §2

1.5. **Какую фигуру в простраистве образуют все точки, равиоудалеииые от двух даииых точек?**

△ Искомой фигурой на плоскости является прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему данные точки, и проходящая через его середину. Эту прямую называют серединным перпендикуляром отрезка. Она является осью симметрии двух данных точек.

Перейдем к пространству. В каждой плоскости, проходящей через данные точки A и B, искомой фигурой является ось симметрии отрезка AB. Таких плоскостей бесконечно много, поэтому искомая фигура будет состоять из бесконечного множества всех этих осей симметрии. Можно себе представить, что искомая фигура получена как бы вращением одной из этих осей вокруг (AB).

Таким образом, из соображений наглядности можно предположить, что искомой фигурой является плоскость. Проходит она через середину отрезка AB (точку O) и перпендикулярна отрезку AB (?). Назовем эту плоскость α.

Теперь убедимся в этом, доказав два утверждения:

1. Каждая точка X плоскости α равноудалена от A и B: $XA = XB$.

2. В плоскости α содержатся все точки, равноудаленные от точек A и B. Иначе говоря, если точка Y такова, что $YA = YB$, то она лежит в плоскости α.

Докажем утверждение 1.

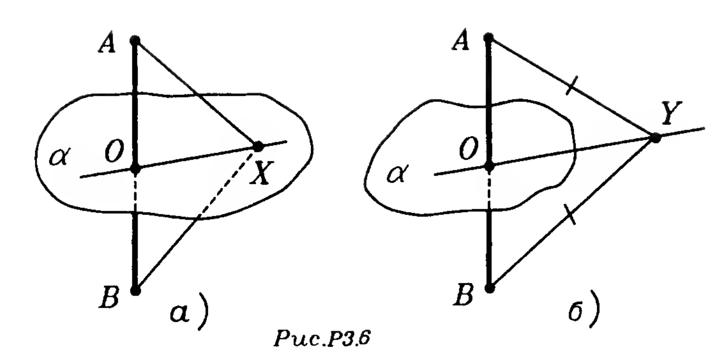


Рис.Р3.6

Если точка $X \in \alpha$, то она лежит на прямой XO, принадлежащей плоскости α (рис.Р3.6*а*). Так как $AB \perp \alpha$, то $AB \perp$ $\perp XO$. Получилось, что прямая XO перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину, т.е. является его осью симметрии. Но тогда $XA = XB$.

А теперь докажем утверждение 2.

Пусть точка Y такова, что $YA = YB$. Рассмотрим плоскость AYB (рис.Р3.6*б*). Так как $YA = YB$, то Y лежит на оси симметрии отрезка AB, находящейся в плоскости AYB. Иными словами, $YO \perp AB$. Мы знаем, что все перпендикуляры, проведенные к данной прямой в данной ее точке, лежат в одной плоскости — той, которая перпендикулярна прямой в этой точке. В нашем случае такой плоскостью и является плоскость α. Значит, (YO) лежит в α. Но тогда и точка Y лежит в плоскости α.

Второе утверждение можно доказать иначе, рассмотрев пересечение плоскости AYB и плоскости α. Попробуйте это сделать самостоятельно.

В планиметрии результат этой задачи понадобился для построения окружности, описанной около многоугольника. Стереометрический вариант этой задачи понадобится нам в дальнейшем курсе, когда мы будем описывать сферу около многогранника. ▲

1.6. Докажите, что существует точка, равиоудалеииая от всех вершии правильиого тетраэдра. Обобщите это утверждеиие.

△ Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, а точка O — центр его основания.

1) Докажите, что углы PQA, PQB и PQC равны.

2) Возьмите любую точку X на отрезке PQ и докажите, что расстояния XA, XB, XC равны.

3) Сравните расстояния XA и XP при двух положениях точки X: когда она совпадает с P и когда она совпадает с Q. Используйте соображения непрерывности.

Нужное нам положение точки X на отрезке PQ можно установить с помощью вычислений. Прежде всего обозначьте ребро тетраэдра, например, через d (можно было бы его считать равным 1 или 2). Вычислите $|AQ|$. Теперь можно доказать, что треугольник PAQ прямоугольный. Для этого из треугольника PAK (точка K — середина ребра BC) найдите угол PAK (вычислив его косинус). Потом из треугольника PAQ установите, что угол PQA прямой. Точка X, находясь на отрезке PQ, равноудалена от вершин A, B, C — это мы уже доказали. Считая расстояние от точки X до точки P неизвестным, составьте и решите уравнение для его нахождения.

Обобщение трудностей не вызовет, но при его доказательстве вас, вероятно, будет поджидать сюрприз.

Как вы думаете, единственна ли такая точка? Как вы обоснуете свое предположение? ▲

1.7. **Через середины сторон треугольника проведены плоскости, перпендикулярные этим сторонам. Докажите, что общая прямая этих плоскостей перпендикулярна плоскости треугольника. Обобщите это утверждение.**

△ Пусть ABC — данный треугольник, точка K — середина стороны AC, точка L — середина стороны BC, точка M — середина стороны AB. Плоскость, перпендикулярную (AC) и проходящую через K, обозначим α, плоскость, перпендикулярную (BC) и проходящую через L, — β, а плоскость, перпендикулярную (AB) и проходящую через M, — γ (рис.Р3.7).

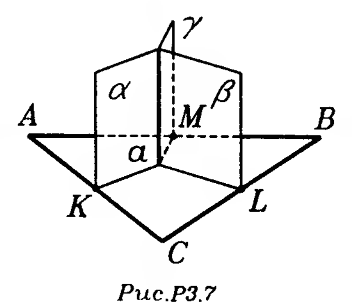


Рис.Р3.7

Прежде всего докажем, что все эти плоскости имеют общую прямую. Возьмем сначала плоскости α и β. Каждая из

них пересекает (ABC). Прямые пересечения этих плоскостей с (ABC) являются серединными перпендикулярами к отрезкам AC и BC (?), а потому имеют общую точку. Так как α и β имеют общую точку, то они имеют общую прямую — назовем ее a. (Разумеется, α и β не совпадают (?).)

Докажем, что прямая a лежит в плоскости γ. Так как $a \in \alpha$, то все точки прямой a равноудалены от точек A и C. Так как $a \in \beta$, то все точки прямой a равноудалены от точек C и B. Отсюда следует, что все точки прямой a равноудалены от точек A и B, а потому прямая a лежит в плоскости, перпендикулярной (AB) и проходящей через точку M — середину отрезка AB, т.е. в плоскости γ.

Теперь докажем, что $a \perp (ABC)$. Так как $(AC) \perp \alpha$ и $(AC) \in (ABC)$, то $(ABC) \perp \alpha$. Так как $(BC) \perp \beta$ и $(BC) \in (ABC)$, то $(ABC) \perp \beta$. Но тогда (ABC) перпендикулярна прямой пересечения плоскостей α и β, т.е. прямой a. ▲

Теперь займемся обобщениями. В этой задаче естественно вместо треугольника взять многоугольник. Самостоятельно сформулируйте и докажите это общее утверждение. Обобщая, можно двинуться и в другом направлении, отбросив условие, что плоскости проходят именно через середины сторон треугольника. Как будет выглядеть это обобщение и как оно доказывается? И, наконец, можно объединить и первое, и второе обобщение. Сделайте это.

1.8. **Точка A лежит в плоскости α. На этой плоскости взяли прямую a, не проходящую через A, и провели к ней перпендикуляр AB. Через точку B, перпендикулярно к прямой a, провели другую прямую — BC. Из точки A в плоскости ABC провели (AD), перпендикулярно (AB). Докажите, что $(AD) \perp \alpha$.**

△ Любопытно, что перпендикулярность (AD) и α можно доказать, используя только признак перпендикулярности прямой и плоскости, да еще понадобится теорема Пифагора.

Уже известно (по условию), что $(AD) \perp (AB)$. Но $(AB) \in \alpha$. Осталось найти еще одну прямую плоскости α, перпендикулярную (AD). Такой прямой является прямая, проходящая через точку A и пересекающая прямую a в любой точке X,

$X \neq B$ (рис.Р3.8). Итак, докажем, что $(AD)\perp(AX)$. Для этого достаточно убедиться в том, что

$$|XD|^2 = |XA|^2 + |AD^2|. \qquad (?)$$

Из соответствующих прямоугольных треугольников следуют такие соотношения:

$$|XD|^2 = |XB|^2 + |BD|^2,$$
$$|XA|^2 = |AB|^2 + |BX|^2, \qquad (?)$$
$$|AD|^2 = |BD|^2 - |AB|^2.$$

Из этих равенств можно получить и требуемое соотношение(?). Доказательство закончено, но над ним стоит поразмыслить. Мы ведь хотели найти в плоскости α еще одну, кроме (AB), прямую, проходящую через A и перпендикулярную (AD). А фактически нашли их бесконечное множество, ведь точка X — любая на прямой a, кроме B. А так как $(AD)\perp(AB)$ по условию, то получается, что (AD) перпендикулярна почти всем прямым плоскости α, проходящим через A, кроме одной — той, которая параллельна a. Если удастся доказать эту последнюю перпендикулярность, то получится, что мы доказали перпендикулярность (AD) и α без ссылки на признак.

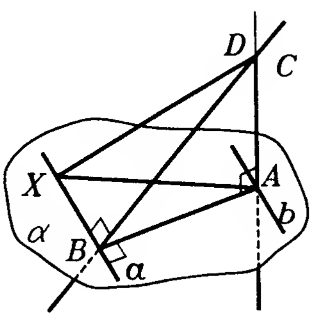


Рис.Р3.8

Для доказательства того, что (AD) перпендикулярна этой "последней" прямой, назовем ее b, есть разные идеи. Вот одна из них.

Будем проводить прямые (AX) так, чтобы угол между (AX) и b делался сколь угодно малым. В этом смысле прямая AX будет все "ближе" к прямой b. Но если сколько угодно "близкая" к b прямая образует с (AD) прямой угол, то и сама b также будет образовывать с (AD) прямой угол.

Реализуем эту идею. Для доказательства перпендикулярности (DA) и b достаточно взять любую точку Y прямой b, не совпадающую с A, и доказать, что $|DA| < |DY|$ (?)

Возьмем такую точку Y. Затем в плоскости α (но не на прямой b) возьмем точку Z, такую, что $|AZ| = |AY|$. В силу того, что угол ZAY может быть сколь угодно мал, расстояние между точками Z и Y может быть сколь угодно мало (?).

Так как $(DA) \perp (AZ)$ (?), то $|DA| < |DZ|$. В треугольнике DYZ $|DZ| < |DY| + |YZ|$. Значит, $|DA| < |DY| + |YZ|$. И так как $|YZ|$ сколь угодно мало, то $|DA| < |DY|$ (?), что и требовалось. ▲

1.9. Лучи OA и OB лежат в плоскости α. Луч OC образует с ними равные углы. Какое положение на плоскости α занимает проекция луча OC на эту плоскость?

△ Конфигурация лучей, заданная в условии, нам уже встречалась. Если нарисовать правильную пирамиду $COAB$ с вершиной в точке C, то $\angle COB = \angle COA$. Так как точка C проектируется в центр основания Q, то луч OC проектируется в луч OQ (рис.Р3.9*а*). Луч OQ является биссектрисой угла AOB, так как пирамида правильная. Поэтому можно предположить, что проекцией луча OC будет биссектриса угла AOB не только при угле AOB, равном 60°, но и в общем случае. Если посмотреть на данную конфигурацию как бы сверху, в направлении перпендикуляра из любой точки луча OC на плоскость AOB, то в силу равенства углов COA и COB увидим луч OC как биссектрису угла AOB.

Теперь, когда стало ясно, что нужно доказывать, перейдем к самому доказательству. Пусть точка C_1 — проекция точки C

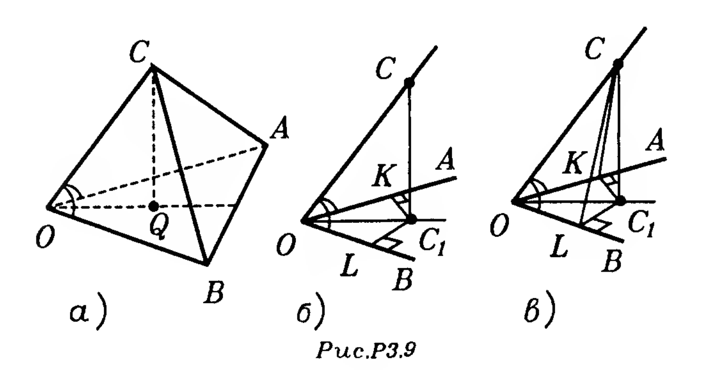


Рис.Р3.9

на плоскость AOB, тогда луч OC_1 — проекция луча OC. Мы хотим доказать, что $\angle C_1OA = \angle C_1OB$. Равенство углов чаще всего доказывается на основании равенства треугольников, проще всего прямоугольных треугольников. Такие легко построить, проведя $C_1K \perp OA$ и $C_1L \perp OB$ (рис.Р3.9*б*). Для доказательства их равенства достаточно получить, что $OK = OL$. Эти отрезки лежат в треугольниках OCK и OCL (рис.Р3.9*в*) Треугольники OCK и OCL также прямоугольные ($CK \perp OA$ по теореме о трех перпендикулярах, аналогично $CL \perp OB$), имеют общую гипотенузу OC и равные углы COK и COL (по условию). Из равенства этих треугольников следует, что $OK = OL$. Теперь, перейдя к треугольникам OKC_1 и OLC_1, получим, что углы KOC_1 и LOC_1 равны, что и требовалось.

В этом доказательстве мы полагали, что точка C_1 находится внутри угла AOB, но может быть и так, что C_1 совпадает с O или C_1 лежит вне угла AOB. Не может быть только такого положения точки C_1, когда она лежит внутри стороны угла или внутри ее продолжения. (Подумайте почему.) Подумайте, какое положение на плоскости AOB будет занимать луч OC_1 в этих случаях.

Подумайте также над тем, как зависит положение точки C_1 на плоскости AOB от величины данных равных углов COA и COB. ▲

1.10. **Прямая b лежит в плоскости α, а прямая a пересекает α в некоторой точке прямой b. Пусть прямая a_1 — проекция a на α. Тогда**

$$\cos\angle(a,b) = \cos\angle(a,a_1)\cdot\cos\angle(a_1,b).$$

Какие следствия отсюда можно получить? Как эту формулу можно обобщить?

△ Пусть прямые a, a_1 и b проходят через точку $O \in \alpha$ (рис.Р3.10*а*). Построим прямоугольные треугольники с заданными углами. Для этого спроектируем любую точку $A \in a$ $(A \neq 0)$ на плоскость α, а затем полученную точку A_1 спроектируем на прямую b и получим точку B (рис.Р3.10*б*). На основании теоремы о ближайшей точке, точка B — проекция точки A на прямую b. (Все это можно было бы обосновать, сославшись на теорему о трех перпендикулярах.)

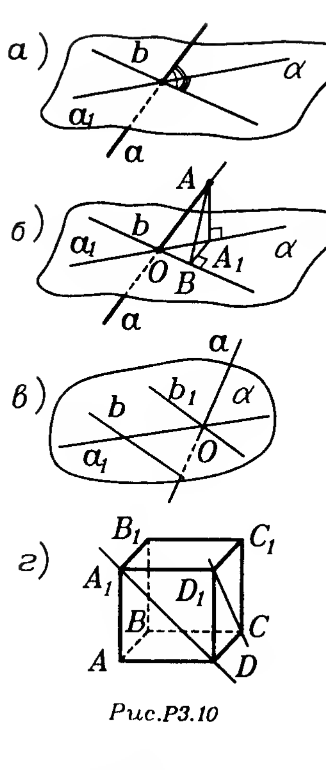


Рис.Р3.10

Теперь

$$\angle(a,b) = \angle AOB,$$

$$\angle(a,a_1) = \angle AOA_1,$$

$$\angle(a_1,b) = \angle A_1OB.$$

Из треугольника AOA_1 имеем:

$$\cos\angle AOA_1 = \frac{OA_1}{OA}. \qquad (а)$$

Из треугольника A_1OB имеем:

$$\cos\angle A_1OB = \frac{OB}{OA_1}. \qquad (б)$$

Из треугольника AOB имеем:

$$\cos\angle AOB = \frac{OB}{OA}.$$

Перемножив равенства (а) и (б), получим:

$$\cos\angle AOA_1 \cdot \cos A_1OB = \frac{OA_1}{OA}\cdot\frac{OB}{OA_1} = \frac{OB}{OA} = \cos\angle AOB,$$

что и требовалось.

Получили формулу, предположив, что прямые a_1 и b не являются перпендикулярными. Проверьте, будет ли верна формула в случае, когда $a_1 \perp b$.

Перейдем к следствиям из формулы. Из нее можно выразить $\cos\angle(a,a_1)$ или $\cos\angle(b,a)$. Особенно важно в дальнейшем выражение для $\cos\angle(a,a_1)$, так как оно даст возможность вычислить угол между прямой и плоскостью.

Как обобщение этой формулы можно рассмотреть случай, когда прямые a и b скрещиваются. Тогда проведем прямую $b_1 \parallel b$ через точку O (рис.Р3.10в). Так как $\angle(a,b) = \angle(a,b_1)$ и $\angle(a_1,b) = \angle(a_1,b_1)$, то формула остается верной и в этом случае. Теперь по этой формуле можно вычислять угол между скрещивающимися прямыми. При удачном выборе плоскос-

ти α искомый угол вычисляется очень быстро. Пусть, например, нам нужно вычислить угол φ между прямыми, проходящими через скрещивающиеся диагонали соседних граней куба (рис.Р3.10г). Согласно полученной формуле

$$\cos\angle((D_1C),\ (A_1D)) = \cos\angle AD_1D\cdot\cos\angle D_1DA\ .$$

(Здесь в качестве плоскости α взята плоскость грани AA_1D_1D.)

Отсюда получаем:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\text{, значит } \angle\varphi = 60^\circ\ .$$

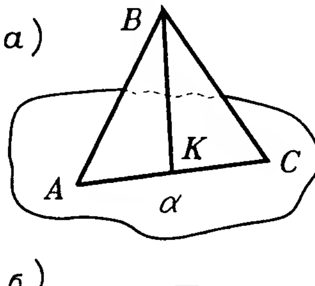
Наконец, эта формула может быть применена для вычисления углов не только между прямыми, но и между лучами. Напомним, что угол между лучами может быть тупым, а угол между прямыми нет. Подумайте, как обосновать применимость этой формулы для вычисления угла между лучами. ▲

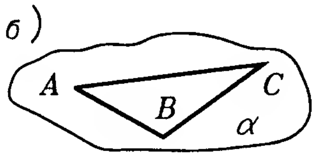
1.11. **Может ли проекция острого угла при проектировании иа некоторую плоскость быть прямым углом?**

△ Посмотрите на рисунок Р3.11*а*. Пусть угол ABC — данный угол. Плоскость α мы возьмем так, что она перпеидикулярна биссектрисе BK этого угла. Она и будет у нас плоскостью проекций.

В таком положении проекцией угла ABC является угол AKC. Угол AKC развернутый, его величина — 180°.

Будем теперь поворачивать угол ABC вокруг (AC). В тот момент, когда точка B окажется на плоскости α (рис.Р3.11*б*), проекцией угла ABC на плоскость α будет он сам, т.е. острый угол. Изменение угла, являющегося проекцией данного, происходило непрерывно от 180° до острого





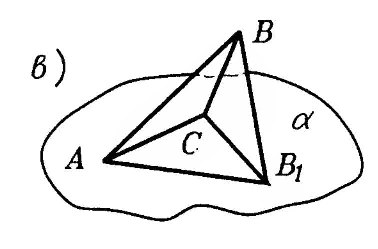


Рис.Р3.11

угла. Значит, в какой-то момент он равняется 90°.

Все это можно увидеть, наблюдая за тенью от циркуля, освещенного настольной лампой.

Любопытно заметить, что мы нигде не воспользовались тем, что проектирование ортогональное. Значит, полученный результат верен для произвольного параллельного проектирования. И это можно увидеть, наблюдая за тенью от циркуля.

Задача может быть решена и вычислением. Посмотрите на рисунок Р3.11*в*. На нем угол ABC данный, $|AB| = |BC|$, точка B_1 — проекция точки B на плоскость α. Считая известными $|AC|$ и величину данного угла, можно вычислить расстояние от B_1 до (AC), при котором $(AB_1) \perp (CB_1)$ (?). ▲

Итак, задача решена. И сразу же возникает похожая задача: "А верно ли это для тупого угла?". Точнее: "Может ли проекцией тупого угла быть прямой угол?".

Решить ее можно теми же способами. Но есть третий, более изящный способ. Попробуйте найти его.

1.12. **Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Вычислите угол, который образуют плоскости AB_1C_1 и A_1B_1C.**

△ Если вычислять этот угол с помощью его линейного угла, то можно встретить определенные трудности при построении линейного угла одного из получившихся двугранных углов. В самом деле, перпендикуляры из точек A и A_1 на общую прямую этих плоскостей не попадут в одну и ту же точку этой прямой (рис.Р3.12)(?). Значит, продолжая все же идти по этому пути, придется проделать еще какие-то построения(?). Это решение можно довести до результата, но красивым его не назовешь.

Рис.Р3.12

Можно выбрать другой двугранный угол между этими плоскостями, и решение окажется более быстрым(?). Другой путь решения основан на том, что угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям.

Действительно, так как

$$(D_1A) \perp (A_1B_1C) \text{ и } (D_1C) \perp (AB_1C_1) \qquad (?),$$

то искомый угол равен углу между (D_1A) и (D_1C). А этот угол можно найти устно(?).

Этот способ вычисления двугранных углов стоит запомнить. Но он не является универсальным, бывает так, что перпендикулярные плоскостям прямые расположены не столь удачно, как здесь (придумайте сами такой случай). ▲

ЗАДАЧИ К §3

1.13. **Даны две параллельные плоскости α и β и произвольная точка A. Расстояния $|A\alpha|$ и $|\alpha\beta|$ известны. Как вычислить расстояние $|A\beta|$? Приведите численные примеры.**

△ Введем обозначения: $|A\alpha| = d_1$, $|\alpha\beta| = d$, $|A\beta| = x$. В задаче, зная величины d и d_1, надо найти x.

Прежде всего заметим, что положение точки A относительно плоскостей α и β может быть различным. Для удобства отметим на рисунке все возможные положения точки A (рис.Р3.13*а*) относительно данных плоскостей на прямой p, перпендикулярной плоскости α (а значит, и плоскости β).

Случаи, когда $A \in \alpha(A_2)$ или $A \in \beta(A_4)$, неинтересны, поэтому рассмотрим положения A_1, A_3, A_5.

Для положения A_1 имеем $|A\beta| = |A\alpha| + |\alpha\beta|$, откуда $x = d_1 + d$.

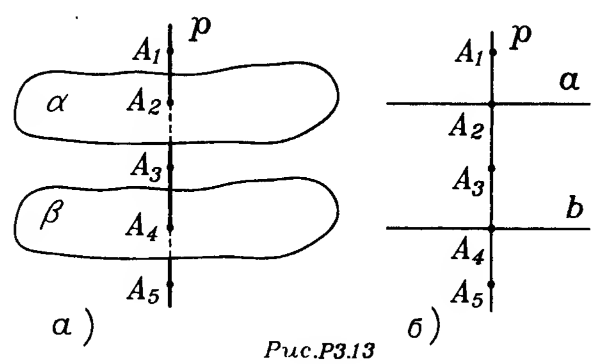


Рис.Р3.13

Для положения A_3 имеем $|A\beta| = |\alpha\beta| - |A\alpha|$, откуда $x = d - d_1$.

Для положения A_5 имеем $|A\beta| = |A\alpha| - |\alpha\beta|$, откуда $x = d_1 - d$.

Таким образом, мы видим, что искомая величина зависит от положения точки A относительно данных плоскостей и задача не имеет однозначного решения.

Заметим, что задачу можно свести к планиметрической, проведя плоскость γ через прямую p. Пусть плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a, а плоскость β — по прямой b. На рисунке Р3.13б, показано соответствующее положение точек и прямых в плоскости γ.

В дальнейшем, при решении задач иногда сводят пространственную задачу к планиметрической: вместо пространственной фигуры рассматривают ее сечение или ее проекцию, причем, на этой плоской картине сохраняются те свойства исходной фигуры, которые позволяют решить задачу. ▲

1.14. **Какой вид имеют сечения куба, перпендикулярные его диагонали? Какое из них имеет наибольшую площадь? Чему она равна в кубе с ребром 1?**

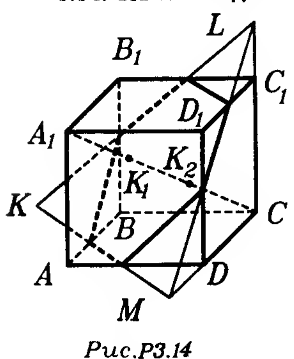


Рис.Р3.14

△ Такие сечения мы уже знаем. Одно из них — плоскостью B_1D_1A. Все остальные будут ему параллельны?

Разберемся сначала с формой этих сечений. Для удобства будем считать, что переменное сечение движется параллельно себе по направлению от вершины A_1 к вершине C. Пусть точка K_1 — точка пересечения диагонали A_1C с плоскостью B_1D_1A. Пересекая отрезок A_1K_1 внутри его, переменное сечение будет треугольником(?). Сразу же заметим, что треугольник в сечении будет получаться и еще на одном участке диагонали — от точки K_2 (точки пересечения диагонали A_1C с (BDC)) до C. На участке K_1K_2 сечение можно легко нарисовать. Эта легкость обеспечивается теоремой о том, что две параллельные плоскости пересекаются третьей по па-

раллельным прямым. Из рисунка Р3.14 видно, что на этом участке сечение является шестиугольником.

Любопытный получился шестиугольник! У него все углы равны(?) и стороны, идущие через одну, равны между собой (?). Изучение свойств такого шестиугольника — прекрасное упражнение в геометрии.

Однако вернемся к нашей задаче. Следующий вопрос — о наибольшей площади такого сечения. Прежде чем писать для нее формулу и вычислять ее наибольшее значение, попытаемся предсказать результат.

Представьте себе, что вы разглядываете это переменное сечение в направлении диагонали A_1C от A_1 к C. А еще лучше — возьмите кубик и нарисуйте на нем такие сечения. После того, как оно пройдет точку K_1, оно станет, как мы уже знаем, шестиугольником. Некоторое время после прохождения точки K_1 этот шестиугольник будет расширяться, и мы будем видеть, что его последующие положения содержат предыдущие. Значит, его площадь будет какое-то время увеличиваться(?). До каких же пор?

Теперь представьте себе второго наблюдателя, который смотрит в направлении диагонали CA_1 на переменное сечение, движущееся от C к A_1. В силу симметрии ситуации он также будет видеть сечение, увеличивающееся по площади. Когда эти два расширяющиеся сечения встретятся, тогда и получится сечение с наибольшей площадью. Где же произойдет эта встреча? Из соображений симметрии заключаем, что это произойдет в середине отрезка A_1C.

Эти рассуждения подсказали нам ответ. Теперь перейдем к его обоснованию. Вычислить площадь шестиугольника произвольной формы непросто. Поэтому сделаем так. Три стороны этого сечения, лежащие в гранях $ABCD$, BB_1C_1C, CC_1D_1D, продолжим до пересечения с прямыми BC, CC_1, CD в точках K, L, M соответственно. (А почему в результате получится треугольник KLM ?). Тогда S — площадь шестиугольника можно найти как разность S_1 — площади треугольника KLM — и $3S_2$, где S_2 — площадь малого треугольника в плоскости сечения при вершинах K, L, M. (А почему эти три площади равны?) Обозначим $|C_1L| = x$. Тогда

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2, \qquad (?)$$

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+x)^2 \qquad (?)$$

и

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2x^2 + 2x + 1).$$

Из свойств полученного квадратного трехчлена, учитывая, что $0 \le x \le 1$ (?), можно получить ответы на все вопросы к задаче. Мы знаем, что кроме шестиугольного сечения, возможно и треугольное. До конца задачу доведите самостоятельно. ▲

1.15. **Плоскости α и β перпендикулярны. AA_1 — перпендикуляр на α из точки A, BB_1 — перпендикуляр на β из точки B. Можно ли установить связь между величинами $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|AB|$, $|A_1B_1|$?**

△ Установить связь между величинами — значит, в конечном итоге найти формулу, в которой были бы все эти величины да еще, возможно, некоторые постоянные. Если вы нашли формулу, в которой, кроме этих величин, есть и другие, то останавливаться нельзя. Лишние величины надо постараться убрать из формулы. Если это не получается, то мы приходим к мысли о том, что связь между данными величинами однозначно установить невозможно. В самом деле, если в формуле присутствует еще хотя бы одна "лишняя" величина, то ей можно придавать различные численные значения и получать отсюда разные формулы, связывающие данные величины. Но на один вопрос еще надо постараться ответить: "Это только нам не удалось убрать из формулы "лишнюю" величину или это в принципе невозможно?" Для того, чтобы ответить на такой вопрос, требуется дополнительное исследование.

Перед тем, как перейти к непосредственному решению задачи, заметим следующее. Вопрос о связи величин между собой можно несколько видоизменить. Можно искать не формулу, связывающую данные величины между собой, а любую из них, считая, что все остальные известны.

Обратите теперь внимание на то, как поставлен вопрос к задаче. Его форма не категорическая, а предположительная: "Можно ли...?" (Бывает и так: "Можете ли вы...?". Тут есть оттенки. Какие?) Когда вас в математической задаче спрашивают: "А можно ли сделать то-то и то-то?" — лучше начинать свое решение с самых простых случаев. Если в этих, более прос-

тых случаях ничего не выходит, то, видимо, и в более общей ситуации не получится. А если в простых случаях результат получается, то можно переходить и к более общим случаям. (Заметим, что в иных задачах с категорической формулировкой целесообразно действовать так же.)

В данной задаче ничего не говорится о том, где лежат точки A и B. Возьмем $A \in \beta$ и $B \in \alpha$. Обозначим

$$|AA_1| = d_1,\ |BB_1| = d_2.$$

Будем считать, что $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$.

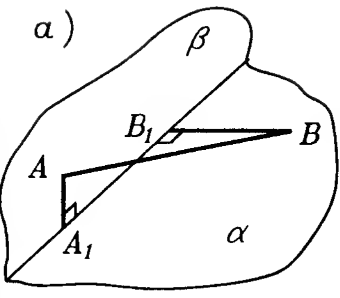
Если среди этих расстояний есть нули, то ответ очевиден и задачи, как таковой, нет(?). (Упрощая условие, надо все же сохранять содержание задачи.)

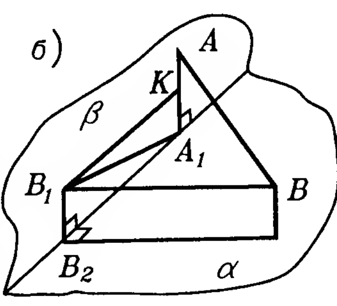
Если посмотреть на рисунок Р3.15*а*, то ответ очевиден. Расстояние $|A_1B_1|$ можно найти из пространственной теоремы Пифагора(?), значит, связь между величинами в этом случае есть.

Возьмем случай сложнее: точку A оставим в плоскости β, а точку B уберем из плоскости α (рис.Р3.15*б*). Пусть на этом рисунке

$$|B_1B_2| = x,\ |A_1B_2| = y.$$

Тогда





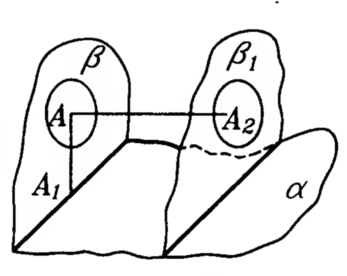


Рис.Р3.15

$$\begin{cases} |A_1B_1| = x^2 + y^2 \\ d^2 = |AB|^2 = (d_1 - x)^2 + y^2 + d_2^2. \end{cases} \qquad (?)$$

Получилась система двух уравнений с тремя неизвестными. Как правило, однозначно найти решение такой системы невозможно. В этом можно убедиться, к примеру, таким способом. Из полученной системы вытекает равенство:

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1x + |A_1B_1|^2. \qquad (?)$$

Замечаем, что $|A_1B_1|^2$ зависит от x линейно, следовательно, выразить $|A_1B_1|^2$ через данные величины невозможно.

Теперь ясно, что и в более общем случае, когда $A \notin \beta$, установить связь между этими величинами не удастся (?).

Попытаемся разобраться в заданной ситуации подробнее: а почему такой связи нет? Какова геометрическая природа этого явления? (К отысканию геометрической сути задачи нас побуждает и чисто алгебраическое решение. Мы пришли к ответу, составив некую систему и проанализировав ее решение. А нельзя ли к тому же ответу прийти чисто геометрическим методом, т.е. рассматривая фигуры в пространстве?) Вернемся к рисунку Р3.15*а*. Зафиксируем точку A в плоскости β и поставим такой вопрос: "А где может находиться, исходя из условий задачи, точка B?"Так как $|B\beta| = d_2 \neq 0$, то B находится на плоскости, параллельной плоскости β, удаленной от β на расстояние d_2. Таких плоскостей две, возьмем одну из них β_1 (рис.Р3.15в). Так как точка B находится на фиксированном расстоянии от A, то она будет находиться на фиксированном расстоянии и от точки A_2— проекции точки A на плоскость β_1. Но это означает, что она находится на некоторой окружности в плоскости β с центром в точке A_2. Но тогда точка B_1 — проекция точки B на плоскость β — будет находиться на окружности с центром в точке A (?). А теперь видно, что $|A_1B_1|$ не определяется однозначно. (И, кстати, хорошо видно, в каких границах находится $|A_1B_1|$ (?)).

Теперь, когда задача решена, стоит задуматься: а почему же нам не удалось найти $|A_1B_1|$ в ситуации, изображенной на рисунке? И еще: найти $|A_1B_1|$, т.е. установить связь между данными величинами, оказалось невозможно. Можно ли ввести в рассмотрение другие величины, такие, что для нового набора величин (данных и вновь введенных) можно установить связь между ними? ▲

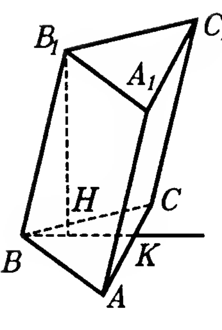


Рис.Р3.16

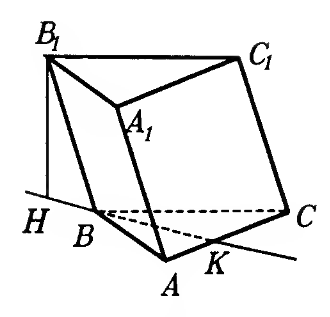


Рис.Р3.17

1.16. **В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ каждое ребро основания равно 1. Ребро BB_1, равное 2, образует равные углы с ребрами BA и BC. Расстояние от B_1 до (ABC) равно 1. Вычислите расстояние между основаниями призмы.**

△ Прежде всего обратим внимание на то, что надо найти расстояние между основаниями призмы, т.е. между фигурами, лежащими в параллельных плоскостях, а не между самими параллельными плоскостями. Для такого случая естественно вычислить расстояние между параллельными плоскостями и расстояние между одним основанием призмы — возьмем ABC — и проекцией основания $A_1B_1C_1$ на (ABC). Но расстояние между плоскостями дано, значит, осталось вычислить второе расстояние, и задача будет решена.

Для нахождения второго расстояния необходимо спроектировать верхнее основание на плоскость нижнего. Для этого спроектируем вершины треугольника $A_1B_1C_1$. Начнем с вершины B_1 — это удобнее всего. Так как $\angle B_1BA = \angle B_1BC$, она проектируется на прямую, проходящую через биссектрису BK угла ABC (?). Но нам этого мало(?). Точка H — проекция точки B_1 — лежит на прямой BK, а точнее? На луче BK? На его продолжении? На отрезке BK? Одно ясно сразу — она лежит не в точке B (?). Однозначно ответить на вопрос, где находится точка H — на луче BK или на его продолжении, исходя из условий задачи, невозможно(?). Может быть случай, показанный на рисунке Р3.16, а может быть случай, показанный на рисунке Р3.17. Все зависит от вида призмы.

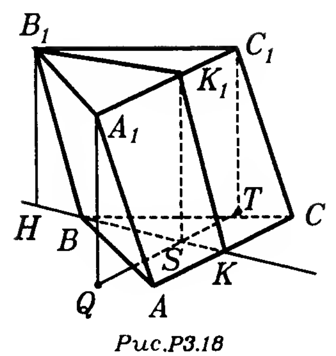


Рис.Р3.18

Решим сначала задачу, когда точка H лежит на луче BK. Выясним, лежит ли она на отрезке BK. Вычисляем $|BK|$ и $|BH|$, а затем сравниваем их между собой:

$$|BK| = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \ |BH| = \sqrt{3},$$

поэтому точка H лежит вне треугольника ABC. Теперь проекции точек A_1 и C_1 легко построить(?). Расстояние между треугольником ABC и проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ равно $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (?). Тогда искомое расстояние равно $\frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Перейдем теперь к ситуации, изображенной на рисунке. Пусть H — проекция точки B_1 — находится на продолжении луча BK, причем, как и в предыдущем случае, $|BH| = \sqrt{3}$. Теперь самое важное — установить положение проекций точек A_1 и C_1 по отношению к треугольнику, а еще точнее — выяснить, как расположена по отношению к этому треугольнику прямая QT, являющаяся проекцией прямой A_1C_1 на (ABC) (точка Q — проекция точки A_1, а точка T — проекция точки C_1). Ясно (рис.Р3.18), что $(QT) \parallel (AC)$ (?).

Поэтому найдем $|KS|$.

$$|KS| = |KB| - |BS|.$$

$$|BS| = |HS| - |HB| = |B_1K_1| - |HB|$$

(точка K_1 — середина ребра A_1C_1, точка S — точка пересечения (QT) и (BK)). Обоснуйте приведенные выкладки. Подставим числовые данные и получим:

$$|BS| = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Расстояние оказалось отрицательным! Но это невозможно! Почему же у нас так получилось?

Все дело в рисунке Р3.18. Этот рисунок неверен! На нем (QT) пересекает треугольник ABC. Но именно это нам и нужно выяснить!

Теперь мы знаем, что такого рисунка быть не может, а значит, (QT) проходит вне треугольника ABC. (Если быть совсем точным, то надо еще объяснить, почему (QT) не проходит через вершину B). Значит, на самом деле верен рисунок Р3.19. Но тогда расстояние между треугольниками ABC и HQT равно $|BS|$ (?), и $|BS| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (?). Тогда искомое расстояние равно $\frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Любопытно, что в обоих случаях расстояние оказалось одним и тем же.

Итак, ответ: расстояние между основаниями призмы равно $\frac{1}{2}\sqrt{7}$.

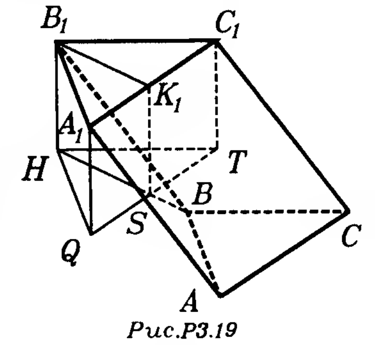


Рис.Р3.19

Ответ получен, но есть еще над чем подумать. Почему в двух разных случаях ответ оказался одинаковым? Может быть, это совпадение обусловлено числовыми данными, а может быть, дело в другом? И еще, вычислив $|BS|$ во втором случае и получив, что $|BS| = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, мы оставили и выкладки, и рисунок. Однако, если бы мы их продолжили и вычислили $|KS|$, то увидели бы, что результат получился тот же, что и на новом рисунке. Как вы это объясните? ▲

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧИ К §1

Дополняем теорию

1.1. Прямые a и b параллельны. Точка O не лежит на этих прямых. Плоскость α проходит через O и a, плоскость β

проходит через O и b. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. Докажите, что прямая c параллельна данным прямым.

1.2. Прямая a лежит в плоскости α. Прямая b параллельна прямой a и имеет общую точку с плоскостью α. Докажите, что и прямая b лежит в плоскости α.

1.3. Докажите, что в параллелепипеде: а) для каждого ребра есть три, ему параллельных; б) каждое его сечение, проходящее через два параллельных ребра, является параллелограммом; в) для каждой диагонали грани найдется ей параллельная диагональ в другой грани; г) прямая, соединяющая центры противоположных граней, параллельна его ребру; д) все его диагонали имеют общую точку.

1.4. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде равны: а) апофемы; б) углы между боковыми гранями и основанием; в) углы между соседними боковыми гранями.

Обобщите эти утвердения.

1.5. Докажите, что плоскость, проходящая через боковое ребро правильной треугольной пирамиды и центр ее основания, является биссектральной для соответствующего двугранного угла, то есть делит зтот угол пополам.

Обобщите это утверждение.

Рисуем

1.6. Пусть $PABC$ — тетраэдр. Нарисуйте его сечение плоскостью: а) APX, где точка X лежит внутри ребра BC; б) PXY, где точка X лежит внутри ребра AB, а точка Y — внутри ребра AC; в) AXY, где точка X лежит внутри ребра PB, а точка Y — внутри ребра BC; г) XYZ, где точка X лежит внутри ребра AC, точка Y — внутри ребра CB, точка Z — внутри ребра CP.

1.7. Нарисуйте сечение тетраэдра $PABC$ плоскостью XYZ, если: а) X — точка внутри PA, Y — точка внутри PC, Z — точка внутри AB; б) X — точка внутри PB, Y — точка внутри AC, Z — точка внутри AB; в) X — точка внутри PA, Y — точка внутри PB, Z — точка внутри BC; г) X — точка внутри AB, Y — точка внутри PC, Z — точка внутри треугольника ABC.

1.8. $PABC$ — тетраэдр. Нарисуйте прямую: а) проходящую через A, скрещивающуюся с прямой PB и пересекающую хотя бы одно ребро тетраэдра; б) проходящую через A, скрещивающуюся с прямой PB и параллельную хотя бы одному ребру тетраэдра; в) проходящую через A и скрещивающуюся с прямыми, проходящими через три ребра тетраэдра; г) скрещивающуюся со всеми прямыми, проходящими через ребра тетраэдра.

1.9. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр, K — центр грани BCD, L — центр грани ACD, M — центр грани ABD, N — центр грани ABC. Нарисуйте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через: а) AD и DN; б) AC и AK; в) AC и CM; г) DN и BL.

1.10. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр. Нарисуйте прямую, которая проходит: а) через точку D и перпендикулярна прямой AC; б) через точку C и перпендикулярна прямой DB; в) через точку K — середину отрезка BC — и перпендикулярна прямой DA; г) перпендикулярно прямым DC и AB.

1.11. Нарисуйте четырехугольную пирамиду $PABCD$, основанием которой является произвольный четырехугольник $ABCD$. Нарисуйте прямую, по которой пересекаются плоскости: а) PAC и PBD; б) PAD и PBC; в) PAB и PCD. Как изменится рисунок, если основанием пирамиды будет параллелограмм?

1.12. Дана четырехугольная пирамида $PABCD$. Нарисуйте ее сечение плоскостью: а) APQ, где точка Q — точка пересечения диагоналей основания; б) ABK, где точка K лежит внутри ребра PD; в) AKL, где точка K лежит внутри ребра PD, точка L лежит внутри ребра PC; г) KLM, где точка K лежит внутри ребра PA, точка L лежит внутри ребра PD, точка M лежит внутри ребра PC; д) KLM, где точка K лежит внутри ребра PB, точка L лежит внутри ребра PD, точка M лежит внутри основания; е) KLM, где точка D лежит внутри отрезка AK, точка P лежит внутри отрезка BL, точка M лежит внутри отрезка AB; ж) KLM, где точка D лежит внутри отрезка AK, точка P лежит внутри отрезка BL, точка A лежит внутри отрезка MB.

1.13. $PABCD$ — правильная пирамида, Q — центр ее основания. Нарисуйте прямую, проходящую через точку P и перпендикулярную прямой: а) AD; б) CD; в) AC; г) BD; д) PQ. Нарисуйте прямую, проходящую через K — середину ребра AD — перпендикулярно PQ.

1.14. Дана правильная треугольная призма. Нарисуйте ее различные сечения плоскостью, проходящей через: а) сторону основания; б) боковое ребро; в) диагональ боковой грани; г) середины двух боковых ребер; д) середины двух ребер одного основания; е) середину бокового ребра и середину ребра основания.

1.15. Дан прямоугольный параллелепипед. Нарисуйте его различные сечения плоскостью, которая проходит через: а) боковое ребро; б) диагональ основания; в) середины двух соседних сторон боковой грани; г) диагональ параллелепипеда.

1.16. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте сечение куба плоскостью, которая проходит через: а) точку A_1, середину ребра AB, точку C_1 и середину ребра BC; б) три точки внутри ребер B_1C_1, C_1D_1, CC_1; в) середины ребер AD, BC, B_1C_1, A_1D_1; г) точку D_1, точку B и середины ребер AA_1 и CC_1; д) середины ребер AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA; е) отрезки A_1D_1 и BC; ж) отрезки AB_1 и C_1D; з) середины ребер A_1B_1, B_1C_1 и отрезок AC; и) точку A и середины ребер B_1C_1 и C_1D_1.

1.17. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте прямую, которая проходит: а) через точку C и перпендикулярна прямой C_1D; б) через точку C_1 и перпендикулярна прямой BD; в) через точку B_1 и перпендикулярна прямой AC; г) через точку B и перпендикулярна прямой B_1D.

1.18. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точка K — середина ребра AA_1. Нарисуйте прямые, проходящие через точку K и пересекающие прямые: а) CC_1 и B_1D_1; б) BC и D_1C_1; в) DC и B_1C_1; г) BD и A_1C_1.

1.19. Нарисуйте линейный угол двугранного угла, образованного: а) гранями правильного тетраэдра; б) боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды; в) боковыми гранями правильной треугольной пирамиды; г) боковой гранью и основанием правильной четырехугольной пирамиды; д) соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды; е) противоположными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды.

Планируем

1.20. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — центр грани PAC, точка L — центр грани PBC, точка M — середина ребра PB, точка N — середина ребра BC. Как вычислить расстояния: PQ, QM, QK, AL, KL, MN, если известна длина ребра тетраэдра?

1.21. Пусть $PABC$ правильный тетраэдр, точка M — середина ребра PB, точка L — середина ребра AC, точка K — середина ребра BC, точка N — середина ребра PA, точка O — середина ребра PC. Как найти длину общего отрезка таких сечений тетраэдра: а) AMC и PLB; б) PKA и PLB; в) PLB и CMN; г) PLB

и BNO; д) PLB и MNO; е) ACM и BLO; ж) AKO и BNL; з) CMN и KOL; и) KMN и AMC?

1.22. Дана правильная треугольная пирамида. Как найти угол между: а) боковой гранью и основанием; б) соседними боковыми гранями? Ребра пирамиды известны. Обобщите эту задачу.

Представляем

1.23. Пусть $PABC$ — тетраэдр, точка K — середина ребра PA, точка L — середина ребра AB, точка M — середина ребра BC, точка N — середина ребра PC, точка O лежит на ребре PB. Как расположены прямые: а) AP и BC; б) KL и MO; в) KL и BC; г) KN и LO; д) AO и KL; е) KM и CO; ж) NO и CL; з) MO и PC; и) KN и LM?

1.24. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб, точка K_1 — середина ребра A_1B_1, точка K_2 — середина ребра B_1C_1, точка K_3 — середина ребра BB_1, точка K_4 — середина ребра CC_1, точка K_5 — середина ребра DD_1, точка K_6 — середина ребра AB, точка K_7 — середина ребра AD. Как расположены прямые:

а) K_1K_2 и K_3K_4; б) K_1K_3 и K_6K_7; в) K_1K_5 и K_2K_4;

г) K_3K_4 и K_2K_7; д) K_1K_5 и K_4K_6; е) B_1D и K_2K_7?

Оцениваем

1.25. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. Точка K удалена от вершин A и B на расстояние 2. При каком положении точки K расстояние AC достигает граничных значений?

1.26. В тетраэдре все ребра, кроме одного, имеют длину 1. В каких границах лежит расстояние между серединами его противоположных ребер?

1.27. На ребре PC правильного тетраэдра $PABC$ с ребром 1 выбрана точка X. При каком положении точки X площадь треугольника ABX достигает граничных значений?

Сделаем

1.28. Может ли сечение правильного тетраэдра быть:

а) равнобедренным, но не правильным треугольником;

б) тупоугольным треугольником;

в) прямоугольным треугольником;

г) квадратом;

д) прямоугольником, но не квадратом?

1.29. Можно ли в сечении правильной четырехугольной пирамиды получить: а) равносторонний треугольник; б) трапецию; в) правильный пятиугольник; г) шестиугольник?

1.30. Точка K — середина ребра PA тетраэдра $PABC$, точка L — середина ребра BC. Докажите, что $KL < 0{,}5\ (PB + AC)$.

Исследуем

1.31. Два отрезка AB и CD не лежат в одной плоскости. Как вычислить расстояние между их серединами? (При этом никакие расстояния до этих середин не являются известными.) Выведите формулу для искомого расстояния. Будет ли верна эта формула, если данные отрезки лежат в одной плоскости? Как обобщить полученные результаты?

Поступаем в ВУЗ

1.32. Четыре прямые расположены в пространстве так, что каждые две из них пересекаются и никакие три не имеют общей точки. Докажите, что эти прямые лежат в одной плоскости.

1.33. Из концов отрезка $AB = a$ исходят два луча $AX \perp AB$ и $BY \perp AB$, причем $AX \perp BY$. На луче AX отложен отрезок $AP = u$, а на луче BY — отрезок $BQ = v$ так, что $2uv = a^2$. Докажите, что расстояние от середины отрезка AB до прямой PQ равняется $0{,}5a$.

Переключаемся

1.34. Самолет летит по прямой с постоянной скоростью. В любой момент времени вы можете определить расстояние до него. Как найти его скорость?

ЗАДАЧИ К §2

Дополняем теорию

1.35. Пусть из точки на плоскость проведены перпендикуляр и две равные наклонные. Докажите, что равны: а) проекции этих наклонных; б) углы, которые они образуют с плоскостью.

Докажите, что верны и обратные утверждения.

1.36. Докажите, что параллельные прямые составляют с одной и той же плоскостью равные углы.

1.37. Докажите, что боковое ребро правильной призмы перпендикулярно ее основанию.

1.38. Докажите, что высота правильной пирамиды проектируется в центр ее основания.

1.39. Из одной и той же вершины куба выходят диагональ и три ребра. Докажите, что эта диагональ куба перпендикулярна плоскости, проходящей через концы этих ребер.

1.40. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде диагонали равны.

1.41. Докажите, что точка, лежащая на прямой, перпендикулярной плоскости некоторого многоугольника и проходящей через центр его описанной окружности, равноудалена от его вершин. Докажите и обратное утверждение.

1.42. Докажите, что угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям.

1.43. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием BC. Через вершину A проведена прямая, перпендикулярная его плоскости. Точка X — переменная точка этой прямой, отличная от A. Докажите, что угол BXC меньше угла BAC.

1.44. Докажите, что в правильной N-угольной пирамиде сумма всех плоских углов при ее вершине меньше 360 градусов.

1.45. Докажите, что все перпендикуляры, проведенные к данной прямой через данную ее точку, лежат в одной плоскости.

1.46. Биссектральной плоскостью двугранного угла называется плоскость, которая делит его на два равных по величине двугранных угла, а биссектором двугранного угла называется та часть биссектральной плоскости, которая лежит в данном двугранном угле. Докажите, что биссектор угла является множеством точек угла, равноудаленных от его граней.

1.47. Докажите, что существует точка, равноудаленная от: а) всех граней тетраэдра; б) плоскостей всех граней правильной пирамиды.

Рисуем

1.48. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра PA. Нарисуйте перпендикуляры: а) из K на плоскость ABC ; б) из K на плоскость BCP; в) из Q на плоскость APC; г) из Q на плоскость BKC.

1.49. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Нарисуйте проекцию: а) PA на плоскость ABC; б) PA на плоскость PBC; в) AC на плоскость PAB; г) треугольника PAC на плоскость ABC

1.50. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра PC. Нарисуйте его сечение плоскостью, проходящей через: а) Q перпендикулярно прямой AC; б) Q перпендикулярно прямой PB; в) K

перпендикулярно прямой PC; г) K перпендикулярно прямой AB; д) K перпендикулярно прямой PB; е) K перпендикулярно прямой PQ; ж) P перпендикулярно прямой BK.

1.51. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка K — середина ребра AC. Нарисуйте его сечение плоскостью, проходящей через: а) K перпендикулярно прямой PB; б) K перпендикулярно прямой BC; в) B перпендикулярно прямой PK.

1.52. Дан правильный тетраэдр. Нарисуйте линейные углы двугранных углов, заданных: а) его боковой гранью и основанием; б) его боковыми гранями; в) двумя плоскостями, проходящими через его ребро и центр противоположной грани.

1.53. Дана правильная треугольная пирамида. Нарисуйте ее сечение плоскостью, проходящей: а) через вершину перпендикулярно ребру основания; б) через вершину основания перпендикулярно боковому ребру; в) через середину ее высоты перпендикулярно этой высоте.

1.54. Дана правильная треугольная пирамида. Нарисуйте ее сечение плоскостью, перпендикулярной основанию и проходящей через: а) боковое ребро; б) медиану основания; в) апофему пирамиды; г) высоту пирамиды; д) вершину основания; е) середину ребра основания; ж) некоторую точку внутри ребра основания.

1.55. $PABC$ — прямоугольный тетраэдр (у него все плоские углы при вершине P прямые). Нарисуйте перпендикуляр: а) из середины ребра BC на противоположные грани; б) из внутренней точки ребра AC на плоскость PBC; в) из внутренней точки грани ABC на плоскость PAC.

1.56. $PABC$ — прямоугольный тетраэдр. Нарисуйте проекцию: а) PA на плоскость ABC; б) PA на плоскость PBC; в) треугольника PAC на плоскость ABC; г) треугольника PAC на плоскость ABP; д) AC на плоскость PAB; е) AC на плоскость PBC; ж) треугольника PAB на плоскость PBC; з) треугольника PBC на плоскость ABC; и) треугольника ABC на плоскость PAB.

1.57. В пирамиде $PABC$ ребро PB перпендикулярно плоскости ABC. $PA=PC=AC$. Нарисуйте ее сечение плоскостью, проходящей через: а) P и перпендикулярной AC; б) B и перпендикулярной PA; в) A и перпендикулярной BC.

1.58. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ с равными ребрами точка Q — центр основания, точка K — середина ребра AB. Нарисуйте перпендикуляры: а) из A на плоскость BPD; б) из K на плоскость APC; в) из K на плоскость CPD; г) из Q на

плоскость APB; д) из D на плоскость BCP; е) из K на плоскость APD; ж) из C на плоскость APD.

1.59. Пусть $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Нарисуйте проекцию: а) PA на плоскость ABC; б) PA на плоскость PBD; в) AD на плоскость PAC; г) треугольника PBC на плоскость ABC; д) треугольника PAB на плоскость PBD; е) треугольника PBD на плоскость PAC.

1.60. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ все ребра равны. Нарисуйте ее сечение плоскостью, проходящей через P и перпендикулярной прямой: а) AD; б) CD; в) AC; г) BD; д) PA. Нарисуйте ее сечение плоскостью: е) проходящей через середину CD перпендикулярно прямой CD; ж) проходящей через центр основания Q перпендикулярно прямой AC; з) середину PQ перпендикулярно PQ.

1.61. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$. Нарисуйте ее сечение плоскостью, проходящей через: а) вершину P и перпендикулярной основанию; б) ребро PA и перпендикулярной плоскости PBD; в) высоту пирамиды PQ и перпендикулярной плоскости CPD ; г) диагональ основания перпендикулярно его плоскости. Нарисуйте ее сечение плоскостью, перпендикулярной: д) двум противоположным граням; е) двум соседним граням.

1.62. Через точку A, лежащую в плоскости α, проведен перпендикуляр AB к плоскости α. Нарисуйте самый короткий отрезок BX и самый длинный отрезок BY, если точки X и Y принадлежат таким фигурам плоскости α : а) прямой; б) отрезку; в) окружности; г) кругу; д) равностороннему треугольнику, центр которого находится в точке A; е) квадрату, центр которого находится в точке A.

1.63. Пусть $ABCD$ — квадрат, точка K лежит внутри стороны CD, прямая KL перпендикулярна плоскости ABC. Нарисуйте перпендикуляры из L на прямые, проходящие через стороны квадрата, и на прямые, проходящие через его диагонали.

1.64. Пусть $ABCD$ — ромб с острым углом 60 градусов. Нарисуйте перпендикуляры из точки P на прямые, проходящие через стороны и диагонали ромба, если: а) прямая PD перпендикулярна плоскости ABC; б) прямая PA перпендикулярна плоскости ABC.

1.65. Нарисуйте четырехугольную пирамиду, в которой основанием является квадрат, а ребро перпендикулярно осно-

ванию. Нарисуйте самый короткий отрезок, соединяющий: а) D с прямой AP; б) D с прямой CP; в) P с прямой AC.

1.66. Пусть $PABCD$ — четырехугольная пирамида с равны-ми ребрами. Нарисуйте самый короткий отрезок, соединяю-щий точку A с: а) сечением BDX этой пирамиды, где точка X ле-жит внутри ребра PC; б) гранью PCD; в) сечением PBD.

П л а н и р у е м

1.67. Пусть даны перпендикуляр из точки на плоскость и наклонная из той же точки на ту же плоскость. а) Пусть из-вестны их длины. Как вычислить длину проекции? Как вычис-лить угол между наклонной и плоскостью? б) Пусть известна длина наклонной и ее угол с плоскостью. Как вычислить длину перпендикуляра и проекции? в) Пусть известны длина перпен-дикуляра и угол между ним и наклонной. Как вычислить угол между наклонной и плоскостью, а также проекцию наклонной?

1.68. Из данной точки на данную плоскость проведены перпендикуляр и две равные наклонные. Известны длины пер-пендикуляра, наклониых и угол между наклонными. Как найти угол между их проекциями?

1.69. Как вычислить высоту правильной треугольной пира-миды, у которой известны: а) боковое ребро и ребро основа-ния; в) боковое ребро и угол при вершине; в) ребро основания и двугранный угол при основании; г) боковое ребро и двугран-ный угол при боковом ребре?

1.70. Пусть известна высота правильной треугольной пи-рамиды. Как вычислить: а) боковое ребро, если известно ребро основания; б) ребро основания, если известио боковое ребро; в) ребро основания, если известен угол между боковым ребром и основаннем; г) боковое ребро, если известен плоский угол при вершине; д) ребро основания, если известен двугранный угол при боковом ребре; е) боковое ребро, если известен дву-гранный угол при ребре основания?

1.71. В тетраэдре $PABC$ ребро PB — его высота и $AB=BC$. Как найти неизвестные элементы тетраэдра (ребра, двугранные углы), если известны: а) ребра PB, AB и угол ABC; б) ребра PB, AB, AC; в) ребра PB,AB и угол APC; г) ребра PB, PA, AC; д) ребра PB,PA и угол APC; е) ребра PB, AC и угол APC?

1.72. Как вычислить высоту правильной четырехугольной пирамиды, у которой известны: а) все ребра; б) боковое ребро и плоский угол при вершине; в) ребро основания и угол боко-вого ребра к плоскости основания; г) ребро основания и дву-гранный угол при этом ребре; д) боковое ребро и двугранный угол при этом ребре; е) ребро основания и двугранный угол при боковом ребре; ж) боковое ребро и двугранный угол при

основании; з) боковое ребро и двугранный угол между противоположными боковыми гранями?

Представляем

1.73. Сколько пар взаимно перпендикулярных плоскостей можно насчитать в: а) прямоугольном параллелепипеде; б) прямоугольном тетраэдре; в) правильной четырехугольной пирамиде, в которой проведены диагонали основания?

1.74. Точки A и B лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях вне их общей прямой. Сколько существует точек X на их общей прямой таких, что треугольник AXB — прямоугольный с прямым углом при вершине X?

Оцениваем

1.75. В правильном тетраэдре $PABC$ точка K — переменная точка ребра PB. При каком положении точки K достигает граничных значений расстояние: а) от K до прямой AC; б) от K до плоскости APC?

1.76. В правильном тетраэдре $PABC$ через PX, где X — переменная точка ребра BC, проводится плоскость, перпендикулярная основанию. При каком положении точки X достигает граничных значений площадь сечения тетраэдра этой плоскостью?

1.77. В правильной треугольной пирамиде $PABC$ точка X — переменная точка ребра PB. Когда достигает граничных значений площадь проекции треугольника AXC: а) на плоскость ABC; б) на плоскость PAC?

Сделаем

1.78. Через центры двух граней правильного тетраэдра проведены прямые, перпендикулярные этим граням. Определите взаимное расположение этих прямых. Проведите еще одну такую же прямую. Как она будет расположена по отношению к первым двум? Как обобщить полученный результат?

1.79. Имеется N плоскостей. Через данную точку проводятся прямые, перпендикулярные всем этим плоскостям. Докажите, что все эти прямые лежат в одной плоскости, если: а) все плоскости пересекаются по одной и той же прямой; б) каждые две плоскости пересекаются, причем прямые пересечения параллельны между собой.

Исследуем

1.80. Из каких трех утверждений можно вывести четвертое: 1) $a \perp \alpha$; 2) $b \perp \beta$; 3) $a \perp B$; 4) $\alpha \perp \beta$.

1.81. Плоскости α и β пересекаются, точка A лежит в плоскости α, точка B лежит в плоскости β, AA_1 — перпенди-

куляр на плоскость β, BB_1 — перпендикуляр на плоскость α. Можно ли установить связь между величинами AB, AA_1, BB_1, A_1B_1?

Поступаем в ВУЗ

1.82. Прямоугольные проекции четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со стороной 2. Одна из его сторон равна $\sqrt{5}$. Вычислите его периметр.

Ответ: $2(\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

1.83. Круг радиуса R и равносторонний треугольник со стороной $R\sqrt{3}$ лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Одна из сторон треугольника лежит в плоскости круга. Отрезок, соединяющий центры круга и треугольника, образует с их плоскостями углы, равные $\frac{\pi}{6}$. Найдите длину части стороны треугольника, лежащей внутри круга.

Ответ: $R\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$.

1.84. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проведена плоскость, наклоненная к катетам треугольника под углами α и β соответственно. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью треугольника.

Ответ: $arcsin\sqrt{sin^2\alpha+sin^2\beta}$.

1.85. Из точки ребра двугранного угла, равного α, в одной из его граней проведен отрезок, составляющий с этим ребром угол β. Какой угол образует отрезок с другой гранью?

Ответ: $arcsin(sin\alpha\cdot sin\beta)$.

1.86. На одной из граней острого двугранного угла лежит квадрат. Одна из сторон квадрата образует угол α с ребром двугранного угла. Определите величины углов между диагоналями квадрата и другой гранью двугранного угла.

Ответ: $arcsin\left|sin\ \varphi\cdot sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|$ и $arcsin\left(sin\ \varphi\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)$.

1.87. Катеты AB и AC прямоугольного треугольника ABC расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ. Катет AB образует с ребром двугранно-

го угла острый угол α. Определите угол между этим ребром и катетом AC.

Ответ: $arcctg(tg\ \alpha \cdot cos\ \varphi)$.

1.88. На ребре двугранного угла 120 градусов взят отрезок длины C и из его концов восставлены к нему в различных гранях перпендикуляры длин a и b. Определите длину отрезка прямой, соединяющего концы этих перпендикуляров.

Ответ: $\sqrt{c^2 + a^2 + b^2 + ab}$.

1.89. Через гипотенузу BC прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость α, расстояние от вершины A до этой плоскости равно 3. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника, если $AB = 10$, $AC = 7{,}5$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

Переключаемся

1.90. Шест надо установить вертикально. Сколько вам понадобится для этого тросов?

1.91. А почему иную колбасу режут наискосок?

ЗАДАЧИ К §3

Дополняем теорию

1.92. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

1.93. Пусть одна пара плоскостей пересекается по некоторой прямой, а другая пара плоскостей, соответственно параллельных данным, пересекается по другой прямой. Докажите, что эти прямые пересечения параллельны между собой.

1.94. Докажите, что параллельность плоскостей равносильна параллельности перпендикуляров к этим плоскостям.

1.95. Пусть данная прямая не лежит в данной плоскости. Докажите, что они параллельны, если: а) существует плоскость, параллельная данным плоскости и прямой; б) существует прямая, параллельная данным плоскости и прямой; в) существует прямая, перпендикулярная данным плоскости и прямой; г) существует плоскость, перпендикулярная данным плоскости и прямой; д) существуют две точки на данной прямой, одинаково удаленные от данной плоскости.

1.96. Две прямые параллельны. Одна из них параллельна данной плоскости, а другая имеет с этой же плоскостью общую точку. Докажите, что другая прямая лежит в данной плоскости.

1.97. Две плоскости пересекаются по некоторой прямой. Другая прямая параллельна каждой из данных плоскостей. Докажите, что она параллельна прямой, по которой эти плоскости пересекаются.

1.98. Две прямые пересекаются и каждая из них параллельна данной плоскости. Докажите, что плоскость, в которой лежат эти прямые , параллельна данной плоскости.

1.99. Докажите, что параллельны плоскости: а) противоположных граней прямоугольного параллелепипеда; б) оснований прямой призмы; в) противоположных граней параллелепипеда; г) оснований наклонной призмы.

1.100. Докажите, что множеством точек, равноудаленных от двух данных параллельных плоскостей, является параллельная им плоскость, проходящая через середину общего перпендикуляра двух данных плоскостей.

1.101. Докажите, что прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна любой прямой: а) на этой плоскости; б) параллельной этой плоскости.

Рисуем

1.102. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте его сечение плоскостью KLM при таком расположении этих точек: а) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра A_1D_1, M лежит внутри ребра AD; б) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра A_1D_1, M лежит внутри ребра CD; в) K лежит внутри ребра A_1B_1 ; L лежит внутри ребра A_1D_1, M лежит внутри ребра DD_1 ; г) K лежит внутри ребра A_1B_1, L лежит внутри ребра A_1D_1, M лежит внутри ребра CC_1.

1.103. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте его сечение плоскостью, которая проходит через: а) точку A и перпендикулярна плоскости B_1BD; б) точку A и перпендикулярна плоскости A_1AC; в) точку A и перпендикулярна плоскости CBD_1; г) прямую AC_1 и перпендикулярна плоскости ABD; д) прямую AC_1 и перпендикулярна плоскости D_1DB; е) прямую AC_1 и перпендикулярна плоскости ABC; ж) прямую AD_1 и перпендикулярна плоскости CDD_1; з) прямую AD_1 и перпендикулярна плоскости ABC; и) прямую AD_1 и перпендикулярна плоскости A_1AC.

1.104. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте два его сечения плоскостями, параллельными между собой и проходящи-

ми через прямые: а) AC и B_1D_1, б) AC и C_1D, в) AC и B_1D, г) AC и KL, где K и L — середины ребер A_1B_1 и CD, д) AC и O_1O_2, где O_1 и O_2 — центры граней AA_1B_1B и $A_1B_1C_1D_1$.

1.105. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K лежит внутри ребра PB. Нарисуйте его сечение плоскостью, проходящей через точку K и перпендикулярной прямой: а) BC; б) PB; в) PC; г) PQ.

1.106. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра PC. Нарисуйте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей: а) перпендикулярно плоскости ABC; б) перпендикулярно прямой KL; в) параллельно прямым PK и AL; г) через точку K параллельно прямой PB; д) через точку P параллельно прямой KL.

1.107. Дана правильная треугольная пирамида $PABC$, точка Q — центр ее основания. Нарисуйте сечение пирамиды плоскостью, параллельной плоскости ABC и проходящей через: а) точку T внутри ребра PB; б) точку M внутри медианы PL грани PAC; в) точку K внутри PQ.

1.108. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ точка Q — центр основания. Нарисуйте сечение пирамиды плоскостью, проходящей: а) через Q параллельно прямой AD; б) через Q параллельно прямой PA; в) через точку внутри PQ параллельно основанию; г) параллельно плоскости PAD; д) через CD параллельно прямой AB; е) через точки K и L — середины ребер BC и CD параллельно прямой BD; ж) через KL параллельно BD и AP; з) параллельно плоскости PKL; и) параллельно плоскости PKD; к) перпендикулярно плоскости ABC; л) перпендикулярно плоскостям PCD и PAB.

Планируем

1.109. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка K — середина ребра CD, точка L — середина ребра C_1B_1, точка M — центр грани AA_1B_1B. Как вычислить расстояния: а) A_1K; б) KL; в) LM?

1.110. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка K — середина ребра C_1D_1, точка F — центр грани BB_1C_1C. Как вычислить расстояния: а) от точки A_1 до плоскости CDD_1; б) от точки A_1 до плоскости BB_1D_1; в) от точки A_1 до плоскости

AD_1C_1; г) от точки K до плоскости A_1B_1B; д) от точки K до плоскости AA_1C_1; е) от точки K до плоскости A_1B_1C; ж) от точки F до плоскости AA_1D; з) от точки F до плоскости ABB_1?

1.111. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как вычислить угол между лучом AD и лучами: а) CC_1; б) A_1B_1; в) B_1C; г) BC_1; д) CD_1; е) A_1B; ж) DB_1; з) D_1B; и) CA_1; к) AC_1?

1.112. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра AA_1, точка L — середина ребра A_1D_1, точка M — середина ребра A_1B_1, точка N — середина ребра B_1C_1, точка P — середина ребра BB_1, точка Q — середина ребра BC, точка R — середина ребра C_1D_1, точка S — середина ребра DD_1. Как вычислить угол между прямыми: а) KL и MN; б) KL и PQ; в) MP и NQ; г) KL и RS; д) RS и PQ?

1.113. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр его основания, точка K — середина ребра PB, точка L — середина ребра AC. Как вычислить угол между прямыми: а) AP и BC; б) AP и CQ; в) AP и CK; г) AK и BC; д) AK и PL; е) AQ и KL?

1.114. Известны расстояния от трех вершин параллелограмма до данной плоскости. Как найти расстояние до этой плоскости от четвертой вершины параллелограмма?

Представляем

1.115. Какую фигуру образуют в пространстве все точки, удаленные от данной плоскости на расстояние: а) равное данному; б) большее данного; в) меньшее данного?

1.116. Даны две параллельные плоскости. Какую фигуру образуют в пространстве все точки, которые: а) равноудалены от этих плоскостей; б) к одной из них ближе, чем к другой?

1.117. Какой фигурой является множество точек, равноудаленных от: а) двух параллельных прямых; б) двух пересекающихся прямых; в) двух параллельных плоскостей; г) двух пересекающихся плоскостей; д) прямой и плоскости, перпендикулярных между собой?

1.118. Какой фигурой является множество точек, равноудаленных от: а) двух граней тетраэдра; б) трех граней тетраэдра; в) боковых граней правильной пирамиды; г) боковых граней правильной призмы (фигура лежит внутри многогранника)?

1.119. Какой фигурой является множество биссектрис всех линейных углов данного двугранного угла?

Оцениваем

1.120. В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат. Грань PAB перпендикулярна основанию и является равносторонним треугольником. В этой пирамиде проводится сечение, параллельное плоскости PCD. Можете ли вы узнать, в каком положении такое сечение имеет наибольшую площадь?

1.121. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все боковые грани — квадраты. Точка K — середина ребра AC, точка L — середина ребра AB, точка M — середина ребра BB_1, точка N — переменная точка ребра AA_1. Проводятся сечения призмы плоскостями KLM и BCN и рассматривается общий отрезок, этих сечений. Какой из таких отрезков является наибольшим? А наименьшим?

Сделаем

1.122. Точка K удалена от всех вершин треугольника на 1, точка L удалена от всех сторон треугольника на 1. Какая из них ближе к плоскости треугольника?

1.123. Через каждую из двух скрещивающихся диагоналей боковых граней правильной треугольной призмы проводятся два сечения так, что они параллельны другой из этих диагоналей. Докажите, что эти сечения равны.

Исследуем

1.124. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в вершине A сходятся три ромба со стороной 1 и острым углом, равным φ. Как вычислить высоту параллелепипеда?

1.125. Все плоские углы при одной из вершин тетраэдра прямые. Можно ли в сечении такого тетраэдра получить: а) прямоугольный треугольник; б) остроугольный треугольник; в) тупоугольный треугольник; г) треугольник любой наперед заданной формы?

Поступаем в ВУЗ

1.126. Отрезки двух прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, относятся как 2:3, а их углы с плоскостями — как 2:1 . Найти эти углы.

Ответ: $\arccos 0{,}75$ и $2\arccos 0{,}75$.

1.127. Найдите угол между двумя скрещивающимися прямыми a и b, если расстояние между точками A прямой a и B прямой b, равноотстоящими от оснований C на прямой a

и D на прямой b общего перпендикуляра к этим прямым, равно $2p$, а $DC=AC=BD=p$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

1.128. Основание AC и вершина B равнобедренного треугольника ABC находятся на различных гранях прямого двугранного угла с ребром p. Точки A и B удалены от p на расстояние a, а проекция C на ребро p равноудалена от проекций A и B на p. Найдите расстояние от C до p, если AB образует с p угол 60 градусов.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

1.129. Отношение длин двух отрезков, заключенных между параллельными плоскостями, равно k, а величины углов, которые каждый из этих отрезков составляет с одной из плоскостей, отиосятся как 2:3. Найдите величины этих углов и допустимые значения k.

Ответ: $k \in \left[2\frac{\sqrt{3}}{3};\ 1{,}5\right)$; $2arccos(0{,}25(k+\sqrt{k^2+4}))$;

$3arccos(0{,}25(k+\sqrt{k^2+4}))$.

1.130. Дан прямоугольник, длины сторон которого равны 1 и 2. Меньшая сторона прямоугольника лежит на плоскости P, а диагональ прямоугольника образует с плоскостью P угол, величина которого равна α. Найдите величину угла между плоскостью прямоугольника и плоскостью P.

Ответ: $arcsin\frac{\sqrt{5}sin\alpha}{2}$.

1.131. Точки M, N, P, Q расположены в пространстве так, что $MN \perp PQ$, $MP \perp NQ$. Докажите, что $MQ \perp NP$.

1.132. AB и CD параллельные прямые, лежащие в двух пересекающихся плоскостях, образующих угол 60°. Точки A и D удалены от линии пересечения плоскостей на расстояния A и B. Найдите расстояние между AB и CD.

Ответ: $\sqrt{a^2+b^2-ab}$.

1.133. Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены в пространстве так, что центр квадрата $KLMN$ совпадает с серединой стороны AB. Точка A лежит на стороне LM и $AM < AL$, точка N равноудалена от точек B и C. Расстояние от M до ближайшей к ней точке квадрата $ABCD$ равно $2\sqrt{3}$, а расстояние от K до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно 5. Найдите длины сторон квадратов и расстояние от точки до плоскости .

Ответ: $10\sqrt{13}$; 30; $10\sqrt{\frac{14}{13}}$.

1.134. Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен $arccos\frac{\sqrt{35}}{10}$. Точки E и F являются серединами отрезков AB и CD соответственно, а прямая EF перпендикулярна прямым AB и CD. Найдите угол ACB, если известно, что $AB=2\sqrt{5}$, $CD=2\sqrt{7}$, $EF=\sqrt{13}$.

Ответ: $arccos\frac{5}{8}$.

1.135. На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A, B и C такие, что $AB=27$ и $BC=18$. Найдите расстояние между прямыми p и q, если расстояния от точек A, B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

Ответ: 8.

Переключаемся

1.136. Объясните, почему часовая и минутная стрелки часов движутся в параллельных плоскостях.

1.137. Из наблюдательного пункта установили, что расстояние до самолета увеличивается, а угол, под которым он виден, уменьшается. Взлетает этот самолет или садится?

1.138. Как на столе расставить 4 одинаковые бутылки так, чтобы расстояния между их горлышками были одинаковыми?

ГЛАВА 2

ВАЖНЕЙШИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФИГУРЫ

В главе 2 мы продолжим "строительную геометрию" и расскажем о строении и свойствах важнейших пространственных фигур — шара и сферы, цилиндров и конусов, призм и пирамид. Большинство предметов, созданных руками человека, — здания, машины, мебель, посуда и т.д., и т.п., состоит из частей, имеющих форму этих фигур.

§4. СФЕРА И ШАР

После прямых и плоскостей сфера и шар — самые простые, но очень важные и богатые разнообразными свойствами пространственные фигуры. О геометрических свойствах шара и его поверхности — сферы — написаны целые книги. Некоторые из этих свойств были известны еще древнегреческим геометрам, а некоторые найдены совсем недавно, в последние годы. Эти свойства (вместе с законами естествознания) объясняют, почему, например, форму шара имеют небесные тела и икринки рыб, почему в форме шара делают батискафы и футбольные мячи, почему так распространены в технике шарикоподшипники и т.д. Мы можем доказать лишь самые простые свойства шара. Доказательства других, хотя и очень важных свойств, часто требуют применения совсем не элементарных методов, хотя формулировки таких свойств могут быть очень простыми: например, среди всех тел, имеющих данную площадь поверхности, наибольший объем у шара.

4.1. **Определения сферы и шара.** Определяются сфера и шар в пространстве совершенно так же, как окружность и круг на плоскости. **Сферой** называется фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от дан-

ной точки на одно и то же (положительное) расстояние. Эта точка называется **центром сферы**, а расстояние — ее **радиусом** (рис.4.1).

Итак, сфера с центром O и радиусом R — это фигура, образованная всеми точками X пространства, для которых $OX = R$.

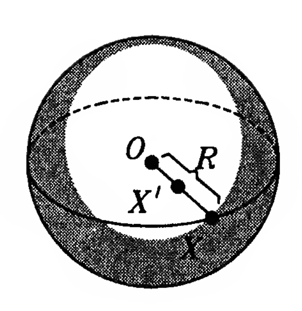


Рис.4.1

Шаром называется фигура, образованная всеми точками пространства, находящимися на расстоянии не большем данного (положительного) расстояния от данной точки. Эта точка называется **центром шара**, а данное расстояние — его **радиусом**.

Итак, шар с центром O и радиусом R — это фигура, образованная всеми точками X пространства, для которых $OX \leq R$.

Те точки X шара с центром O и радиусом R, для которых $OX = R$, образуют сферу. Говорят, что эта *сфера ограничивает данный шар* или что она является его *поверхностью*.

О тех же точках X' шара, для которых $OX < R$, говорят, что они лежат внутри шара.

Радиусом сферы (и шара) называют не только расстояние R, но и любой отрезок, соединяющий центр с точкой сферы.

Диаметром сферы (и шара) называют как величину, равную удвоенному радиусу, так и любой отрезок, по которому пересекает шар прямая, проходящая через его центр (рис.4.2).

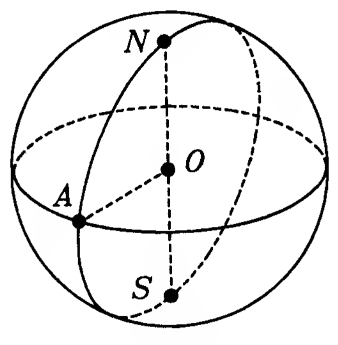


Рис.4.2

Точки сферы, являющиеся концами диаметра сферы, называются **диаметрально противоположными**.

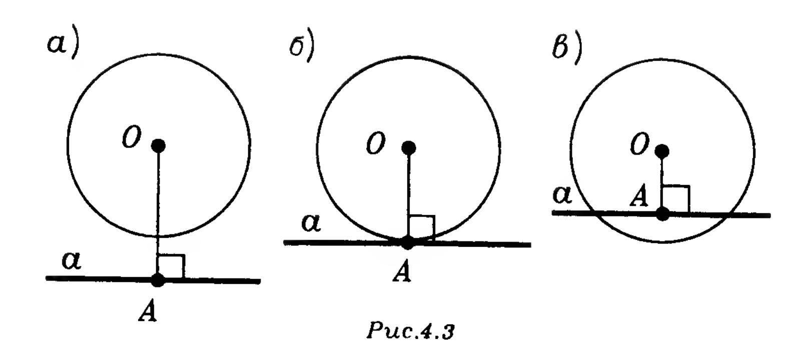


Рис.4.3

4.2. **Взаимное положение шара и плоскости**. Сначала вспомним, как могут быть расположены по отношению друг к другу круг и прямая (рис.4.3). Три положения круга и прямой характеризуются расстоянием от центра круга до прямой, т.е. длиной перпендикуляра OA, опущенного из центра O круга на данную прямую.

Точно так же в пространстве для шара и плоскости возможны три случая.

1) *Если расстояние от центра шара до данной плоскости больше радиуса шара, то шар и плоскость не имеют общих точек* (рис.4.4).

2) Касание шара и плоскости. *Если расстояние от центра шара до плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей*

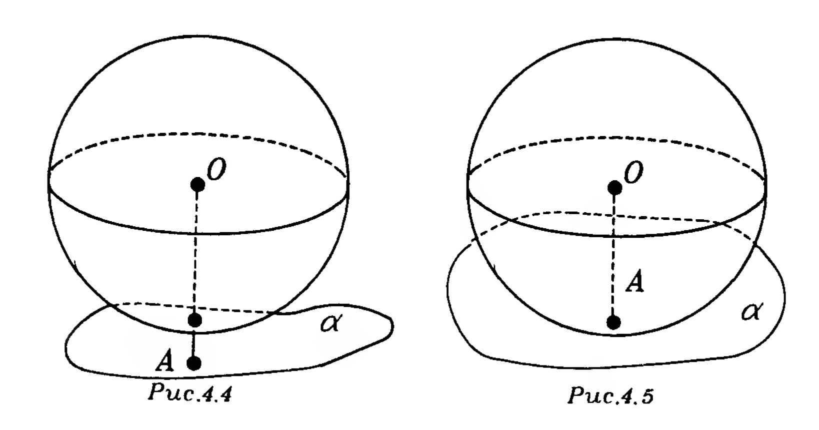


Рис.4.4

Рис.4.5

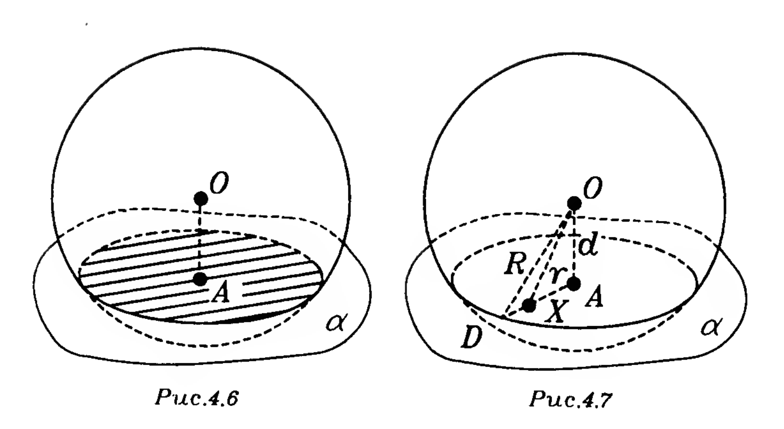


Рис.4.6 Рис.4.7

его сферой только одну общую точку. Этой точкой является точка A — основание перпендикуляра OA, опущенного из центра O шара на данную плоскость α. Все остальные точки плоскости α удалены от точки O больше, чем на радиус R и шару не принадлежат (рис.4.5). В случае, когда шар, а также и ограничивающая его сфера, имеют с плоскостью единственную общую точку, говорят, что **плоскость касается шара и ограничивающей его сферы**, а их общая точка называется **точкой касания**. Плоскость, касающаяся сферы, называется **касательной плоскостью** этой сферы.

Выводы, сделанные в рассматриваемом случае, можно выразить как следующий признак касания сферы и плоскости: *если плоскость проходит через точку на сфере и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она касается сферы.*

3) Пересечение шара и плоскости. *Если расстояние d от центра шара до плоскости меньше радиуса R шара, то пересечение шара с плоскостью представляет собою круг*. Центр A этого круга является проекцией центра шара O на данную плоскость. Пересечение плоскости со сферой является окружностью указанного круга (рис.4.6). Ее радиус r вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}. \qquad (1)$$

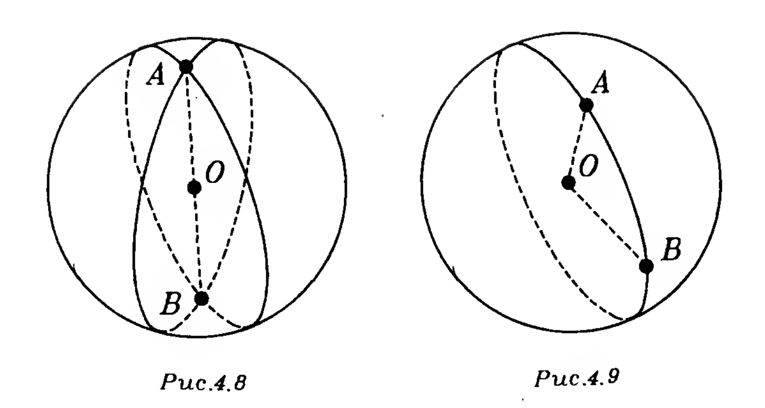


Рис.4.8

Рис.4.9

Действительно, построим на плоскости α, удаленной от точки O на расстояние $d < R$, круг D с центром в точке A и радиусом r, вычисленным по формуле (1). Точка X принадлежит кругу D тогда и только тогда, когда $AX \le r$ (рис.4.7), а это в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда точка X лежит в плоскости α и для ее расстояния до точки O выполняется неравенство

$$OX = \sqrt{d^2 + AX^2} \le R, \tag{2}$$

т.е. эта точка X принадлежит рассматриваемому шару. Итак, сечением данного шара плоскостью — в случае, когда $d < R$, является круг D, а сечением сферы — окружность этого круга. ■

Радиус r будет наибольшим, когда $d = 0$, т.е. когда плоскость α проходит через центр шара. Тогда $r = R$. В этом случае окружность по которой сфера пересекается с плоскостью, проходящей через центр сферы, называется **большой окружностью сферы**.

Каждые две большие окружности одной сферы пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы (рис.4.8).

Действительно, прямая, по которой пересекаются плоскости этих окружностей, проходит через центр сферы. А общие точки этих окружностей лежат на этой прямой, и потому — диаметрально противоположны. ■

А *через две не диаметрально противоположные точки сферы проходит единственная большая окружность:* она получается при пересечении сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы и две данные точки (рис.4.9).

Дуги больших окружностей на сфере (меньшие полуокружности) аналогичны отрезкам на плоскости в том смысле, что они являются кратчайшими по длине среди всех линий на сфере, соединяющих их концы. В частности, дуга большой окружности короче дуги параллели (отличной от экватора) между теми же точками на земной поверхности (рис.4.10). Поэтому при дальних полетах и дальних плаваниях, если возможно, летят и плывут не по постоянной широте, а в северном полушарии забирают на север — по дуге большой окружности. Например, кратчайший полет из Москвы в Хабаровск проходит над далеким севером Сибири.

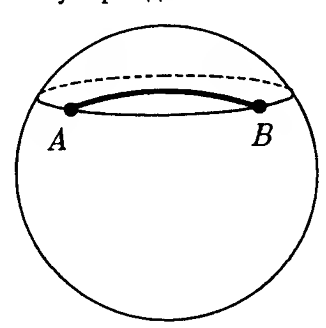


Рис.4.10

Теперь мы легко можем доказать утверждение, обратное признаку касания сферы и плоскости: *если плоскость касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.*

Действительно, если бы это было не так, то данная плоскость была бы удалена от центра сферы меньше, чем на радиус, а потому пересекала бы сферу по окружности, а не касалась бы ее. ■

Объединив признак касания и обратное ему утверждение, приходим к такой теореме:

Т е о р е м а 1 (о касании сферы и плоскости). **Плоскость и сфера касаются в некоторой точке тогда и только тогда, когда плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку.**

4.3. **Сфера и многогранники.** Сфера называется **вписанной в многогранник**, если она касается всех его граней. В этом случае говорят, что **многогранник описан около сферы.** Центр сферы, вписанной в многогранник, равноудален от всех граней этого многогранника.

Говорят, что **сфера описана около многогранника**, если она проходит через все его вершины. А о многограннике в этом случае говорят, что он **вписан в сферу**. Центр сферы, описанной около многогранника, равноудален от всех вершин многогранника.

4.4. **Вид и изображение шара и сферы.** Шар издали со всех сторон имеет вид круга — вспомните диск Солнца или полной Луны. Это выражено в следующем утверждении:

Проекция шара, как и сферы, есть круг того же радиуса. (Здесь и в дальнейшем, говоря просто "проекция", мы имеем в виду ортогональную проекцию на плоскость). Докажите это утверждение самостоятельно (рис.4.11).

В согласии с этим утверждением шар и сферу изображают в виде круга. При этом для того, чтобы не спутать это изображение с изображением круга, его можно подштриховать, но обычно рисуют проекцию какой-нибудь большой окружности, плоскость которой не перпендикулярна плоскости проекции; проекция эта будет, как мы знаем, эллипсом. Центр шара изобразится центром этого эллипса (рис.4.12). Если взятая большая окружность принята за экватор, то можно отыскать соответствующие полюсы N и S, помня, что прямая, их соединяющая, перпендикулярна плоскости экватора. Типичная ошибка при изображении полюсов в том, что их рисуют на окружности, ограничивающей изображение шара (рис.4.13). На самом же деле изображение точки N должно лежать ниже, а точки S — выше, т.е. так, как изображено на рисунке 4.12. Параллели также изображаются эллипсами.

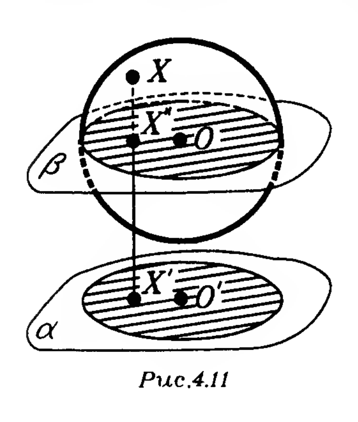


Рис.4.11

З а м е ч а н и е. Оказывается, что свойство проекции шара, доказанное в этом пункте, позволяет судить о шарообразности реальных предметов. А именно, имеет место следующее утверждение:

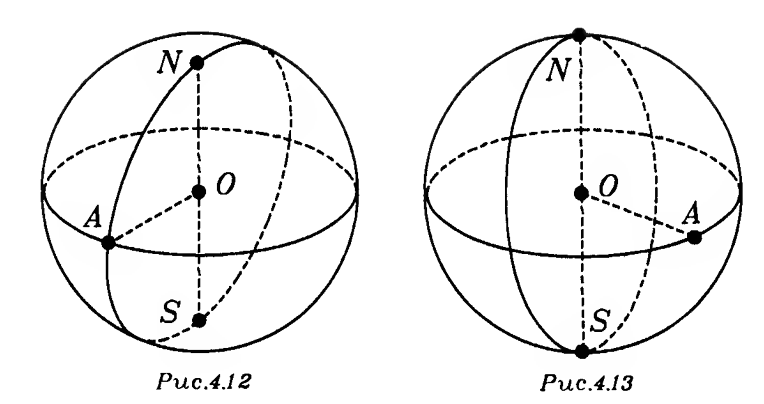


Рис.4.12 Рис.4.13

Если проекции фигуры на все плоскости — круги, то фигура эта — сфера в объединении с некоторым множеством внутренних точек. (В результате такого объединения может получиться как шар, так и его часть.) Доказательство этого утверждения сложно и выходит за рамки школьного курса.

4.5. **Опорная плоскость.** Сфера со своей касательной плоскостью имеет общую точку и лежит от нее по одну сторону, т.е. в одном полупространстве (рис.4.5). Плоскости, обладающие таким свойством относительно некоторой фигуры (не обязательно сферы), называются опорными плоскостями этой фигуры.

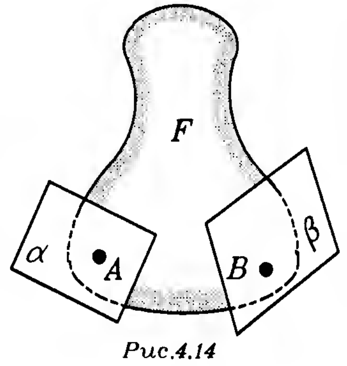


Рис.4.14

Итак, плоскость называется **опорной плоскостью данной фигуры**, если она имеет с фигурой хотя бы одну общую точку и фигура содержится в одном полупространстве, ограниченном этой плоскостью (рис.4.14).

Мы постоянно встречаемся с опорными плоскостями (насколько вообще можно говорить о реальных плоских поверхностях как о плоскостях). Плоскость стола является опорной для всех стоящих на нем предметов; для предмета, упирающегося и в пол, и в стену, их поверхности слу-

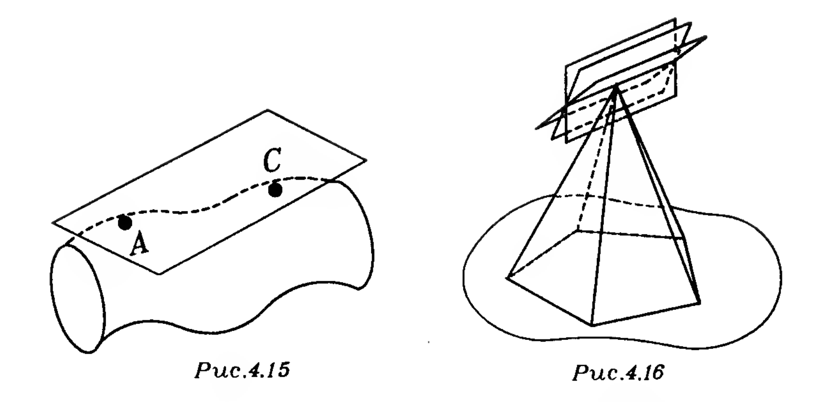


Рис.4.15 *Рис.4.16*

жат опорными плоскостями; для деталей, обрабатываемых на шлифовальном круге, поверхность этого круга тоже служит опорной плоскостью и т.д.

Плоскость может быть опорной одновременно в разных точках фигуры, как на рисунке 4.15, и на целой области: так, плоскость основания пирамиды является ее опорной плоскостью во всех точках основания (рис.4.16).

С другой стороны, может быть так, что в одной точке фигура имеет бесконечно много опорных плоскостей, как это будет, например, в вершине пирамиды (рис.4.16).

4.6. **Ограниченные фигуры. Диаметр фигуры.** Фигуру называют **ограниченной**, если найдется такое расстояние d, что расстояние между любыми двумя точками фигуры не превосходит d. В противном случае фигуру называют **неограниченной**.

В неограниченной фигуре есть такие точки, которые сколь угодно далеко удалены друг от друга, и никакого наибольшего расстояния между точками этой фигуры не существует. Но в ограниченной фигуре могут существовать наиболее удаленные друг от друга точки, т.е. пары таких точек, расстояние между которыми наибольшее. В шаре такими точками являются пары диаметрально противоположных точек.

Расстояние между наиболее удаленными друг от друга точками фигуры (если такие существуют) называется **диаметром фигуры**. Отрезок, соединяющий наибо-

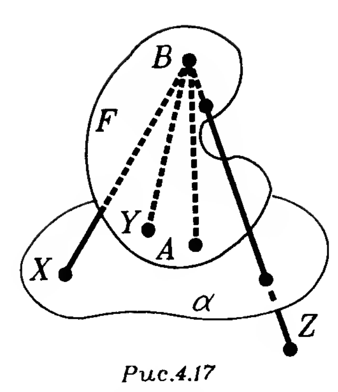


Рис.4.17

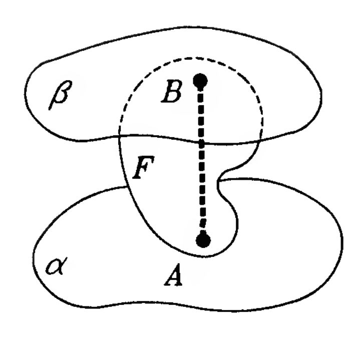


Рис.4.18

лее удаленные друг от друга точки фигуры, тоже можно назвать ее диаметром (как и для шара).

Ясно, что *ограниченная фигура лежит в некотором шаре, а неограниченная фигура не лежит ни в каком шаре.*

*4.7. **Опорные плоскости в концах диаметра.** Вспомним теорему об опорной (касательной) плоскости шара. В ней содержится следующее утверждение.

Плоскость, проходящая через конец диаметра шара перпендикулярно этому диаметру, не имеет с шаром других общих точек и служит его опорной плоскостью.

Оказывается, эта теорема обобщается на произвольные фигуры! Именно, выполняется следующая теорема:

Теорема. **Плоскость, проходящая через конец диаметра фигуры перпендикулярно этому диаметру, не имеет с фигурой других общих точек и служит ее опорной плоскостью.**

□ Пусть отрезок AB — диаметр фигуры F (рис.4.17). Проведем через его конец A плоскость α, ему перпендикулярную. Если X — точка этой плоскости, отличная от A, то $BX > BA$, так как перпендикуляр BA короче наклонной BX. По определению диаметр — это наибольшее расстояние между точками фигуры, так что для всех точек $Y \in F$ выполняется неравенство $BA \geq BY$. Следовательно, никакая точка Y фигуры F не лежит на плоскости α, кроме самой точки A.

Покажем, что вся фигура F лежит с той стороны от плоскости α, где лежит B (кроме точки A). Действи-

тельно, если точки Z и B лежат по разные стороны от плоскости α, то отрезок BZ пересекает плоскость α. Поэтому $BZ > BA$, и точка Z не может быть точкой фигуры F. Итак, плоскость α — опорная плоскость фигуры F в точке A. ■

Замечание 1. Вся фигура, кроме концов диаметра AB, расположена строго между плоскостями α и β, проходящими через его концы A и B перпендикулярно ему (рис.4.18). Диаметр фигуры или какого-нибудь предмета — это мера того, что называют линейными размерами или габаритами предмета. Всякий предмет можно поместить в кубическую коробку с ребром, равным диаметру предмета.

Замечание 2. Теорема об опорной плоскости шара оказалась, как мы видим, только частным случаем последней теоремы, относящейся к любым фигурам, лишь бы у них существовали наиболее отдаленные друг от друга точки. При этом доказательство ее ничуть не сложнее.

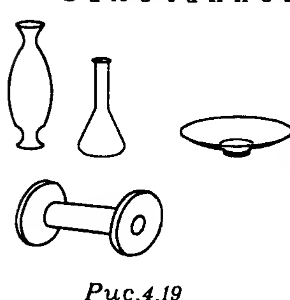


Рис.4.19

И снова, как и в случае теоремы о трех перпендикулярах и ее обобщения (см. п.2.3), мы встречаемся с современным обобщением классической теоремы, известной еще в Древней Греции: ведь понятие опорной плоскости принадлежит геометрин XX века.

4.8. **Сфера — фигура вращения.** Предметы, имеющие форму фигур вращения, постоянно встречаются в технике, в искусстве, в быту: тарелки, катушки, колеса, вазы и т.д. (рис.4.19) — все это реальные тела вращения. Они характеризуются тем, что при вращении оси самосовмещаются, как точильные круги, валы турбин и т.п. При этом каждая точка такой фигуры, не лежащая на оси вращения, движется по окружности с центром на оси. Поэтому такие фигуры как бы состоят из окружно-

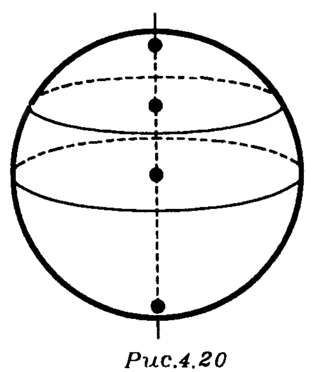


Рис.4.20

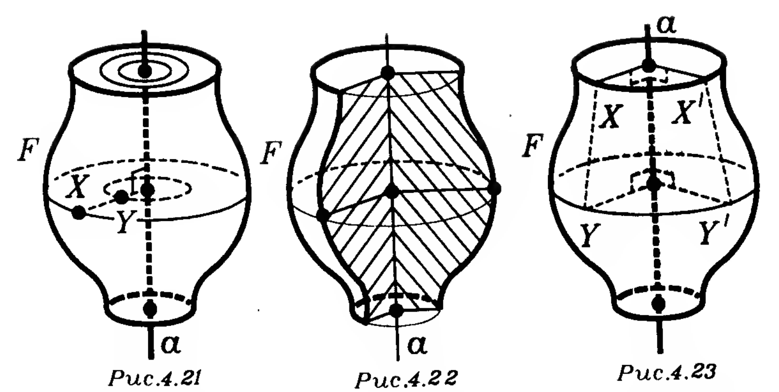


Рис.4.21 Рис.4.22 Рис.4.23

стей. Эти окружности имеют центры на одной прямой и лежат в плоскостях, перпендикулярных этой прямой.

Таким свойством обладает и сфера. Ее осью вращения является любая прямая, проходящая через центр сферы (рис.4.20).

И в общем случае фигуру вращения определим указанным свойством. Пусть F — некоторая фигура в пространстве, a — некоторая прямая и X — любая точка фигуры F (рис.4.21). Проведем через X плоскость $\alpha \perp a$. В этой плоскости построим окружность с центром на прямой a, проходящую через точку X. Если фигура F содержит такую каждую окружность, то она называется **фигурой вращения с осью** a. Построенные окружности называются **параллелями фигуры вращения**.

Другим семейством плоских фигур, заполняющим фигуру вращения F, является семейство ее **меридианов**. Меридианы получаются в сечении фигуры F полуплоскостями, ограниченными осью фигуры (рис.4.22). Все меридианы фигуры вращения равны (рис.4.23). Действительно, соответствующие друг другу точки этих фигур лежат на одной и той же параллели. Равенство расстояний для соответствующих пар точек следует из равенства прямоугольных трапеций.

Если представить себе, что полуплоскости, ограниченные осью вращения фигуры, поворачиваются вокруг этой оси, то все меридианы фигуры вращения будут самосовмещаться. В согласии с этим говорят, что фигура вращения получается в результате вращения плоской фигуры вокруг оси, лежащей в той же плоскости. Напри-

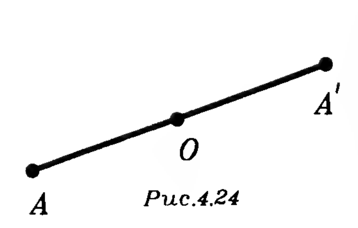


Рис.4.24

мер, меридиан сферы — полуокружность, и сфера получается вращением полуокружности вокруг ее диаметра. А шар получается вращением полукруга вокруг его диаметра.

4.9. **Симметрия сферы и шара.** Одно из самых важных свойств, которым может обладать фигура — это ее симметричность. Само слово "симметрия" — с греческого может быть переведено как "соразмерность". Симметричная фигура содержит в себе равные и однообразно расположенные части, что придает ей уравновешенность (например, меридианы у фигуры вращения).

Изучая различные фигуры, мы каждый раз будем находить их **элементы симметрии**, т.е. центры, оси и плоскости различных видов их симметрии.

Не считая самого пространства, сфера и шар — самые симметричные фигуры. В предыдущем пункте мы уже убедились, что сфера и шар обладают вращательной симметрией, т.е. могут быть самосовмещены поворотом вокруг осей, проходящих через их центр. В следующих пунктах мы познакомимся еще с двумя видами их симметрии. Мы будем говорить о симметрии сферы, но все сказанное о ней распространяется на шар.

4.10. **Сфера — центрально симметричная фигура.** О центральной симметрии говорилось в планиметрии. Все

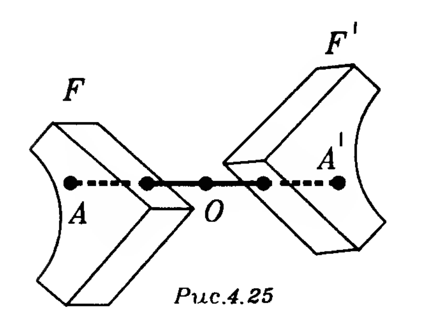


Рис.4.25

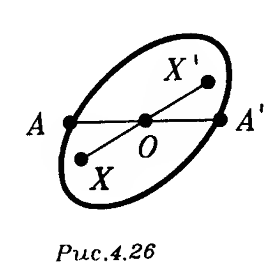


Рис.4.26

сказанное там дословно повторяется в стереометрии. Напомним определения.

Точки A и A' называются симметричными относительно точки O, если точка O делит отрезок AA' пополам (рис.4.24). Точка O считается симметричной сама себе (относительно O).

Две фигуры называются симметричными относительно точки O, если они состоят из попарно симметричных точек (рис.4.25). Это значит, что для каждой точки одной фигуры симметричная ей (относительно O) точка лежит в другой фигуре.

В частности, фигура может быть симметрична сама себе относительно некоторой точки O. Это значит, что для каждой ее точки X точка X', симметричная X относительно O, лежит в ней же. Точка O называется тогда **центром симметрии фигуры**, а фигура называется **центрально симметричной** (рис.4.26).

Сфера симметрична относительно своего центра, т.е. центр сферы является центром симметрии сферы. В самом деле, для каждой точки X сферы с центром O симметричная ей (относительно O) точка лежит на сфере — этой точкой X' будет диаметрально противоположная точка (рис.4.27).

4.11. **Сфера — зеркально симметричная фигура.** Зеркальная симметрия в пространстве аналогична осевой симметрии на плоскости, но в определениях прямую надо заменить плоскостью.

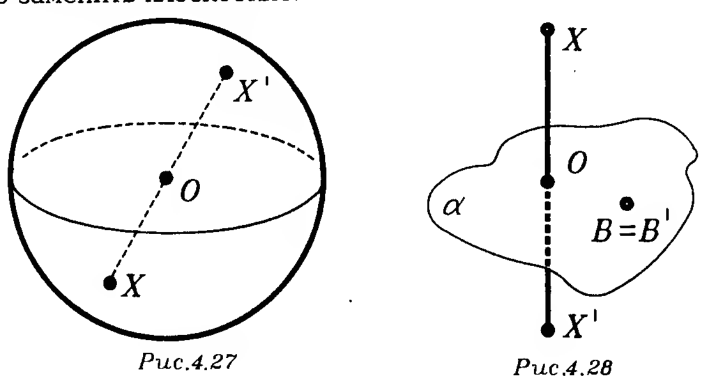


Рис.4.27 Рис.4.28

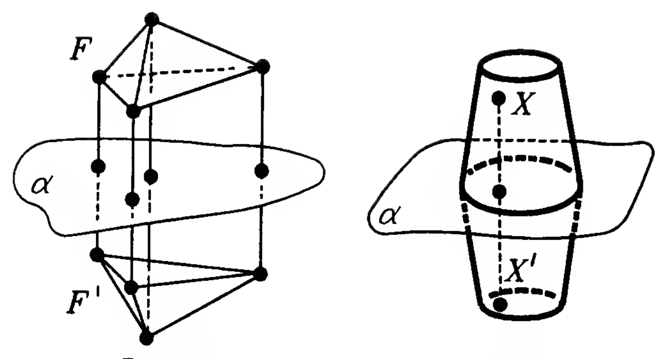


Рис.4.29 Рис.4.30

Точки X и X' называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок XX' перпендикулярен плоскости α и делится ею пополам (рис.4.28). Каждая точка плоскости α считается симметричной сама себе (относительно α).

Две фигуры называются симметричными относительно плоскости α (или **зеркально симметричными относительно α**), если они состоят из попарно симметричных точек (рис.4.29). Это значит, что для каждой точки одной фигуры симметричная ей точка (относительно α) лежит в другой фигуре.

В частности, фигура может быть симметрична сама себе относительно некоторой плоскости α. Это значит, что для каждой ее точки X точка X', симметричная X относительно плоскости α, лежит в ней же. Плоскость α называется тогда **плоскостью симметрии фигуры**, а фигура называется **зеркально симметричной** (рис.4.30).

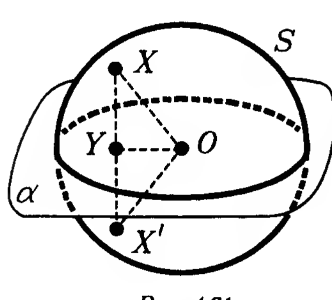


Рис.4.31

Сфера симметрична относительно любой плоскости, проходящей через ее центр (рис.4.31). Это означает следующее.

Пусть S — некоторая сфера радиуса R с центром в точке O и α — любая плоскость, проходящая через точку O. Возьмем лю-

бую точку X сферы S, не лежащую в плоскости α Построим симметричную ей относительно α точку X'. Для этого опустим из точки X перпендикуляр XY на плоскость α и продолжим его за точку Y на отрезок $YX' = XY$. Прямоугольные треугольники OXY и $OX'Y$ равны (по двум катетам). Поэтому $OX' = OX = R$ и точка $X' \in S$. Итак, α — плоскость симметрии сферы S. ■

Симметричные тела встречаются повсюду: чайники, чашки, автомобили, дома, корабли, тела животных и т.д.

4.12. **Отражение в плоскости и отражение в зеркале.** Отражение в плоскости осуществляется реально при отражении в зеркале: изображение предмета в плоском зеркале соответствует предмету именно так, как при геометрическом отражении в плоскости зеркала. Это следует из закона отражения света.

По закону отражения света луч падающий и луч отраженный лежат в одной плоскости с перпендикуляром к зеркалу в точке падения и образуют с ним равные углы.

Лучи, идущие из точки A, отражаясь от плоскости зеркала, расходятся так, как если бы они исходили из точки A', симметричной точке A относительно плоскости зеркала. Это можно доказать, исходя из закона отражения (рис.4.32).

Таким образом, каждая точка изображается в зеркале симметричной ей точкой и, стало быть, каждая фигура — симметричной фигурой. Отражение в зеркале представляет в этом смысле геометрическое отражение в плоскости.

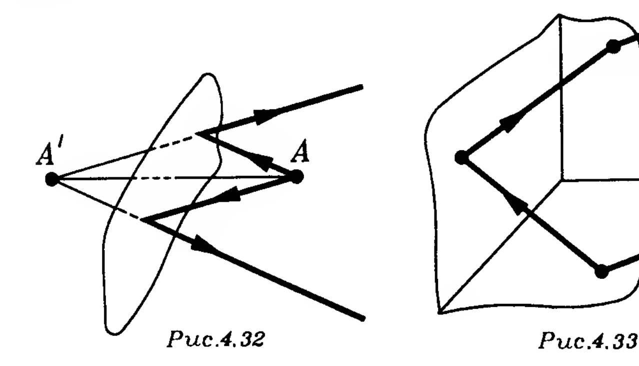


Рис.4.32 *Рис.4.33*

Отражение в плоскости имеет различные технические применения. Например, можно доказать, что, последовательно отразившись от трех взаимно перпендикулярных плоскостей, луч изменит направление на противоположное (попробуйте доказать это!). Поэтому луч любого направления, отразившись от трех взаимно перпендикулярных зеркал, возвращается точно в противоположном направлении (рис.4.33). На этом основан уголковый отражатель, отправленный в свое время на Луну. Из системы отражателей состоят красные сигнальные знаки сзади у автомашин и велосипедов.

*§5. ТРЕХГРАННЫЕ УГЛЫ И СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

5.1. **Определение трехгранного угла и его элементов.** Если в стереометрии аналогами плоских углов можно считать двугранные углы, то трехгранные углы можно рассматривать как аналоги плоских треугольников, а кроме того, как мы увидим, они естественно связаны со сферическими треугольниками.

Определить трехгранный угол можно так. Возьмем любые три луча a, b, c, имеющие общее начало O и не лежащие в одной плоскости (рис.5.1). Эти лучи являются сторонами трех выпуклых плоских углов: угла α со сторонами b, c, угла β со сторонами a, c и угла γ со сторонами a, b. Объединение этих трех углов α, β, γ и называется **трехгранным углом** $Oabc$ (или, короче, трехгранным углом O). Лучи a, b, c называются ребрами трехгранного угла $Oabc$, а плоские углы α, β, γ — его **гранями**. Точка O называется **вершиной** трехгранного угла.

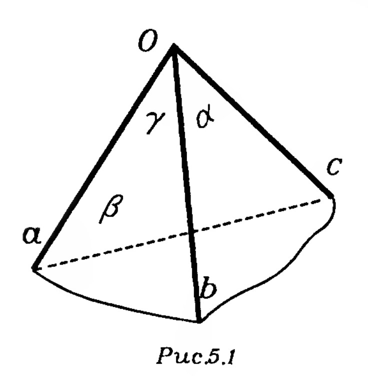


Рис.5.1

При каждом из ребер трехгранного угла определяется соответствующий двугранный угол такой, ребро которого содержит соответствующее ребро трехгранного угла, а грани которого содержат грани трехгранного угла, прилежащие к этому ребру.

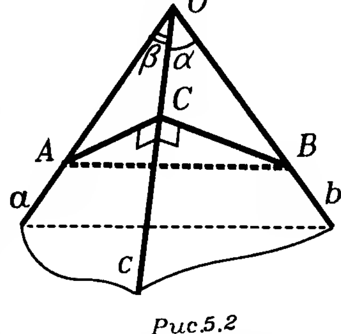


Рис.5.2

Величины двугранных углов трехгранного угла $Oabc$ при ребрах a, b, c будем соответственно обозначать через $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$.

Три грани α, β, γ трехгранного угла $Oabc$ и три его двугранных угла при ребрах a, b, c, а также величины α, β, γ и $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ будем называть элементами трехгранного угла. (Вспомните, что элементы плоского треугольника — это его стороны и его углы.)

Наша задача — выразить одни элементы трехгранного угла через другие его элементы, т.е. построить "тригонометрию" трехгранных углов.

5.2. **Тригонометрия трехгранного угла.** Начнем с вывода аналога теоремы косинусов. 1) Сначала рассмотрим такой трехгранный угол $Oabc$, у которого хотя бы две грани, например α и β, являются острыми углами. Возьмем на его ребре c точку C и проведем из нее в гранях α и β перпендикуляры CA и CB к ребру c до пересечения с ребрами a и b в точках A и B соответственно (рис.5.2). Выразим расстояние AB из треугольников OAB и CAB по теореме косинусов. Получим

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\hat{c}$$

и

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\gamma .$$

Вычитая из второго равенства первое, получим:

$$OA^2 - AC^2 + OB^2 - BC^2 + 2AC \cdot BC \cdot \cos\hat{c} -$$
$$-2AO \cdot BO \cdot \cos\gamma = 0. \qquad (1)$$

Так как треугольники OCB и OCA прямоугольные, то

$$OA^2 - AC^2 = OC^2 \quad \text{и} \quad OB^2 - BC^2 = OC^2. \qquad (2)$$

Поэтому из (1) и (2) следует, что

$$OA \cdot OB \cdot cos\gamma = OC^2 + AC \cdot BC \cdot cos\hat{c},$$

т.е.

$$cos\gamma = \frac{OC}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} + \frac{AC}{OA} \cdot \frac{BC}{OB} \cdot cos\hat{c},$$

но

$$\frac{OC}{OA} = cos\beta, \quad \frac{OC}{OB} = cos\alpha, \quad \frac{AC}{OA} = sin\beta, \quad \frac{BC}{OB} = sin\alpha,$$

поэтому получим:

$$cos\gamma = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta \cdot cos\hat{c} \qquad (3)$$

— аналог теоремы косинусов для трехгранных углов.

Покажем, что эта формула верна для трехгранных углов с любыми гранями. Возможны еще такие случаи.

2) Обе грани α и β — тупые углы. Возьмем тогда луч c', дополняющий луч c до прямой, и рассмотрим трехгранный угол $Oabc'$, дополняющий угол $Oabc$ до двугранного угла. В нем уже две грани — острые углы, имеющие величины $\pi - \alpha$ и $\pi - \beta$, третья грань — тот же угол γ и тот же противолежащий ей двугранный угол $\hat{c}$ при ребре c'. Поэтому по формуле (3)

$$cos\gamma = cos(\pi - \alpha) \cdot cos(\pi - \beta) + sin(\pi - \alpha) \cdot sin(\pi - \beta) \cdot cos\hat{c},$$

т.е. (3) верно и для этого случая.

3) Один из углов α и β, например α, острый, а другой — β — тупой. Возьмем тогда луч a', дополняющий луч a до прямой, и рассмотрим трехгранный угол $Oa'bc$. В нем две грани — острые углы, имеющие величины α и $\pi - \beta$, третья грань имеет величину $\pi - \gamma$ и величина противолежащего ей двугранного угла равна $\pi - \hat{c}$. Применяя формулу (3), получаем:

$$cos(\pi - \gamma) = cos\alpha \cdot cos(\pi - \beta) + sin\alpha \cdot sin(\pi - \beta) \cdot cos(\pi - \hat{c}),$$

откуда следует (3) для рассматриваемого случая.

4) Хотя бы один из углов α или β прямой. Тогда равенство (3) можно получить предельным переходом из уже рассмотренных случаев 1) —3).

Итак, формула (3) (будем называть ее формулой косинусов) установлена для любых трехгранных углов. Из нее с помощью обычных формул тригонометрии можно получить другие соотношения между элементами трехгранных углов. Выведем, например, аналог теоремы синусов. Для этого из (3) найдем $cos\hat{c}$ и, подставив его в равенство $sin^2\hat{c} = 1 - cos^2\hat{c}$, получаем:

$$sin^2\hat{c} = 1 - cos^2\hat{c} = 1 - \frac{(cos\gamma - cos\alpha \cdot cos\beta)^2}{sin^2\alpha \cdot sin^2\beta} =$$

$$= \frac{1 - cos^2\alpha - cos^2\beta - cos^2\gamma + 2cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma}{sin^2\alpha \cdot sin^2\beta}.$$

Поделив на $sin^2\gamma$, получаем равенство:

$$\frac{sin^2\hat{c}}{sin^2\gamma} = \frac{1 - cos^2\alpha - cos^2\beta - cos^2\gamma + 2cos\alpha \cdot cos\beta \cdot cos\gamma}{sin^2\alpha \cdot sin^2\beta \cdot sin^2\gamma}. \qquad (4)$$

Его правая часть симметрична относительно величин α, β, γ. Следовательно, если так же вычислить отношения $\frac{sin^2\hat{a}}{sin^2\alpha}$ и $\frac{sin^2\hat{b}}{sin^2\beta}$, то справа получим то же выражение, что и в (4). Поэтому эти отношения равны, а так как входящие в них синусы все положительные, то получаем следующий аналог теоремы синусов для трехгранного угла:

$$\frac{sin\hat{a}}{sin\alpha} = \frac{sin\hat{b}}{sin\beta} = \frac{sin\hat{c}}{sin\gamma}. \qquad (5)$$

Отметим еще один частный случай формулы (3): если двугранный угол при ребре c прямой, то $cos\hat{c} = 0$, и получаем, что

$$cos\gamma = cos\alpha \cdot cos\beta. \qquad (6)$$

Равенство (6) является аналогом теоремы Пифагора для "прямоугольного" трехгранного угла: его "гипотену-

за" — грань γ выражается через "катеты" — грани α и β.

5.3. **Равенство трехгранных углов.** Естественно назвать **два трехгранных угла равными,** если равны все их соответственные элементы, т.е. равны их соответственные грани и равны двугранные углы при соответственных ребрах. Признаки равенства трехгранных углов похожи на признаки равенства треугольников. Но есть и отличия: например, *два трехгранных угла равны, если соответственно равны их двугранные углы.* Вспомните, что два плоских треугольника, у которых соответственные углы равны, подобны. А для трехгранных углов аналогичное условие приводит не к подобию, а к равенству.

Обсудим четыре признака равенства трехгранных углов.

Первый признак: *по двум граням и двугранному углу, заключенному между этими гранями.* Равенство остальных элементов можно установить так. Сначала из теоремы косинусов установить равенство третьих граней, а затем из теоремы синусов получить равенство двух оставшихся двугранных углов.

Второй признак: *по грани и двум прилежащим к ней двугранным углам.* Непосредственно из уже полученных равенств (3) и (5) этот признак не вытекает. Но его можно свести к первому признаку, если воспользоваться замечательным свойством трехгранных углов, которое называется двойственностью. Оно состоит в следующем: если в какой-либо теореме о трехгранном угле $Oabc$ заменить величины $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ на $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ и наоборот, заменить α, β, γ на $\pi-\hat{a}$, $\pi-\hat{b}$, $\pi-\hat{c}$, то снова получим верное утверждение о трехгранных углах, двойственное исходной теореме. Правда, если такую замену произвести в теореме синусов, то снова придем к теореме синусов (она сама себе двойственна). Но если так сделать в теореме косинусов (3), то получим новую формулу

$$\cos\hat{c} = -\cos\hat{a}\cdot\cos\hat{b} + \sin\hat{a}\cdot\sin\hat{b}\cdot\cos\gamma . \qquad (7)$$

Из формулы (7) во втором признаке сначала можно установить равенство третьих двугранных углов, а затем по теореме синусов и равенство остальных пар граней.

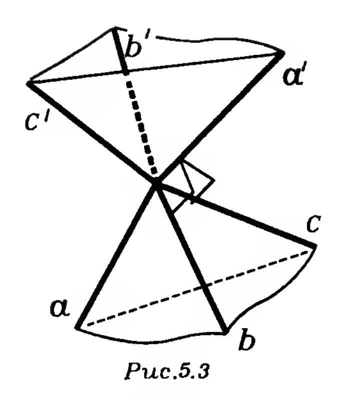


Рис.5.3

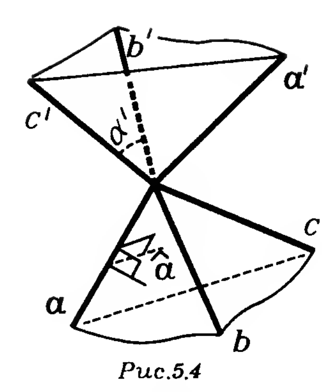


Рис.5.4

А почему имеет место двойственность становится ясно, если для трехгранного угла $Oabc$ построить двойственный ему трехгранный угол $Oa'b'c'$, ребра a', b', c' которого перпендикулярны граням исходного угла (рис.5.3). Величина грани α' двойственного угла в сумме с величиной двугранного угла $\hat{a}$ при соответсвующем ребре a исходного трехгранного угла равна π (рис.5.4), т.е. $\alpha' = \pi - \hat{a}$. А так как угол, двойственный к $Oa'b'c'$, снова будет углом $Oabc$, то и $\alpha = \pi - \hat{a}'$.

Записав теорему косинусов (3) для угла $Oa'b'c'$, и получим (7).

Третий признак: *по трем граням*. Сначала из теоремы косинусов (3) вытекает равенство одной пары двугранных углов, а затем по теореме синусов — и равенство остальных двух пар двугранных углов.

Четвертый признак: *по трем двугранным углам*. Он сводится к третьему применением двойственности.

Обдумайте, справедливы ли для трехгранных углов другие теоремы, аналогичные теоремам о свойствах треугольников. Например, справедливы ли аналоги теорем о замечательных точках треугольников или теорем о равнобедренном треугольнике.

5.4. **Сферические треугольники.** Фиксируем некоторую сферу S радиусом R с центром в точке O и выберем на S любые три точки A, B, C, не лежащие на одной большой окружности (рис.5.5). Среди них нет точек,

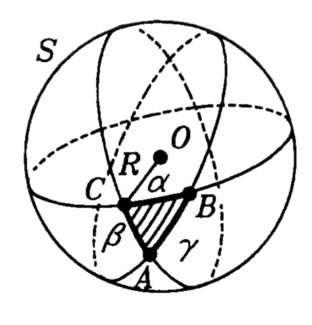


Рис.5.5

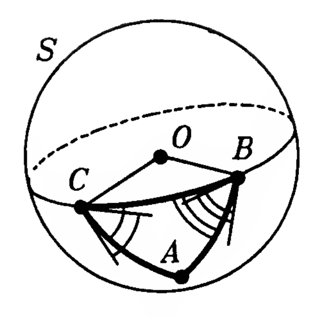


Рис.5.8

лежащих на одном диаметре сферы. Соединим точки A, B, C на S дугами больших окружностей (меньшими полуокружности). Обозначим через α дугу BC, через β — дугу AC и через γ — дугу AB. Фигура, состоящая из точек A, B, C, дуг α, β, γ и ограниченной ими части сферы S (меньшей полусферы), называется сферическим треугольником ABC. Точки A, B, C называются вершинами сферического треугольника ABC, дуги α, β, γ — его сторонами, а углами в его вершинах называются углы между касательными, проведенными из этих вершин к сторонам треугольника (рис.5.6).

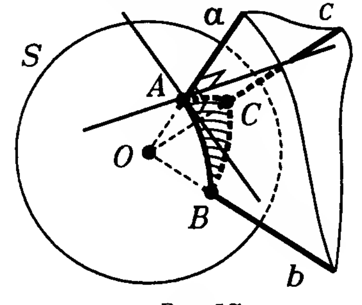


Рис.5.7

Между треугольниками на сфере S и трехгранными углами с вершиной в центре O сферы S естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому такому треугольнику ABC соответствует трехгранный угол $OABC$, ребра которого a, b, c проходят через вершины треугольника, и, наоборот, каждый трехгранный угол с вершиной в точке O "вырезает" на сфере S сферический треугольник (рис.5.7).

Более того, легко установить соответствие между элементами трехгранных углов и элементами соответст-

вующего сферического треугольника, т.е. длинами его сторон и величинами его углов.

Во-первых, так как касательные к окружности перпендикулярны радиусам, проведенным в точку касания, то *углы сферического треугольника равны соответствующим двугранным углам того трехгранного угла, который "вырезает" из сферы данный сферический треугольник* (рис.5.7):

$$\angle A = \hat{a}, \quad \angle B = \hat{b}, \quad \angle C = \hat{c}. \qquad (1)$$

Во-вторых, так как длина дуги окружности равна произведению радиуса на величину соответствующего центрального угла в радианах, то стороны α, β, γ сферического треугольника ABC выражаются через величины углов граней α_0, β_0, γ_0 соответствующего трехгранного угла по формулам

$$\alpha = R\alpha_0, \quad \beta = R\beta_0, \quad \gamma = R\gamma_0. \qquad (2)$$

Из полученных равенств (1) и (2) и доказанных в п.5.2 теорем синусов и косинусов для трехгранных углов можно получить соответствующие теоремы для сферических треугольников.

Например, обобщение теоремы синусов выражается так:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{R}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{\beta}{R}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{\gamma}{R}}{\sin C}, \qquad (3)$$

а обобщение теоремы Пифагора для прямоугольного сферического треугольника имеет такой вид:

$$\cos\frac{\gamma}{R} = \cos\frac{\alpha}{R} \cdot \cos\frac{\beta}{R}. \qquad (4)$$

Из равенства (4) следует, что $\alpha < \gamma$ и $\beta < \gamma$, т.е. *в прямоугольном сферическом треугольнике катет меньше гипотенузы*.

Исходя из признаков равенства трехгранных углов, сформулируйте признаки равенства сферических треугольников и сравните их с признаками равенства обычных плоских треугольников. Найдите и попробуйте доказать для сферических треугольников и другие аналоги теорем о плоских треугольниках, например, аналоги

теорем о равнобедренных треугольниках или теорем о замечательных точках треугольников. Из этих теорем мы выделим в следующем пункте лишь "неравенство треугольника".

5.5. **"Неравенство треугольника" для трехгранных углов и сферических треугольников.**

Т е о р е м а. **У любого трехгранного угла сумма углов двух его граней больше угла третьей грани.**

Эта теорема равносильна для сферических треугольников такой теореме:

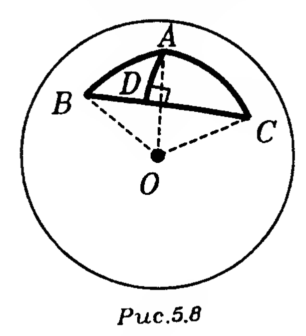


Рис.5.8

Т е о р е м а. **У любого сферического треугольника сумма любых двух сторон больше третьей стороны.**

□ Рассмотрим сферический треугольник ABC со сторонами $\alpha = BC$, $\beta = AC$ и $\gamma = AB$ (рис.5.8). Пусть α — наибольшая из его сторон. Тогда доказать надо лишь неравенство $\beta + \gamma > \alpha$. Проведем высоту AD в треугольнике ABC. Поскольку сторона BC — наибольшая, то высота AD лежит внутри треугольника ABC и разбивает его на два прямоугольных треугольника ABD и ACD с общим катетом AD и катетами $BD = \alpha_1$ и $CD = \alpha_2$. Поскольку катет меньше гипотенузы, то $\alpha_1 < \beta$ и $\alpha_2 < \gamma$. А тогда

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 < \beta + \gamma \text{, т.е., } \beta + \gamma > \alpha. \blacksquare$$

§6. ЦИЛИНДР

6.1. **Определение и общие свойства цилиндра.** Слово цилиндр часто встречается в технике. Цилиндры обычно представляют себе круглыми, т.е. с круглым основанием (рис.6.1*а*). В общем же случае их можно определить так.

Пусть даны две параллельные плоскости α и α' и на плоскости α задана некоторая фигура F. Из всех точек фигуры F проведем параллельные друг другу от-

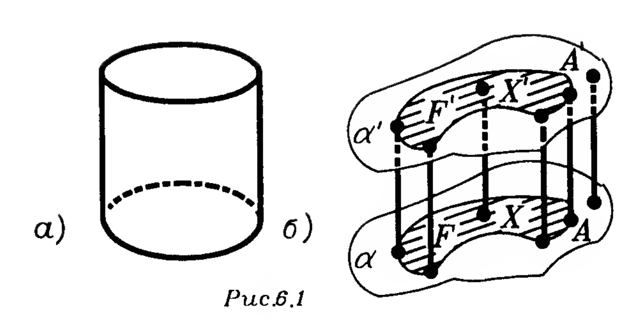


Рис.6.1

резки до плоскости α'. Фигура, которую образуют эти отрезки, и называется **цилиндром** (рис.6.1*б*). Фигура F, из точек которой проведены отрезки, называется **основанием цилиндра.** Отрезки, образующие цилиндр, так и называются его **образующими.**

Укажем простейшие свойства цилиндра.

Свойство 1. *Все образующие цилиндра равны друг другу.*

Это свойство вытекает из следующей простой леммы, полезной и в других ситуациях.

Лемма. **Параллельные отрезки, концы которых лежат на параллельных плоскостях, равны.**

Действительно, пусть концы X и Y параллельных отрезков XX' и YY' лежат в плоскости α, а их вторые концы — X' и Y' — лежат в плоскости α', параллельной плоскости α (рис.6.2). Проведем плоскость β через параллельные прямые XX' и YY'.

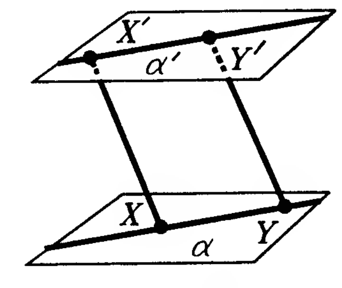


Рис.6.2

Плоскость β пересечет параллельные плоскости α и α' по параллельным прямым XY и $X'Y'$. Так как $XX' \parallel YY'$ и $XY \parallel X'Y'$, то четырехугольник $XX'Y'Y$ — параллелограмм, и потому $XX' = YY'$. ■

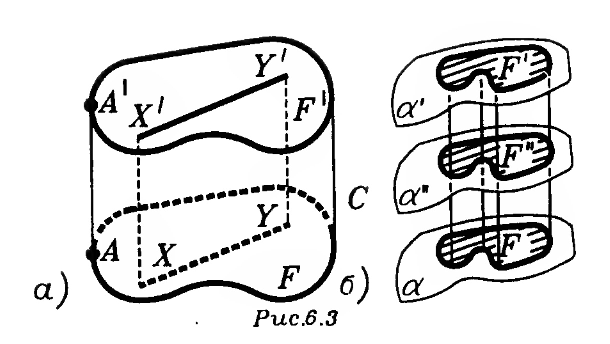


Рис.6.3

Концы образующих рассматриваемого цилиндра на плоскости α', параллельной плоскости α, образуют некоторую фигуру F'. Можно считать, что образующие выходят из нее. Поэтому и фигура F' может считаться основанием цилиндра. Если, как обычно принято, представлять плоскости оснований горизонтальными, то одно основание называется **нижним**, а другое — **верхним**.

С в о й с т в о 2. *Основания цилиндра равны друг другу.*

Действительно, пусть F и F' — основания данного цилиндра. Каждой точке $X \in F$ соответствует точка X' — конец образующей, идущей из точки X. Если точкам X, Y основания F соответствуют точки X', Y' основания F', то отрезки XX' и YY' равны и параллельны (рис.6.3*а*). Стало быть, четырехугольник $XX'Y'Y$ — параллелограмм. Поэтому отрезки XY и $X'Y'$ также равны и параллельны. Равенство отрезков XY и $X'Y'$ (для произвольно выбранных точек X, Y) и означает равенство фигур F и F'. ■

С в о й с т в о 3. *Все сечения цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям основания цилиндра, равны основанию цилиндра.*

Действительно, любое такое сечение является общим основанием двух цилиндров, на которые секущая плоскость разбивает данный цилиндр (рис.6.3*б*). Поэтому оно равно другим основаниям этих цилиндров, которые являются основаниями исходного цилиндра. ■

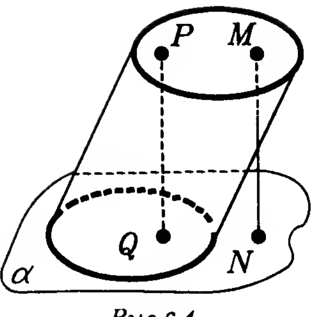


Рис.6.4

З а м е ч а н и е. Можно сказать, что цилиндр получается при параллельном переносе основания вдоль образующих. Он получается также параллельным переносом образующей по основанию. Переносим ли мы параллельно образующие по основанию или основание по образующим — получим один и тот же цилиндр.

Перпендикуляр, опущенный из любой точки плоскости одного основания цилиндра на плоскость другого его основания, называется **высотой цилиндра** (рис.6.4). Длину такого перпендикуляра также называют высотой цилиндра. Так как плоскости оснований параллельны, то перпендикуляры у них общие и все они равны. Поэтому высоту можно проводить из любой точки плоскости основания.

Для того, чтобы задать цилиндр, достаточно задать его основание и одну образующую. Соответственно, цилиндры различаются по виду оснований и наклону образующих.

Цилиндр называется **прямым**, если его образующие перпендикулярны плоскости основания (рис.6.5). Для этого достаточно, чтобы какая-то образующая была перпендикулярна плоскости основания, так как остальные образующие параллельны ей и тоже будут перпендикулярны к плоскости основания.

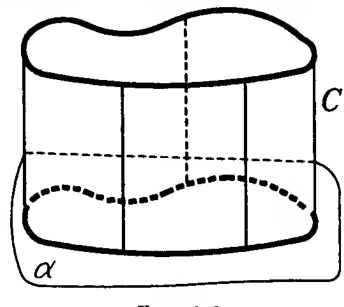
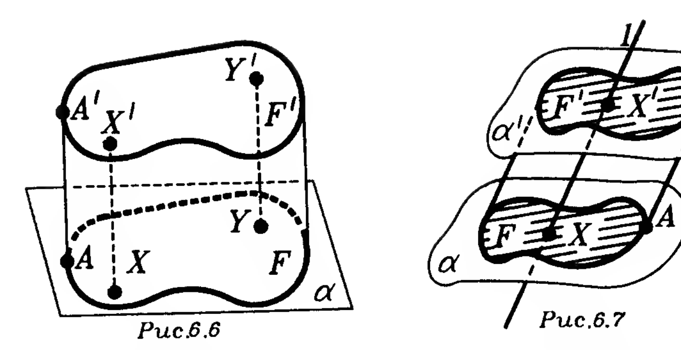


Рис.6.5

З а м е ч а н и е. Цилиндрами называются также фигуры, образуемые не только отрезками, но и параллельными прямыми. Мы такие цилиндры не рассматриваем.

6.2. **Другой подход к определению цилиндра.** Цилиндру можно дать и другое определение, равносильное первому. А именно, цилиндр можно определить как фигуру, образованную равными и параллельными друг дру-



гу отрезками, идущими из всех точек некоторой плоской фигуры F (основания цилиндра) в одну сторону от ее плоскости α (рис.6.6).

Чтобы убедиться, что такое определение цилиндра приводит к тому же результату, что и определение, данное в п.6.1, необходимо проверить, что концы отрезков, о которых идет речь во втором определении, лежат в одной плоскости α', параллельной плоскости α. Сделаем такую проверку. Возьмем некоторую точку A, принадлежащую фигуре F, построим отрезок AA' и проведем через точку A' плоскость α', параллельную плоскости α (рис.6.7). Если теперь взять любую точку $X \in F$ и провести через X прямую l, параллельную прямой AA', то l пересечет плоскость α' в такой точке X', что $XX' = AA'$ (по лемме п.6.1). А это и означа-

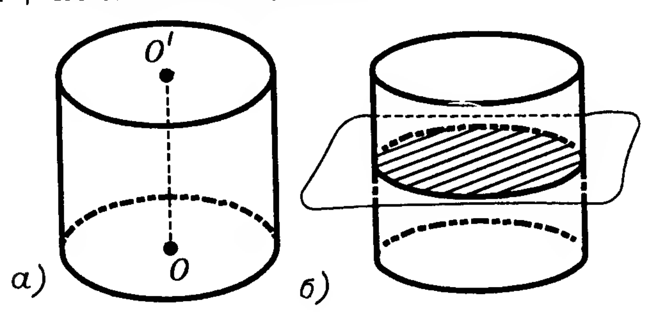


Рис.6.8

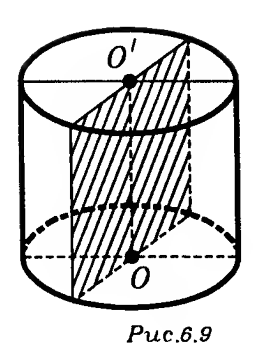


Рис.6.9

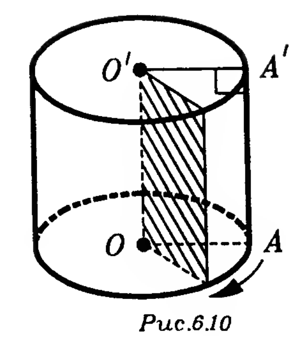


Рис.6.10

ет, что концы всех отрезков XX', равных и параллельных отрезку AA' и идущих с ним в одном направлении от плоскости α, лежат в плоскости $\alpha' \parallel \alpha$.

6.3. **Цилиндр вращения.** Рассмотрим прямой цилиндр, основание которого — круг (рис.6.8*а*), т.е. **прямой круговой цилиндр.** Отрезок, соединяющий центры его оснований, называется **осью цилиндра.**

Покажем, что *ось прямого кругового цилиндра является его осью вращения, а сам он — фигура вращения.*

Действительно, все сечения прямого кругового цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям оснований, являются кругами с центрами на оси (по свойству 3 п.6.1). Плоскости этих кругов перпендикулярны оси (рис.6.8*б*). Поэтому прямой круговой цилиндр является фигурой вращения и его называют **цилиндром вращения.** Он получается вращением прямоугольника вокруг своей оси симметрии (рис.6.9), а также вращением прямоугольника вокруг стороны (рис.6.10). Из сказанного следует, что сечение цилиндра вращения любой плоскостью, проходящей через ось цилиндра, является прямоугольником (рис.6.11). Эти прямоугольники и называются **осевыми сечениями цилиндра вращения.**

Образующие цилиндра вращения, исходящие из точек окружности основания, образуют его **боковую поверхность.** Она сама является цилиндром, основанием которого служит окружность. Боковая поверхность тоже будет фигурой вращения.

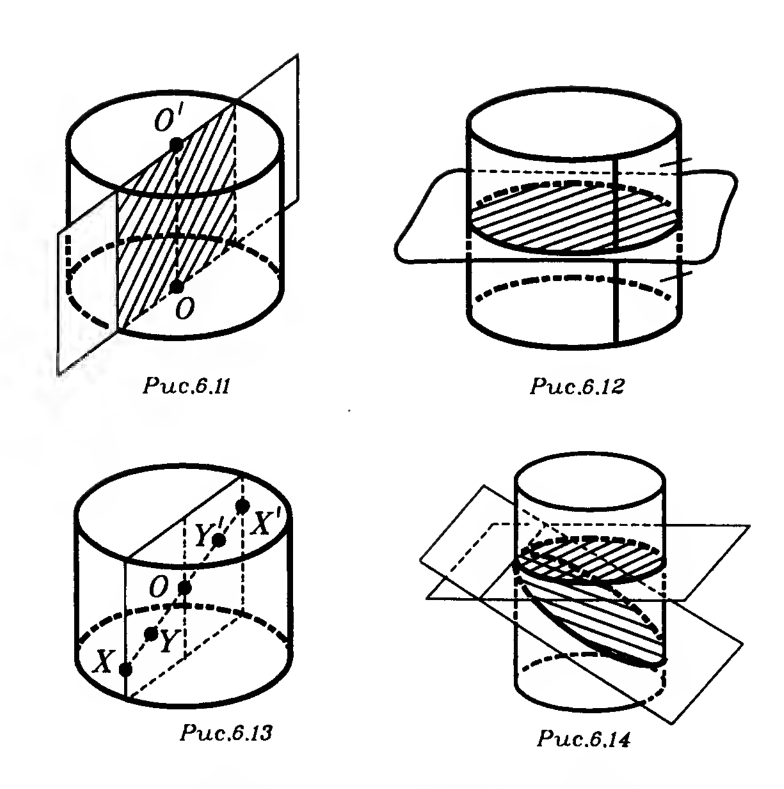


Рис.6.11

Рис.6.12

Рис.6.13

Рис.6.14

Поверхностью цилиндра вращения называется объединение его оснований и боковой поверхности цилиндра. Поверхность цилиндра вращения иногда называют его полной поверхностью, подчеркивая этим, что она состоит из боковой поверхности и двух оснований.

Цилиндр вращения симметричен относительно любой плоскости, проходящей через его ось (рис.6.11), а также относительно плоскости, делящей пополам его образующие (рис.6.12). Цилиндр вращения имеет центр симметрии — середину его оси (рис.6.13).

Как нарисовать цилиндр вращения видно из рисунка 6.8*а*; основания изображаются эллипсами.

*6.4. **Эллипс как сечение цилиндра вращения.** Если боковую поверхность цилиндра пересечь плоскостью так, чтобы эта плоскость не пересекала его оснований, то

в сечении получится эллипс (рис.6.14). Это следует из определения эллипса как параллельной проекции окружности на плоскость. (Поэтому, наклонив стакан с водой, вы наблюдаете эллипс).

Рассматривая эллипс как сечение цилиндра вращения, докажем важное метрическое свойство эллипса, (метрическими называются свойства, которые выражаются через расстояния), которое дает еще один подход к определению эллипса (а также позволяет его построить, точнее, начертить).

Сумма расстояний от любой точки эллипса до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Пусть эллипс E получен как сечение боковой поверхности цилиндра вращения C плоскостью α (рис.6.15). Впишем в цилиндр C два шара D_1 и D_2, касающиеся как цилиндра, так и плоскости α (цилиндр можно взять достаточно высоким, чтобы шары D_1 и D_2 не пересекали его оснований). Точки касания шаров D_1 и D_2 с плоскостью α обозначим F_1 и F_2 и назовем фокусами эллипса. Окружности, по которым D_1 и D_2 касаются цилиндра C, обозначим через S_1 и S_2. Ясно, что S_1 и S_2 — большие окружности шаров D_1 и D_2, а плоскости, в которых лежат S_1 и S_2, перпендикулярны оси цилиндра C. Поэтому все отрезки образующих цилиндра с концами в точках окружностей S_1 и S_2 равны друг другу. Обозначим их длину через $2a$. Возьмем любую точку $X \in E$. Проведем через точку X образующую ци-

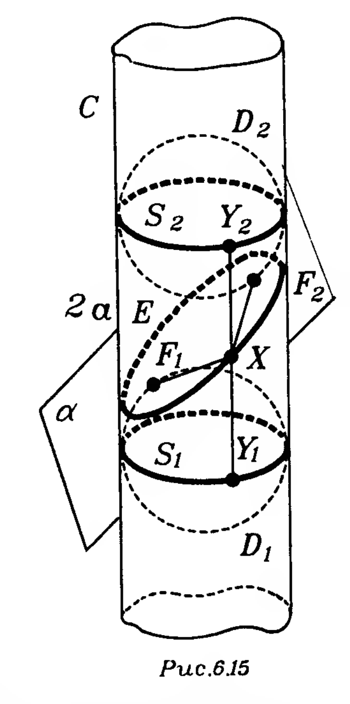


Рис.6.15

линдра C. Она пересечет S_1 и S_2 в точках Y_1 и Y_2. Так как отрезки XF_1 и XY_1 касаются шара D_1 в точках F_1 и Y_1 и имеют общий конец X, то $XF_1 = XY_1$. Аналогично $XF_2 = XY_2$. Поэтому

$$XF_1 + XF_2 = XY_1 + XY_2 = Y_1Y_2 = 2a. \blacksquare$$

Из произведенных построений ясно, что прямая F_1F_2 будет осью симметрии эллипса (рис.6.16). Отрезок A_1A_2 этой прямой с концами на эллипсе является большим диаметром эллипса, и длина его равна $2a$ (так как $A_1F_1 = A_2F_2$). Точка O — середина отрезков F_1F_2 и A_1A_2 — будет центром симметрии эллипса. Проходящий через точку O отрезок B_1B_2, перпендикулярный A_1A_2, с концами на эллипсе будет малым диаметром эллипса. Его длина $2b$ равна диаметру шаров D_1 и D_2 (диаметру основания цилиндра C). Так как $B_1F_1 = B_1F_2$ и $B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$, то $B_1F_1 = a$. Если длину отрезка F_1F_2 обозначить через $2c$, то $OF_1 = OF_2 = c$, и из прямоугольного треугольника OF_1B_1 получаем, что

$$a^2 = b^2 + c^2. \qquad (1)$$

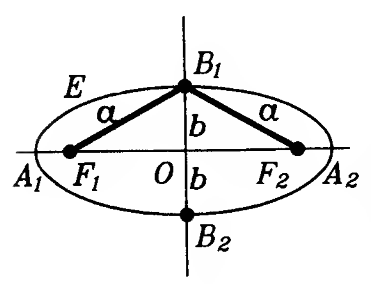


Рис.6.16

Эти соотношения и зависимости между элементами эллипса позволяют нам теперь показать, что множество точек на плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная (и бóльшая, чем расстояние между фокусами), является эллипсом.

Действительно, пусть на плоскости α даны две точки F_1 и F_2 и задано некоторое расстояние $2a > |F_1F_2| = 2c$. По этим данным находим из равенства (1)

радиус $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ шаров D_1 и D_2, и строим эти шары, касающиеся плоскости α в точках F_1 и F_2 по разные стороны от α. Цилиндр C, касающийся шаров D_1 и D_2 (его образующие параллельны прямой, проходящей через центры D_1 и D_2), пересекает плоскость α по искомому эллипсу, для которого точки F_1 и F_2 — фокусы и $2a$ — сумма расстояний от точек эллипса до фокусов. (Для окружности $F_1 = F_2$, $c = 0$ и $a = b$.)

Опираясь на доказанное свойство, легко нарисовать эллипс. Для этого надо (булавками или кнопками) закрепить нить в двух точках (фокусах эллипса), а затем, натянув ее карандашом, начертить эллипс (рис.6.17).

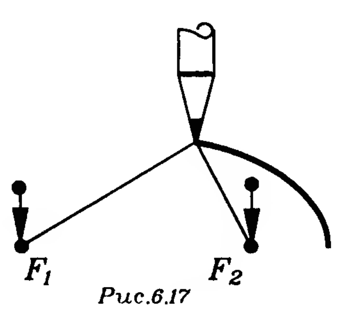


Рис.6.17

*6.5. **Винтовые линии.** Кратчайшими линиями на плоскости, соединяющими две точки, являются отрезки. Как было сказано в п.4.2, кратчайшими линиями на сфере, соединяющими две точки, являются дуги больших окружностей. Рассмотрим задачу о кратчайших линиях, соединяющих пары точек A, B на боковой поверхности цилиндра вращения. Ясно, что когда точки A, B лежат на образующей цилиндра, соединяющей их кратчайшей линией будет отрезок AB. Если же точки A, B не лежат на одной образующей, то кратчайшей линией, соединяющей A и B на боковой поверхности цилиндра, будет дуга винтовой линии.

Винтовой линией называется кривая, которую описывает точка, совершающая равномерное винтовое движение. Винтовое движение слагается из равномерного движения вдоль прямой и равномерного движения вокруг прямой, причем движущаяся точка остается на постоянном расстоянии от этой прямой (рис.6.18). Эта прямая может быть названа осью винтового движения и соответственно осью винтовой линии.

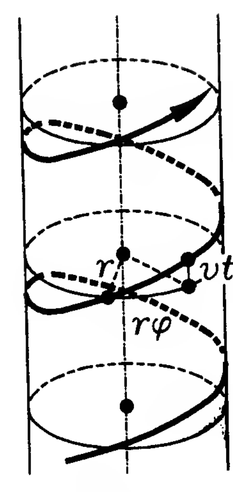


Рис.6.18

Из данного определения следует, что винтовая линия лежит на цилиндре с той же осью. Окружность можно считать частным случаем винтовой линии, когда точка лишь вращается вокруг прямой, не совершая движения вдоль прямой.

Модель винтовой линии можно получить, если реальный цилиндр вращения (например, круглую палку) туго обмотать ниткой.

Винтовая линия в общем случае, т.е. не сводящаяся к окружности, не лежит ни в какой плоскости, т.е. она является не плоской, а пространственной кривой.

6.6. **Цилиндры в практике.** Предметы, имеющие более или менее точную форму цилиндра, а также и такие, у которых есть детали цилиндрической формы, встречаются повсеместно: в быту, в строительстве, в технике — и играют важнейшую роль. Оси автомобилей и вагонов, цилиндры и поршни двигателей и т.д. — все они имеют главные части в виде круговых цилиндров. Стальные трубы представляют собой прямые цилиндры с тонким круговым кольцом в основании.

Под цилиндрами понимают обычно круглые предметы, но если иметь в виду цилиндры в нашем общем смысле, то можно привести множество других примеров.

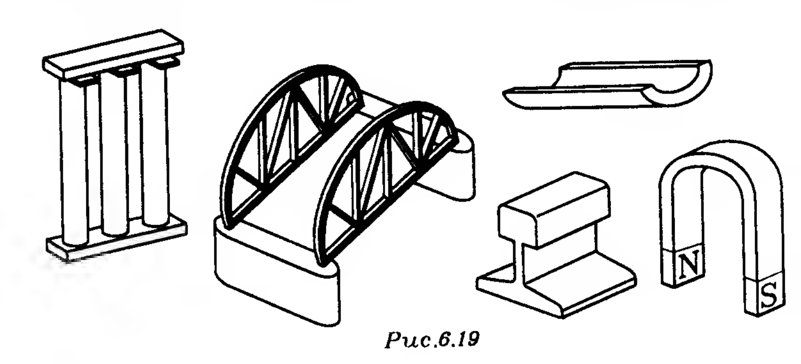


Рис.6.19

Рельсы, различные виды проката, бетонные желоба и другие изделия имеют разнообразные формы цилиндров (хотя и не круглых). В практике их характеризуют формой перпендикулярного сечения. Колонны, если они не сужаются кверху, столбы и балки в строительных конструкциях имеют форму цилиндров, в частности, призм, прямых или наклонных (рис.6.19). Например, мостовые фермы составляются сплошь из частей, имеющих форму призм.

§7. ПРИЗМА

7.1. **Определение и общие свойства призмы.** Призма является частным случаем цилиндра. А именно: **призмой называется цилиндр, основание которого — многоугольник.** Если основание призмы — n-угольник, то призма называется ***n*-угольной** (рис.7.1).

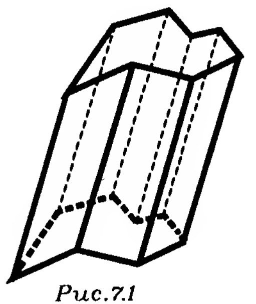


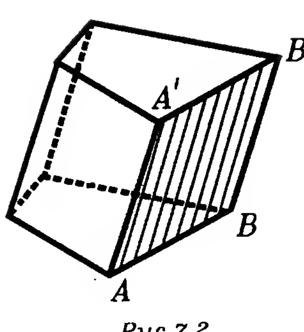
Рис.7.1

Так как основания любого цилиндра равны друг другу, то оба основания призмы являются равными друг другу многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях (свойство 2 п.6.1). Соответственные стороны этих многоугольников параллельны.

Каждая пара соответственных сторон оснований призмы является противоположными сторонами параллелограмма, заполненного образующими призмы (рис.7.2). Эти параллелограммы называются **боковыми гранями призмы.** Те стороны боковых граней, которые не лежат на основаниях, называются **боковыми ребрами призмы.**

Объединение боковых граней призмы называется ее **боковой поверхностью. Поверхностью призмы** является объединение оснований призмы и ее боковой поверхности.

Тем самым, n-угольная призма ограничена двумя равными n-угольниками — основаниями — и n боковыми гранями — параллелограммами. Любой из этих парал-



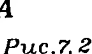


Рис.7.2

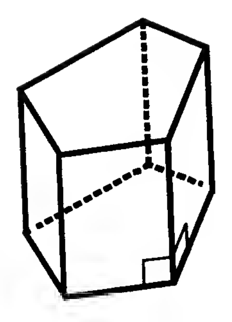


Рис.7.3

лелограммов имеет с каждым основанием по одной общей стороне. Итак, призму можно определить и как многогранник, две грани которого — основания призмы — равные n-угольники, а еще n граней — параллелограммы, имеющие с основаниями по одной общей стороне.

Поскольку призма — цилиндр, то все понятия, относящиеся к цилиндрам, относятся и к призмам. Например, **высота призмы** — это общий перпендикуляр плоскостей, где лежат основания призмы (или его длина). Призма называется **прямой,** если ее боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований (рис.7.3). Не прямые призмы называют **наклонными** (рис.7.1).

Правильной призмой называется прямая призма, основание которой — правильный многоугольник (рис.7.4).

Перпендикулярным сечением призмы называется проекция ее основания на любую плоскость, перпендику-

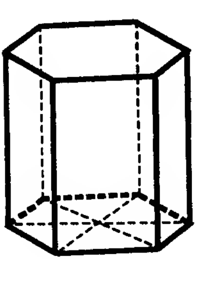


Рис.7.4

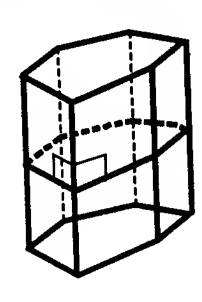


Рис.7.5

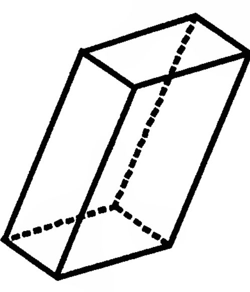


Рис.7.6

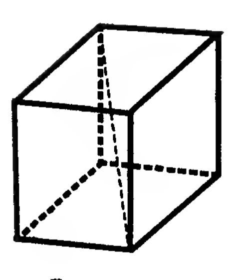


Рис.7.7

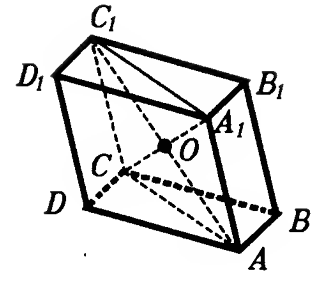


Рис.7.8

лярную боковым ребрам призмы (рис.7.5). Все *перпендикулярные сечения одной призмы равны друг другу. Перпендикулярные сечения прямой призмы равны ее основаниям.*

7.2. **Параллелепипед.** Подобно тому как тетраэдр является пространственным аналогом треугольника, так параллелепипед является пространственным аналогом параллелограмма.

Параллелепипед можно определить как призму, в основании которой — параллелограмм (рис.7.6). Таким образом, параллелепипед — это призма, у которой все грани — параллелограммы. Их всего шесть. Грани параллелепипеда распадаются на три пары равных и параллельно расположенных граней. Поэтому любую грань параллелепипеда можно принять за его основание.

Для каждой вершины параллелепипеда есть одна противоположная ей вершина, та которая не лежит с данной вершиной в одной грани. Отрезок, соединяющий противоположные вершины параллелепипеда, называется **диагональю параллелепипеда** (рис.7.7). У параллелепипеда четыре диагонали.

Докажем, что *диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.*

Возьмем две диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, например, диагонали AC_1 и A_1C (рис.7.8). Поскольку четырехугольник ACC_1A_1 — параллелограмм ($AA_1 = CC_1$ и $AA_1 \| CC_1$), то диагонали AC_1

и A_1C пересекаются в некоторой точке O и делятся ею пополам.

Диагонали BD_1 и AC_1 являются диагоналями параллелограмма ABC_1D_1 ($AB = C_1D_1$ и $AB \| C_1D_1$), а потому пересекаются в середине диагонали AC_1, т.е. в точке O. Следовательно, и диагональ BD_1 проходит через точку O и делится ею пополам. Наконец, диагонали B_1D и AC_1 как диагонали параллелограмма ADC_1B_1 пересекаются в точке, которая делит их пополам. Итак, все диагонали AC_1, A_1C, BD_1 и B_1D параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходят через одну точку O и делятся ею пополам. ■

7.3. **Прямоугольный параллелепипед.** Пространственным аналогом прямоугольника является прямоугольный параллелепипед. Параллелепипед называется **прямоугольным,** если все его грани — прямоугольники (рис.7.9). **Куб** — это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны. Куб является пространственным аналогом квадрата. Все грани куба — квадраты.

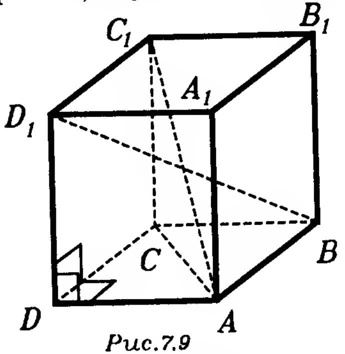


Рис.7.9

Наглядно очевидны следующие основные свойства прямоугольного параллелепипеда (но вы все-таки докажите их самостоятельно):

1) *ребра, сходящиеся в каждой вершине прямоугольного параллелепипеда, взаимно перпендикулярны;*

2) *каждое ребро прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно его противоположным граням, на которых лежат концы ребра;*

3) *любые две грани прямоугольного параллелепипеда либо параллельны, либо перпендикулярны.*

Пространственным аналогом теоремы Пифагора является следующее утверждение: *квадрат диагонали*

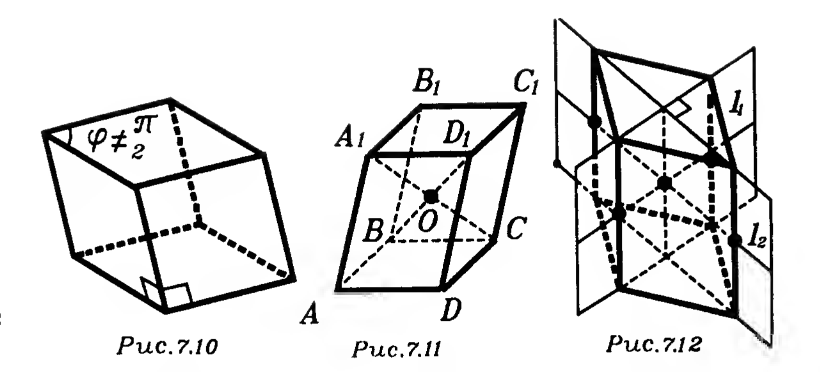


Рис.7.10 Рис.7.11 Рис.7.12

прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его ребер, исходящих из одной вершины (рис.7.9).

Действительно, из прямоугольных треугольников ABC и ACC_1 получаем: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ и $AC_1^2 = = AC^2 + CC_1^2$. Поэтому $AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2$. И так как $BC = AD$ и $CC_1 = AA_1$, то $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + + AA_1^2$. ■

Прямоугольный параллелепипед, конечно, является прямой призмой. Но среди параллелепипедов есть и такие, которые будут прямыми, но не прямоугольными (рис.7.10). У таких прямых параллелепипедов две пары граней — прямоугольники (их естественно считать боковыми гранями), а одна пара граней — параллелограммы, отличные от прямоугольников, — основания прямого параллелепипеда.

7.4. **Симметрия параллелепипеда.** Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам. Поэтому противоположные вершины параллелепипеда симметричны относительно этой точки. Следовательно, каждый параллелепипед имеет центр симметрии — точку пересечения его диагоналей (рис.7.11).

В общем случае осей и плоскостей симметрии параллелепипед не имеет. Прямой, но не прямоугольный параллелепипед всегда имеет ось симметрии — прямую, проходящую через центры симметрии его оснований, и

плоскость симметрии, проходящую через середины его боковых ребер. Если основания прямого параллелепипеда — ромбы (но не квадраты), то появляются еще две оси и две плоскости симметрии (рис.7.12).

Найдите сами элементы симметрии прямоугольного параллелепипеда, среди граней которого нет квадратов. Если среди граней прямоугольного параллелепипеда есть квадраты, то он является правильной четырехугольной призмой. Симметрия правильных призм рассмотрена в следующем пункте, а симметрия куба — в §12.

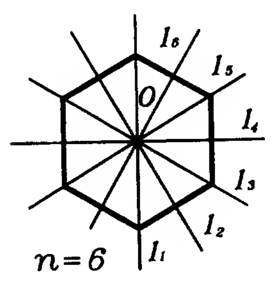


Рис.7.13

7.5. **Симметрия правильных призм. Поворот вокруг прямой.** Напомним, что правильной называется прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник. Симметричность правильных призм определяется симметричностью их оснований (рис.7.13), а так же перпендикулярностью основаниям боковых ребер и граней.

У правильной n-угольной призмы имеется n плоскостей симметрии, проходящих через соответствующие оси симметрии оснований призмы (рис.7.14). Кроме того, у нее имеется еще одна плоскость симметрии, которая проходит через середины боковых ребер (рис.7.15).

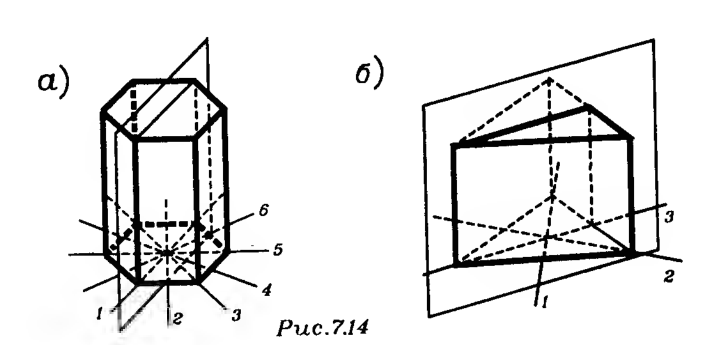


Рис.7.14

Осями симметрии правильной n-угольной призмы всегда являются n осей симметрии сечения этой призмы, проходящего через середины боковых ребер (рис.7.16). Если к тому же n четно, то осью симметрии является еще прямая, которая соединяет центры оснований (рис.7.17). Если же n нечетно, то это не так и других осей симметрии нет.

Отрезок, соединяющий центры оснований правильной призмы, называется ее осью (рис.7.17).

Если n четно, то середина оси правильной n-угольной призмы является центром симметрии этой призмы (рис.7.18). Если же n нечетно, то центра симметрии у правильной призмы нет (как и у ее основания).

Итак, симметричность правильной n-угольной призмы определяется симметричностью ее основания — правильного n-угольника. Но, как известно из планиметрии, правильные n-угольники имеют еще один вид симметрии — вращательную, т.е. они самосовмещаются при повороте вокруг своего центра на угол $\varphi = \dfrac{360^\circ}{n}$ (рис.7.19), а также на любой угол, кратный φ. Аналогично, правильные n-угольные призмы самосовмещаются при повороте вокруг своей оси на такой же угол φ (рис.7.20).

Подробнее это означает следующее. Плоскости, перпендикулярные оси правильной n-угольной призмы P, параллельны ее основанию. Поэтому все сечения призмы P такими плоскостями равны ее основанию и проектируются на него. Центры этих правильных n-угольников лежат на оси призмы. Поэтому, если эти многоугольники одновременно повернуть в их плоскостях в одном направлении на угол φ вокруг их центров, то все они самосовместятся. А потому при таком преобразовании и призма P самосовместится. Такое преобразование призмы называется **поворотом вокруг прямой** — оси призмы — **на угол** φ. Тем самым призма среди симметрий имеет и поворотную симметрию.

Заметим еще, что осевая симметрия в пространстве является поворотом на 180° вокруг оси симметрии. Действительно, в результате поворота на 180° вокруг пря-

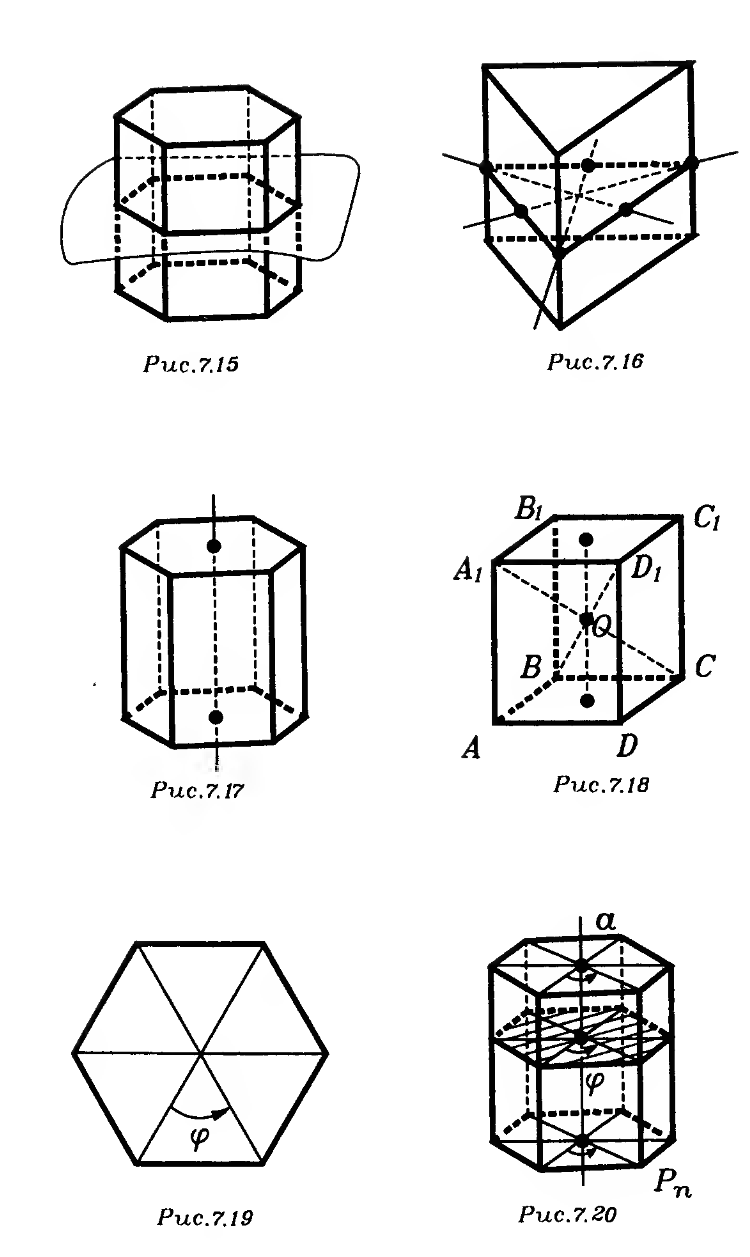


Рис.7.15

Рис.7.16

Рис.7.17

Рис.7.18

Рис.7.19

Рис.7.20

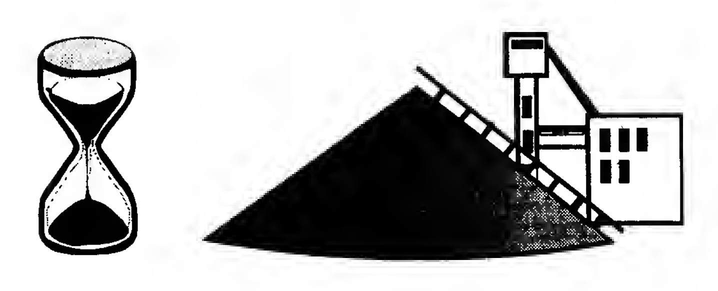


Рис.8.1

мой a точка X, не лежащая на прямой a, перейдет в такую точку X', что прямая a перпендикулярна отрезку XX' и пересекает его в середине.

§8. КОНУС

8.1. **Определение конуса.** Форму конуса (приближенно) имеют терриконы и вулканы, воронки и колбы, кульки и кучи песка и т.д. (рис.8.1). В геометрии же конус, как и цилиндр, определяют как фигуру, образованную отрезками.

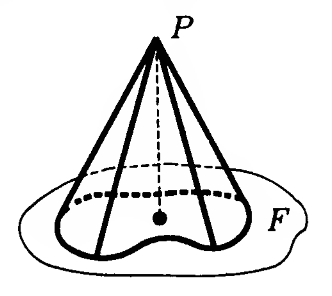


Рис.8.2

Пусть дана плоская фигура F и некоторая точка P, не лежащая с фигурой F в одной плоскости. Отрезки, проведенные из точки P во все точки фигуры F, образуют фигуру, которую называют **конусом** (рис.8.2). Точка P называется **вершиной конуса**, а фигура F — **основанием конуса.** Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками его основания, называются **образующими конуса**.

Высотой конуса называется перпендикуляр из вершины конуса на плоскость его основания (рис.8.3), а также длина этого перпендикуляра.

З а м е ч а н и е. Конусом называют также фигуры, образованные лучами, идущими из точки P через точки фигуры F (рис.8.4*а*), а также и фигуры, образованные прямыми, проходящими через точки фигуры F и точку P (рис.8.4*б*). В этих случаях образующими конуса являются лучи или прямые, а фигура F называется **направляющей конуса**. Оснований у таких конусов нет. Нам придется рассматривать такие конусы лишь в п.8.6, где рассказывается о конических сечениях.

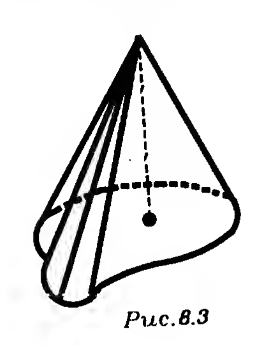


Рис.8.3

8.2. Сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости основания.

Т е о р е м а (о сечении конуса). **Если плоскость пересекает конус и параллельна плоскости его основания, то сечение конуса такой плоскостью подобно основанию конуса. Коэффициент их подобия равен отношению расстояния от вершины конуса до плоскости сечения к высоте конуса.**

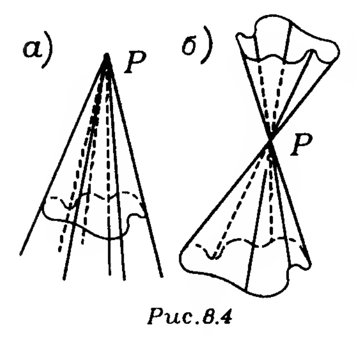


Рис.8.4

Напомним, что фигура F' подобна фигуре F с коэффициентом $k>0$, если можно так сопоставить их точки, что $X'Y'=kXY$ для любых точек X, Y фигуры F и соответствующих им точек X', Y' фигуры F' (рис.8.5).

□ Пусть P — вершина конуса K, фигура F — его основание, F' — сечение конуса K плоскостью α', параллельной плоскости α основания F (рис.8.6). Докажем, что фигуры F' и F подобны. Для этого каждой точке $X \in F$ сопоставим точку $X' \in F'$, в которой отрезок PX пересекает плоскость α'.

Проведем высоту PA конуса K и пусть A' — точка, в которой высота PA пересекает плоскость α'. Отре-

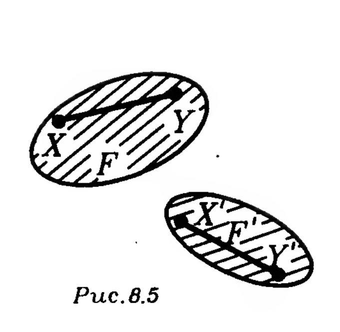


Рис.8.5

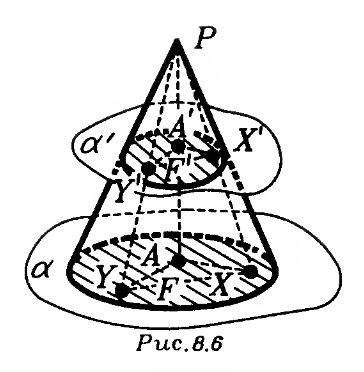


Рис.8.6

зок PA' является высотой конуса K', отсеченного плоскостью α'.

Возьмем любые две точки X, Y основания F и пусть X', Y' — соответствующие им точки F'. Рассмотрим треугольники PXY и $PX'Y'$. Они подобны, так как отрезки $X'Y'$ и XY параллельны (поскольку плоскость PXY пересекает параллельные плоскости α и α' по параллельным прямым). Поэтому

$$X'Y' : XY = PX' : PX. \qquad (1)$$

Теперь рассмотрим треугольники PAX и $PA'X'$. Они также подобны и потому

$$PX' : PX = PA' : PA. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $X'Y' : XY = PA' : PA$, а это и означает подобие фигур F' и F с коэффициентом $k = PA' : PA$. ■

8.3. **Конус вращения.** Рассмотрим конус, у которого основание круг, а вершина P проектируется в центр O его основания (рис.8.7*а*). Как следует из теоремы о сечении конуса, в пересечении такого конуса с плоскостями, параллельными плоскости его основания (и, тем самым, перпендикулярными его высоте PO), получаются круги с центрами на высоте PO (рис.8.7*б*). Следовательно, рассматриваемый конус является фигурой вращения: его высота и есть его ось вращения. Поэтому такой конус называют конусом вращения.

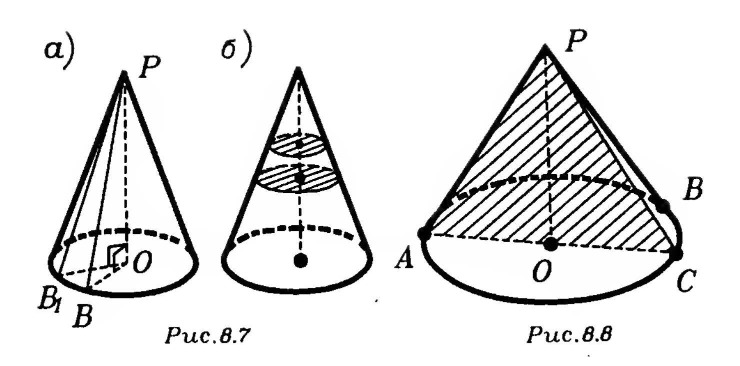


Рис.8.7

Рис.8.8

Итак, **конусом вращения** называется конус, основание которого — круг и вершина которого проектируется в центр основания.

Осевые сечения конуса вращения — это его сечения плоскостями, проходящими через его ось (рис.8.8). Все такие сечения представляют собой равнобедренные треугольники, поскольку вершина конуса вращения равноудалена от всех точек окружности его основания.

"Половина" осевого сечения конуса вращения — прямоугольный треугольник с катетом на оси конуса (рис.8.7*а*). Прямой круговой конус и получается вращением вокруг катета этого треугольника или вращением равнобедренного треугольника вокруг оси симметрии.

Любая плоскость, проходящая через ось конуса вращения, является его плоскостью симметрии.

Фигура, состоящая из тех образующих конуса вращения, которые соединяют его вершину с окружностью основания, называется **боковой поверхностью конуса вращения.** Она сама является конусом вращения с той же вершиной, основанием которого служит окружность основания исходного конуса вращения. *Все образующие, лежащие на боковой поверхности конуса вращения, равнонаклонены к плоскости его основания* (рис.8.9).

Поверхность конуса вращения состоит из его основания и его боковой поверхности. (Поверхность конуса вращения называют также его **полной поверхностью**).

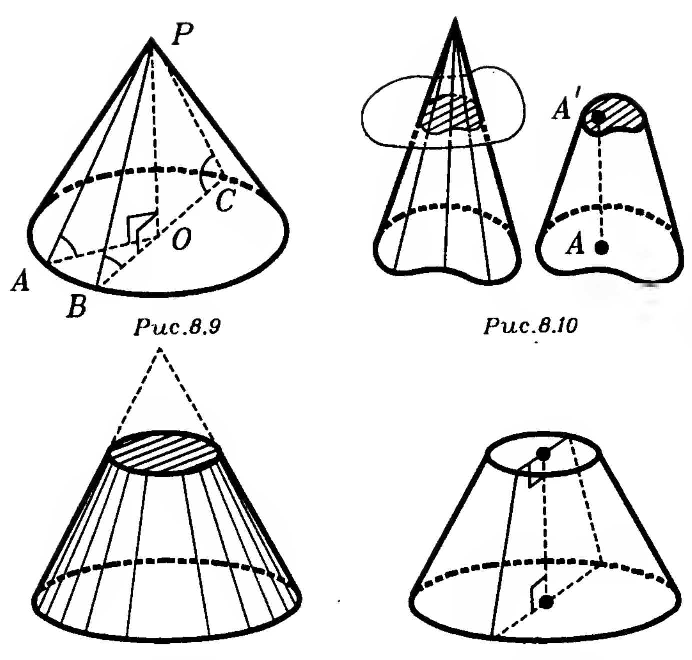


Рис.8.9

Рис.8.10

Рис.8.11

Рис.8.12

8.4. **Усеченный конус. Усеченный конус** получается, если от конуса отсечь меньший конус плоскостью, параллельной основанию (рис.8.10). В усеченном конусе два основания: "нижнее" — основание исходного конуса — и "верхнее" — основание отсекаемого конуса. По теореме о сечении конуса — *основания усеченного конуса подобны.*

Высотой усеченного конуса называется перпендикуляр, опущенный из точки одного основания на плоскость другого. Все такие перпендикуляры равны (см.п.3.5). Высотой называют также их длину, т.е. расстояние между плоскостями оснований.

Усеченный конус вращения получается из конуса вращения (рис.8.11). Поэтому его основания и все параллельные им его сечения — круги с центрами на одной прямой — на оси. Усеченный конус вращения получается вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям, или враще-

нием равнобедренной трапеции вокруг оси симметрии (рис.8.12).

Боковая поверхность усеченного конуса вращения — это принадлежащая ему часть боковой поверхности конуса вращения, из которого он получен. **Поверхность усечённого конуса вращения** (или его **полная поверхность**) состоит из его оснований и его боковой поверхности.

8.5. **Изображения конусов вращения и усеченных конусов вращения.**

Прямой круговой конус рисуют так. Сначала рисуют эллипс, изображающий окружность основания (рис.8.13). Затем находят центр основания — точку O и вертикально проводят отрезок PO, который изображает высоту конуса. Из точки P проводят к эллипсу касательные (опорные) прямые (практически это делают на глаз, прикладывая линейку) и выделяют отрезки PA и PB этих прямых от точки P до точек касания A и B. Обратите внимание, что отрезок AB — это не диаметр основания конуса, а треугольник APB — не осевое сечение конуса. Осевое сечение конуса — это треугольник APC: отрезок AC проходит через точку O. Невидимые линии рисуют штрихами; отрезок OP часто не рисуют, а лишь мысленно намечают, чтобы изобразить вершину конуса P прямо над центром основания — точкой O.

Изображая усеченный конус вращения, удобно нарисовать сначала тот конус, из которого получается усеченный конус (рис.8.14).

*8.6. **Конические сечения.** Мы уже говорили, что боковую поверхность цилиндра вращения плоскость пересекает по эллипсу (п.6.4). Также и сечение боковой поверхности конуса вращения плоскостью, не пересекающей его основание, является эллипсом (рис.8.15). Поэтому эллипс называется коническим сечением.

К коническим сечениям относятся и другие хорошо известные кривые — гиперболы и параболы. Рассмотрим неограниченный конус, получающийся при продолжении боковой поверхности конуса вращения (рис.8.16). Пересечем его плоскостью α, не проходящей через вершину. Если α пересекает все образующие конуса, то в сечении, как уже сказано, получаем эллипс (рис.8.15).

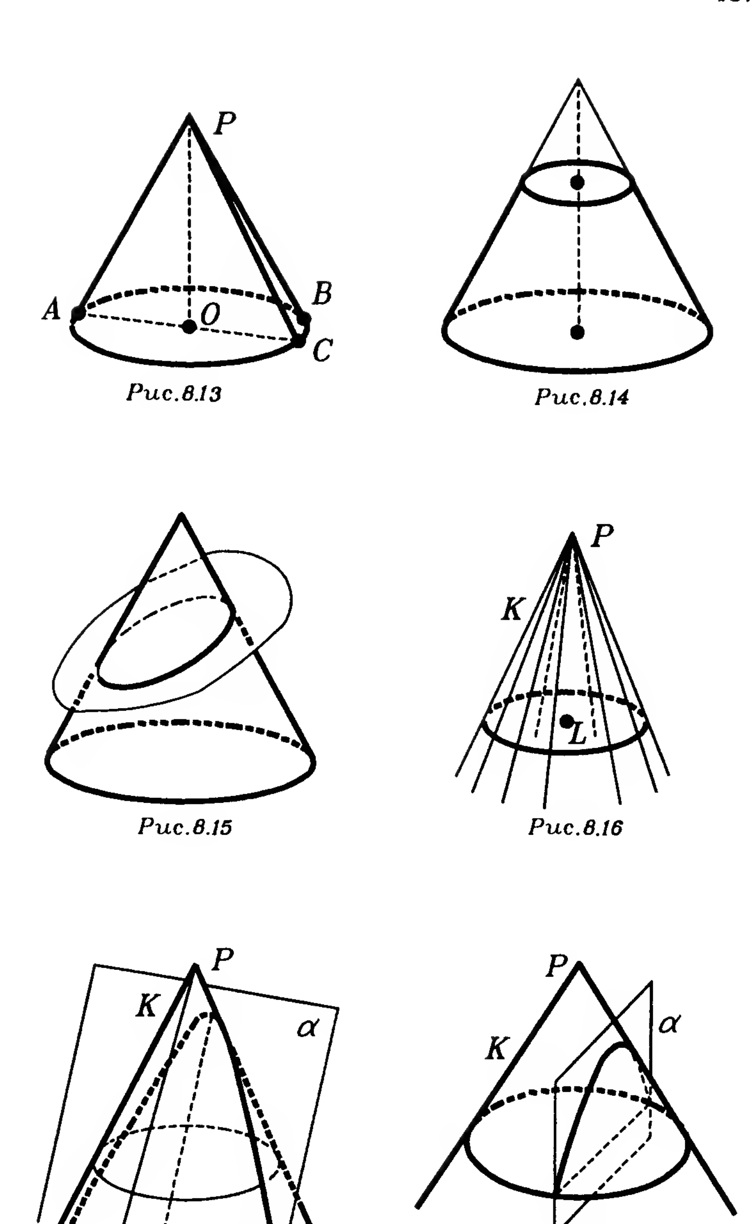


Рис.8.13

Рис.8.14

Рис.8.15

Рис.8.16

Рис.8.17

Рис.8.18

Поворачивая плоскость α, можно добиться того, чтобы она пересекала все образующие конуса K, кроме одной (которой α параллельна). Тогда в сечении получим параболу (рис.8.17). Наконец, вращая плоскость α дальше, переведем ее в такое положение, что α, пересекая часть образующих конуса K, не пересекает уже бесконечное множество других его образующих и параллельна двум из них (рис.8.18). Тогда в сечении конуса K с плоскостью α получаем кривую, называемую гиперболой (точнее, одну ее "ветвь"). Так, гипербола, которая является графиком функции $y = \frac{a}{x}$, — частный случай гиперболы — равнобочная гипербола, подобно тому как окружность является частным случаем эллипса.

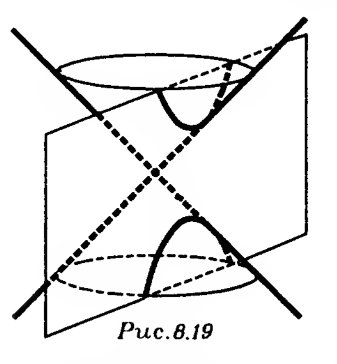


Рис.8.19

Любые гиперболы можно получить из равнобочных с помощью проектирования, аналогично тому как эллипс получается параллельным проектированием окружности.

Чтобы получить обе ветви гиперболы, надо взять сечение конуса, имеющего две "полости", т.е. конуса, образованного не лучами, а прямыми, содержащими образующие боковой поверхности конуса вращения (рис.8.19).

Конические сечения изучали еще древнегреческие геометры, и их теория была одной из вершин античной геометрии. Наиболее полное исследование конических сечений в древности было проведено А п о л л о н и е м П е р г с к и м (III в. до н.э.).

Имеется ряд важных свойств, объединяющих в один класс эллипсы, гиперболы и параболы. Например, ими исчерпываются "невырожденные", т.е. не сводящиеся к точке, прямой или паре прямых, кривые, которые задаются на плоскости в декартовых координатах уравнениями вида

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

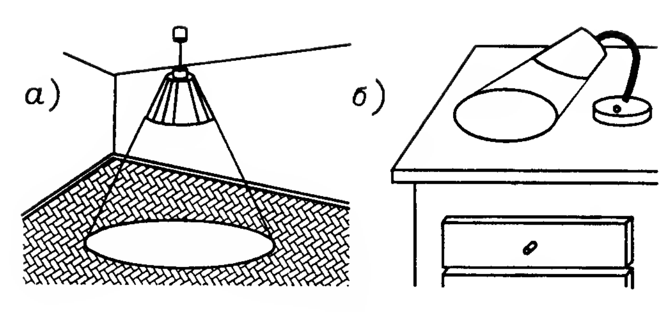


Рис.8.20

Конические сечения играют важную роль в природе: по эллиптическим, пaраболлическим и гиперболическим орбитам движутся тела в поле тяготения (вспомните законы Кеплера). Замечательные свойства конических сечений часто используются в науке и технике, например, при изготовлении некоторых оптических приборов или прожекторов (поверхность зеркала в прожекторе получается вращением дуги параболы вокруг оси параболы). Конические сечения можно наблюдать как границы тени от круглых абажуров (рис.8.20).

§9. ПИРАМИДА

9.1. **Пирамида — частный случай конуса.** О пирамидах говорилось уже в предисловии. Из данного там определения ясно, что любая пирамида T однозначно задается своей вершиной P и своим основанием — многоугольником Q.

Действительно, если соединить отрезками точку P с вершинами многоугольника Q, то получим все боковые ребра пирамиды T (рис.9.1). Вместе со сторонами основания Q эти боковые ребра образуют "каркас" ребер пирамиды T. Любая сторона основания вместе с двумя боковыми ребрами, идущими к ее концам, ограничит треугольник — боковую грань пирамиды. Все боковые грани вместе с основанием ограничат пирамиду T. Заметим еще, что все точки внутри пирамиды лежат на отрезках,

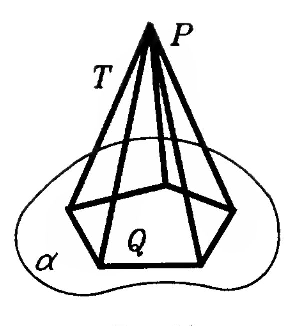


Рис.9.1

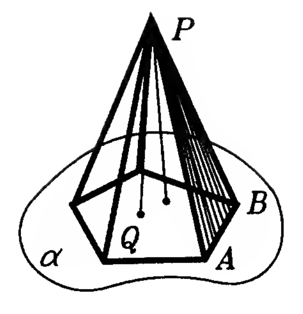


Рис.9.2

соединяющих вершину пирамиды с внутренними точками ее основания (рис.9.2).

Из проведенных рассуждений следует, что пирамида является конусом, основание которого — многоугольник. И можно дать такое определение: **пирамидой называется конус, основанием которого является многоугольник.**

Боковая поверхность пирамиды состоит из всех ее образующих, которые соединяют вершину с точками на границе основания. Ясно, что боковая поверхность состоит из треугольников, имеющих общую точку — вершину пирамиды. Сами эти треугольники называются **боковыми гранями пирамиды,** а их стороны, идущие из вершины пирамиды — **боковыми ребрами пирамиды. Поверхность пирамиды** состоит из основания пирамиды и ее боковой поверхности.

Усеченная пирамида получается так же, как получается усеченный конус из конуса: отсечением меньшей пирамиды плоскостью, параллельной основанию исходной пирамиды. Все сказанное об усеченном конусе относится и к усеченной пирамиде (рис.9.3).

9.2. **Правильная пирамида.** Напомним, что пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник и все боковые ребра равны. Поэтому *все боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники с вершиной в вершине пирамиды.* Напомним, что правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр — не одно и то же. Правильный

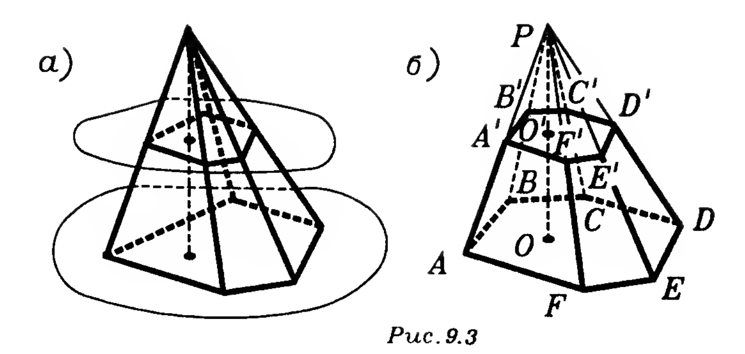


Рис. 9.3

тетраэдр является правильной треугольной пирамидой, но не наоборот!

Согласно данному определению правильной пирамиды, о любой пирамиде по ее внешнему виду можно судить, правильная она или нет: достаточно произвести необходимые измерения на ее гранях. Но это определение не удобно при построении правильных пирамид. Найти простой способ построения правильной пирамиды поможет нам следующая теорема о характерном свойстве правильной пирамиды.

Т е о р е м а (о правильной пирамиде). **Пирамида является правильной тогда и только тогда, когда ее основание — правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр основания.**

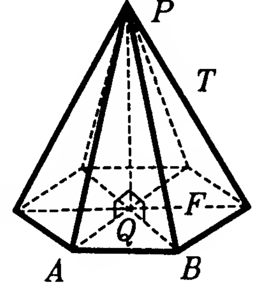


Рис. 9.4

□ Пусть T — правильная пирамида с вершиной P и основанием F. Опустим из точки P перпендикуляр PQ на плоскость α основания F. Возьмем любые две вершины A и B основания F и проведем отрезки QA и QB; получим прямоугольные треугольники PQA и PQB (рис.9.4). Эти треугольники равны, так как они имеют равные гипотенузы PA и PB и общий катет PQ. Следовательно, равны их другие катеты, т.е. $QA = QB$. Итак, проекция вершины P пирамиды T на

плоскость — равноудалена от всех вершин правильного многоугольника F. Поэтому Q является центром многоугольника F.

Итак, доказано, что вершина правильной пирамиды проектируется в центр ее основания.

Рассмотрим теперь пирамиду T, основание которой — правильный многоугольник F и вершина которой P проектируется в его центр — точку Q. Снова берем две произвольные вершины A и B основания F и рассматриваем прямоугольные треугольники PQA и PQB. Теперь в этих треугольниках общий катет PQ и равные катеты QA и QB (поскольку Q — центр правильного многоугольника F). Следовательно, опять $\Delta PQA = \Delta PQB$. Поэтому $PA = PB$. Значит все боковые ребра пирамиды T равны, т.е. пирамида T — правильная. ■

Доказанная теорема показывает, что правильную пирамиду можно определить как такую пирамиду, у которой основание — правильный многоугольник и вершина проектируется в его центр.

Теперь ясно, как построить правильную пирамиду. Надо взять правильный многоугольник F и из его центра Q провести какой-нибудь перпендикуляр QP к плоскости многоугольника F. Точка P будет вершиной правильной пирамиды, а многоугольник F — основанием этой пирамиды. Изображая правильную пирамиду, обычно, плоскость ее основания считают горизонтальной, а высоту QP — вертикальной.

9.3. **Симметрия правильной пирамиды.** У правильной n-угольной пирамиды n плоскостей симметрии. Они проходят через вершину пирамиды и оси симметрии ее основания (рис.9.5). При отражении в такой плоскости вершина пирамиды остается на месте, а основание совмещается само с собой. Поэтому и пирамида совмещается сама с собой.

Кроме того, правильная n-угольная пирамида совмещается сама с собой при повороте вокруг прямой, содер-

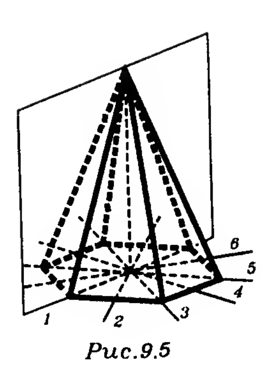


Рис.9.5

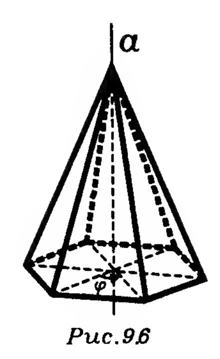


Рис.9.6

жащей ее высоту, на угол $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$ (а также на любой угол, кратный φ) (рис.9.6).

Других движений, совмещающих правильную пирамиду саму с собой, кроме случая, когда она является правильным тетраэдром, нет. Поэтому у таких пирамид нет осей симметрии и центров симметрии. Симметрия правильного тетраэдра будет подробно рассмотрена в §12.

9.4. **Конусы и пирамиды в практике.** Классический пример правильных четырехугольных пирамид представляют знаменитые египетские пирамиды. Конусы образуют сыпучие тела, насыпаемые с одного места (песок, пустая порода из шахт и т.д.). Аналогично происхождение примерно конической формы вулканов: ее образуют стекающая лава и выбрасываемые камни и пепел.

Примеры предметов, имеющих форму малосужающихся конусов или чаще усеченных конусов вращения или усеченных пирамид, дают шпили, столбы, колонны, фабричные трубы. Например, адмиралтейская игла — шпиль Адмиралтейства в Петербурге — представляет собой, как и многие другие шпили, узкую усеченную пирамиду. Форму усеченного конуса имеют многие части предметов обихода (например, посуда). В технике также часто встречаются инструменты, детали и части машин, имеющие конические формы. Подыщите другие примеры.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

ЗАДАЧИ К §4

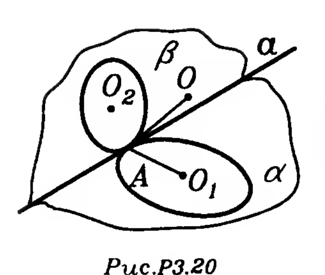


Рис.Р3.20

2.1. **Даны два круга одного шара, окружности которых лежат на сфере и имеют единственную общую точку. Докажите, что прямая пересечения плоскостей, в которых лежат эти круги, имеет с шаром единственную общую точку.**

△ Пусть (рис.Р3.20) точка O — центр шара, точки O_1 и O_2 — центры данных кругов, α и β — плоскости, в которых они лежат, A — общая точка этих кругов, a — общая прямая плоскостей α и β.

Для доказательства достаточно установить, что a является касательной хотя бы к одной из данных окружностей. В самом деле, пусть a — касательная к окружности с центром O_1. Проведем (OA) и (O_1A). Что же мы видим? Если a — касательная, то $a \perp (O_1A)$. Но тогда $a \perp (OA)$ (?). Отсюда следует, что a — касательная к большей окружности, которая получается в сечении шара плоскостью, проходящей через O и a. Но тогда a имеет с шаром единственную общую точку (?).

Осталось доказать, что a действительно касательная хотя бы к одной из данных окружностей. Пусть это не так, т.е. a не является касательной ни к одной из них. Тогда рисунок будет такой(?) (см. рис.Р3.21). Центр шара O лежит, как мы уже знаем, на перпендикуляре к α, проходящем через точку O_1, и на перпендикуляре к β, проходящем через O_2. Однако непохоже, чтобы эти перпендикуляры пересекались...

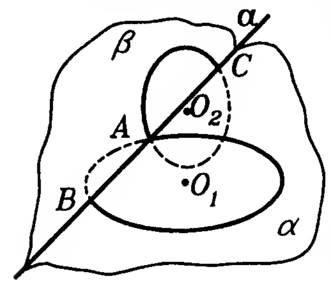


Рис.Р3.21

И в самом деле, если бы это произошло, то точка O была бы равноудалена от трех точек A, B, C прямой a, что невозможно.

Итак, a — касательная хотя бы к одной из данных окружностей, а тогда, как мы уже показали, она имеет с шаром единственную общую точку.

Заметим к этому доказательству, что нам хватило того обстоятельства, что a — касательная хоть к одной из данных окружностей. На самом деле, a — касательная к каждой окружности (?), но в процессе доказательства это не понадобилось.

Доказательство получилось не слишком коротким, да еще с элементами "от противного". Нельзя ли короче? (Этот вопрос всегда уместен!) Оказывается можно. Вот более короткое рассуждение.

Пусть a имеет с шаром еще одну общую точку, назовем ее B. Так как $B \in a$, то $B \in \alpha$. Кроме того, B принадлежит шару. Значит, B принадлежит сечению шара плоскостью α, т.е. кругу с центром O_1. Аналогично B принадлежит кругу с центром O_2. Получилось, что данные круги имеют еще одну общую точку, что противоречит условию.

Ясно, что получилось короче, но осталось "от противного". А нельзя ли напрямую? Можно! Обозначим данные круги K_1 и K_2, а шар $Ш$. Тогда

$\{A\} = K_1 \cap K_2 = (Ш \cap \alpha) \cap (Ш \cap \beta) = Ш \cap (\alpha \cap \beta) = Ш \cap a$. ▲

Всего одна строчка! Причем любопытно, что в этом рассуждении не использовалось то условие, что даны именно шар и круги. Да, но что же тогда использовалось и что мы на самом деле доказали? Тут есть над чем подумать...

Что касается самой задачи, то интересно вот что. Уже зная, что a имеет с шаром единственную общую точку, мы легко получаем, что a — касательная к каждой из данных окружностей (?). Если же эти два круга не лежат в одном шаре, то, как легко видеть, a может и не быть их общей касательной(?). Таким образом, принадлежность двух кругов одному шару и наличие у них общей касательной равносильны (если круги не лежат в одной плоскости).

2.2. Докажите, что пересечение двух сфер, отличное от точки, является окружностью.

△ "На пальцах" это делается так. Рассмотрим рисунок Р3.22.

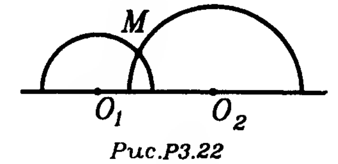


Рис.Р3.22

Здесь нарисованы две полуокружности с центрами в точках O_1 и O_2, пересекающиеся в точке M. Будем вращать

эту конфигурацию вокруг O_1O_2. Полуокружности при вращении дадут сферы, а точка M — окружность.

Идею можно довести до конца, надо только понять, что стоит за словами "будем вращать". Увы, быстро не получится.

Поэтому выберем другой путь. Через точку M проведем плоскость, перпендикулярную прямой O_1O_2. Она пересечет первую сферу по окружности. И вторую тоже. Эти две окружности лежат в проведенной нами плоскости, имеют общий центр — точку пересечения проведенной плоскости и прямой O_1O_2. И радиус каждой из них равен расстоянию от M до O_1O_2. Значит, получается не две разных окружности, а две совпадающие, то есть одна.

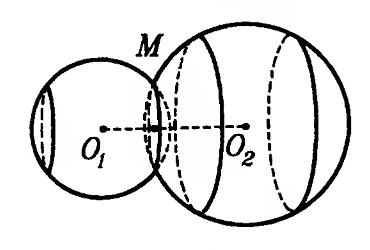


Рис.Р3.23

Итак, общая линия двух сфер является окружностью (рис.Р3.23), тот же результат получается и при другом расположении сфер (?). ▲

2.3. На плоскости лежат два шара радиусами R_1 и R_2. Они имеют единственную общую точку.

а) На каком расстоянии от плоскости находится эта точка. б) На каком расстоянии между собой находятся точки касания шаров и плоскости. в) Чему равен радиус наименьшей сферы, касающейся данных шаров и плоскости? А наибольшей?

△ Стоит запомнить, что сведение стереометрической задачи к планиметрической, как правило, облегчает ее решение. Покажем это.

Обозначим данную плоскость α, центры данных шаров O_1 и O_2, точки касания шаров с плоскостью A_1 и A_2, общую точку шаров — M.

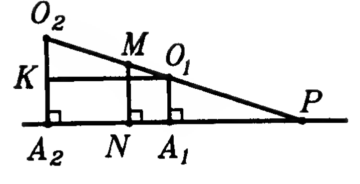
Проведем плоскость через прямые O_1A_1 и O_1O_2. В результате приходим к такому рисунку (рис.Р3.24) (?). На нем нет окружностей сечения, считается, что $R_2 > R_1$, MN — перпендикуляр из M на α, а P — точка пересечения O_1O_2 и α.

а) Обозначим O_1P через a, тогда $O_2P = a + R_1 + R_2$. Из подобия треугольников O_1A_1P и O_2A_2P находим a:

$$a = R_1 \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}.$$

Тогда

$$MP = \frac{2R_1R_2}{R_2 - R_1}.$$



ΔMNP подобен ΔO_1A_1P. Отсюда находим

$$MN = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Рис.Р3.24

б) Проведем $O_1K \perp O_2A_2$. Из треугольника O_1KO_2 получнм

$$A_1A_2 = O_1K = \sqrt{O_1O_2^{\,2} - O_2K^2} =$$

$$= \sqrt{(R_2 + R_1)^2 - (R_2 - R_1)^2} = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

в) Наименьшая сфера, отвечающая условию, имеет центр в проведенной нами плоскости(?). Обозначим его O_3 (рис.Р3.25). Так как $A_1A_2 = A_1A_3 + A_3A_2$, то, используя результат задачи б), получим

$$2\sqrt{R_1R_2} = 2\sqrt{R_1R_3} + 2\sqrt{R_2R_3},$$

откуда

$$R_3 = \frac{R_1R_2}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})^2}.$$

А наибольшей сферы, удовлетворяющей условию задачи, нет(?). ▲

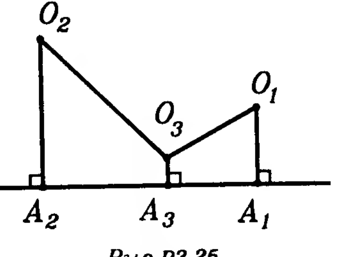


Рис.Р3.25

2.4. В правильной треугольной пирамиде известен двугранный угол при основании. Как найти двуграиный угол при боковом ребре?

△ Обычный путь решения таков. Выбираем пару ребер пирамиды, которые являются ребрами двух двугранных углов, о которых идет речь в задаче. Чтобы рисунок был понагляднее, выберем скрещивающиеся ребра пирамиды. Итак, пусть в пирамиде $PABC$ выбраны ребра AB и PC. Рисуем далее линейные углы двугранных углов при основании ($\angle PKC$) и при боковом ребре ($\angle ALB$)

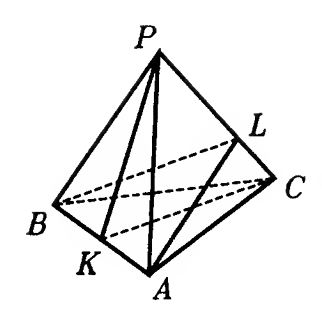


Рис.Р3.26

(рис.Р3.26). Тут уже возможны "неприятности", точка L может оказаться за пределами пирамиды — не на ребре PC, а на его продолжении(?). Примем величину угла при основании за α, а величину угла при боковом ребре за β. Нам требуется выразить величину β через величину α. Для этого, обычно, вводят линейный параметр, то есть считают известным некий полезный для решения задачи отрезок. Примем, к примеру, длину отрезка AB за a или за 1, или еще лучше за 2, чтобы удобнее делить на 2. Затем находим цепочку треугольников, пройдя по которой, мы сможем найти угол β, имея угол α и отрезок $AB = 2$. (Разумеется, найти угол — все равно что найти какую-либо его тригонометрическую функцию.) Все это несложно и полезно проделать самому.

Используя соотношения в трехгранном угле — главным образом теорему косинусов — мы можем решить задачу быстрее и при этом избежать "неприятностей", связанных с расположением точек на рисунке.

Рассмотрим трехгранный угол с вершиной A и ребрами AB, AC, AP. По теореме косинусов запишем такое равенство

$$\cos\angle AB = \frac{\cos\angle PAC - \cos\angle PAB \cdot \cos\angle BAC}{\sin\angle PAB \cdot \sin\angle BAC}.$$

Обозначим $\angle PAC = \angle PAB = \varphi$, запишем его покрасивее:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi - \cos\varphi \cdot \cos 60^\circ}{\sin\varphi \cdot \sin 60^\circ}.$$

Отсюда получаем

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} ctg\varphi. \qquad (1)$$

В том же трехгранном угле запишем теорему косинусов для двугранного угла при ребре AP:

$$\cos\angle AP = \frac{\cos\angle BAC - \cos\angle BAP \cdot \cos\angle CAP}{\sin\angle BAP \cdot \sin\angle CAP}.$$

Перепишем эту формулу покрасивее:

$$cos\beta = \frac{cos60^\circ - cos\varphi\ cos\varphi}{sin\varphi\ sin\varphi} = \frac{0{,}5 - cos^2\varphi}{sin^2\varphi}. \qquad (2)$$

В принципе, если говорить о геометрии — задача решена. Из формулы (1) надо выразить $ctg\varphi$ через известный по условию $cos\alpha$, затем выразить $cos\varphi$ и $sin\varphi$ через $cos\alpha$, после чего получим косинус нужного нам угла β. После выкладок (?) получается $cos\beta = 0{,}5(1 - 3cos^2\beta)$. Задача решена. ▲

ЗАДАЧИ К §6

2.5. Как вычислить расстояние между двумя точками на поверхности цилиндра, если измерения можно проводить только на его поверхности?

△ Могут представиться разные ситуации: 1) обе точки лежат на боковой поверхности цилиндра; 2) одна точка лежит на боковой поверхности цилиндра, а другая — на его основании; 3) обе точки лежат на основаниях цилиндра и при этом: а) на одном и том же основании и б) на разных основаниях. Ситуация а) относится к планиметрии и в данном случае тривиальна.

Наиболее принципиальный случай в ситуации 1). Пусть две точки лежат на боковой поверхности цилиндра, расстояние между ними надо найти, не забираясь внутрь цилиндра — это легко себе представить, если цилиндр сделан, к примеру, из металла. (Обратите внимание, что надо найти расстояние между двумя точками в пространстве, а не по поверхности цилиндра.)

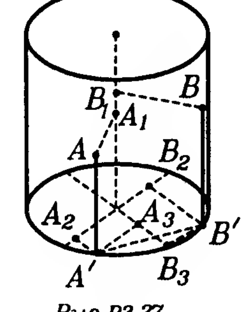


Рис.Р3.27

Для вычисления расстояния между двумя точками можно воспользоваться соотношениями в треугольнике, где лежит соответствующий отрезок, или пространственной теоремой Пифагора. В данном случае нужный нам треугольник лежит внутри цилиндра, и потому к нему не подобраться. Пойдем вторым путем. Для применения пространственной теоремы Пифагора проведем три взаимно перпендикулярные прямые, естественно, связанные с цилиндром. Пусть одна из них проходит через ось цилиндра, а две другие взаимно перпендикулярные прямые проходят через диаметры нижнего основания (рис.Р3.27). Пусть A и B — данные точки, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 — проек-

ции отрезка AB на эти прямые. Тогда согласно пространственной теореме Пифагора $|AB|^2 = |A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2 + |A_3B_3|^2$. Можно заметить, что $|A_2B_2|^2 + |A_3B_3|^2$ равно квадрату длины проекции отрезка AB на плоскость нижнего основания цилиндра(?). $|A_1B_1|$ — разность расстояний точек A и B до плоскости нижнего основания цилиндра. Теперь действуем так: через точки A и B проводим образующие цилиндра до пересечения с нижним основанием в точках A' и B' соответственно. Измерим $|AA'|$, $|BB'|$ и $|A'B'|$. Находим:

$$|AB|^2 = |A'B'|^2 + \left||AA_1| - |BB_1|\right|^2.$$

В остальных случаях задача принципиально решается так же. В случае 3,б) надо преодолеть небольшую техническую трудность — найти проекцию одной из точек на плоскость основания, в которой лежит другая из них (?).

Условие этой реальной задачи можно усложнить (самим!). Можно, например, сделать естественное предположение о том, что к основаниям цилиндра не подобраться. Скажем, данный цилиндр — это достаточно длинная труба или этих оснований вообще нет — отломаны. Как решить задачу в этом случае?

Как и во всякой задаче с реальными объектами, при решении могут появиться чисто практические вопросы. Например, здесь: а какие измерительные приборы имеются? А что можно делать на поверхности цилиндра?

Сначала получите хоть какое-либо решение задачи, и для этого можете считать, что у вас есть любые средства и возможности. Затем постарайтесь свести эти средства и возможности до минимума, буквально до подручных средств. В данной задаче практически можно обойтись только линейкой с делениями (если цилиндр не слишком большой для этой линейки). ▲

ЗАДАЧИ К §7

2.6. Дана прямая треугольная призма достаточной высоты. Докажите, что ее можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник.

△ Пусть треугольник ABC является перпендикулярным сечением призмы. Пусть $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ ($a \neq b$ или $a \neq c$). Если в сечении призмы можно получить равносторонний треугольник, то любой треугольник, плоскость которого будет параллельна плоскости этого треугольника, также будет

равносторонним(?). Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что одна из вершин равностороннего треугольника, находится в точке C. Пусть CA_1B_1 — искомый треугольник (рис.Р3.28). Обозначим $|AA_1| = x$, $|BB_1| = y$. Если удастся найти такие x и y, что $|A_1B_1| = |A_1C| = |B_1C|$, то задача будет решена. (Теперь ясно, почему одну из вершин искомого треугольника взяли в точке C. Если бы не это, то пришлось бы вводить еще одно неизвестное расстояние — $|CC_1|$, и решение получилось бы длиннее.)

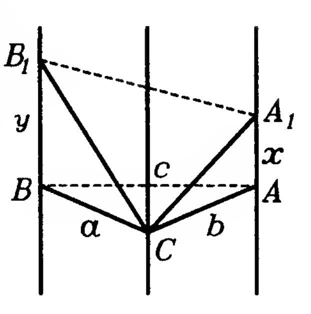


Рис.Р3.28

Для нахождения x и y легко составить такую систему:

$$a^2 + y^2 = b^2 + x^2 = c^2 + (x - y)^2 . \qquad (?)$$

Эту систему решите самостоятельно.

Кроме того, заметим, что данный рисунок не является единственно возможным. Искомый треугольник может располагаться так, что его вершины A_1 и B_1 будут находиться по разные стороны от (ABC). Тогда система примет несколько другой вид(?). Решение ее будет таким же. Впрочем, без рассмотрения второй системы можно обойтись, сведя второй случай к первому(?).

Технические трудности существенно возрастут, если вы захотите по этой же идее решить задачу б). Поэтому перейдем к более геометричному решению этой задачи.

Прежде всего заметим, что хотя бы один из двугранных углов данной призмы меньше 60° (?). Выберем на ребре этого двугранного угла призмы точку A и будем строить равносторонний треугольник с вершиной в точке A, стороны которого лежат на гранях призмы.

Мы тем самым несколько ослабляем требование задачи, а значит, несколько упрощаем ее.

Пусть AK и AL — два равных отрезка в гранях призмы и $\angle KAL = 60^\circ$. Тогда ясно, что треугольник AKL равносторонний (рис.Р3.29.). Если мы продлим его стороны AK и AL до пересечения с ребрами призмы, то получим треугольник AK_1L_1. Очевидно, что он будет равносторонним, а значит, искомым, если $(K_1L_1) \parallel (KL)$ (?). Основная идея решения задачи

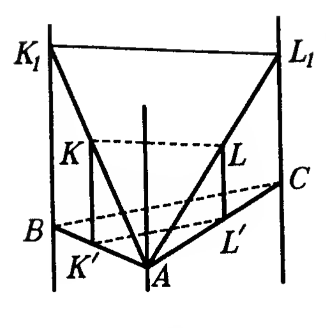


Рис.Р3.29

будет основана на том, что "ключевой" треугольник AKL такой, что $(K_1L_1)\parallel(KL)$, всегда можно построить.

Самый трудный момент решения — понять, при каком условии будут параллельны (K_1L_1) и (KL). Для этого мы проведем перпендикулярное сечение призмы ABC. Пусть $K'L'$ — проекция отрезка KL на плоскость ABC. Оказывается, $(K_1L_1)\parallel(KL)$ тогда и только тогда, когда $(K'L')\parallel(BC)$ (?). Значит, чтобы добиться параллельности (K_1L_1) и (KL), достаточно добиться параллельности $(K'L')$ и (BC). А это сделать можно.

Точку K' можно получить сколь угодно близкой к точке A (?), но из этого следует, что

$$|K',\ (BC)| > |L',\ (BC)|.$$

Теперь поменяем ролями точки K' и L'. Но тогда

$$|K',\ (BC)| < |L',\ (BC)|.$$

Из соображений непрерывности найдется такое положение точек K и L, что $|K',(BC)| = |L',(BC)|$. Но тогда $(K'L')\parallel$ $\parallel(BC)$, т.е. $(K_1L_1)\parallel(KL)$, и "ключевой" треугольник существует.

Для окончательной отделки решения необходимо обосновать расположение треугольника AKL выше плоскости ABC. Но это вы сделайте самостоятельно(?).▲

2.7. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием является равнобедренный прямоугольный треугольник $(AC = BC)$, грань AA_1B_1B — квадрат. Боковое ребро призмы равно a, высота призмы равна h. Найти угол между: а) боковым ребром и скрещивающимся с ним ребром основания; б) боковым ребром и плоскостью основания; в) плоскостью боковой грани, являющейся квадратом и плоскостью основания; г) плоскостями боковых граней.

△ Прежде всего сделаем хороший рисунок (рис.Р3.30).

$$\text{а)}\ \angle(CC_1),(AB) = \angle(AA_1),(AB) = 90^\circ,$$

$$\angle(AA_1),(BC) = \angle(CC_1),(BC).$$

Для нахождения угла между CC_1 и BC (обозначим его через x) применим формулу, полученную в задаче 10 к главе 1. Для этого спроектируем вершину C_1 на плоскость ABC (D — проекция точки C_1) и проведем отрезок CD. Теперь по этой формуле

$$\cos\angle C_1CB = \cos\angle C_1CD \cdot \cos\angle DCB.$$

Угол DCC_1 обозначим (для удобства записей) через φ.

Исходя из условия задачи $\sin\varphi = \frac{h}{a}$, поэтому

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{h}{a}\right)^2}.$$

$$\cos\angle DCB = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поэтому

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{h}{a}\right)^2}.$$

Рис.Р3.30

Найдя тригонометрическую функцию угла, мы можем считать, что нашли сам угол (эта договоренность действует во всех подобных задачах).

б) А этот угол мы нашли при решении задачи из пункта а). Вы это замечаете?

в) И этот угол фактически уже найден при решении задачи а). Если вы пока не видите в чем дело, проведите среднюю линию квадрата ABA_1B_1, параллельную боковому ребру призмы и продлите CD до пересечения с AB.

г) Довольно просто искать двугранные углы по теореме косинусов для трехгранного угла.

В нашем случае

$$\cos\angle CC_1 = \frac{\cos\angle ACB - \cos\angle ACC_1 \cdot \cos\angle BCC_1}{\sin\angle ACC_1 \cdot \sin\angle BCC_1},$$

по условию $\angle ACB = 90^\circ$, поэтому

$$\cos\angle CC_1 = -\text{ctg}\angle ACC_1 \cdot \text{ctg}\angle BCC_1,$$

но

$$\angle ACC_1 = \angle BCC_1. \qquad (?)$$

И так как мы обозначили $\angle BCC_1$ через x, то

$$\cos\angle CC_1 = -ctg^2 x .$$

Найти $ctgx$, зная $cosx$ (найденный в пункте а)), — дело техники, причем тригонометрической.

Попробуйте сами тем же методом найти угол (то есть его тригонометрическую функцию) между плоскостями граней AA_1B_1B и BB_1C_1C.

Стоит еще заметить, что угол между плоскостями не может быть тупым. Поэтому, если в результате вычислений мы получаем отрицательный косинус, то это значит, что мы нашли не сам угол между плоскостями, а смежный к нему. ▲

ЗАДАЧИ К §8

2.8. **Через середиuу высоты усеченного конуса провели сечение, параллельное основанию. Были высказаны два предположения: 1) площадь сечения равна среднему арифметическому площадей оснований и 2) площадь сечения равна среднему геометрическому площадей оснований. Верно ли какое-либо из этих предположений?**

△ Прежде всего заметим, что первое предположение выглядит похожим на истину. В планиметрии есть нечто подобное — теорема о средней линии трапеции.

Ответ на вопрос задачи можно получить непосредственным вычислением площади такого сечения(?). Но мы будем действовать иначе.

При решении достаточно сложной задачи обычно возникают разные предположения. Прежде чем их начать доказывать, полезно убедиться в том, что это стоит делать. Для этого можно привести примеры, в которых это предположение верно, но можно поискать и контрпримеры, в которых оно неверно, тогда и доказывать нет смысла.

Примером или контрпримером часто бывают предельные случаи для ситуации, описанной в задаче.

В нашей задаче возьмем в качестве такого предельиого случая конус, который получается из данного усеченного конуса, когда площадь одного основания равна нулю. Тогда согласно предположению площадь сечения равна половине площади другого основания. Но это неверно(?). Значит, для нашего предположения найден контрпример и доказывать его нет смысла. ▲

В заключении подумайте, что еще стоит добавить для окончания решения.

2.9. Пусть R — радиус основания конуса, L — длина его образующей, H — его высота, D — диаметр описанной около конуса сферы. Найдите зависимость между этими величинами.

△ Задача эта простая, но есть в ней несколько особенностей, которые стоит запомнить. Во-первых, и конус, и сфера, описанная около него, — фигуры вращения. Поэтому лучше рисовать комбинацию не пространственных фигур, а тех, которые при вращении дают данную нам пространственную комбинацию. В нашем случае рисунок таков (рис.Р3.31).

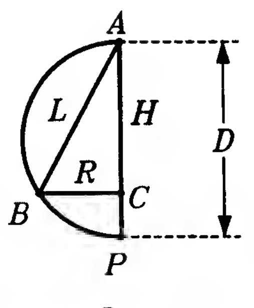


Рис.Р3.31

Здесь нарисована полуокружность с диаметром D, а в ней расположен прямоугольный треугольник, один из катетов которого лежит на диаметре полуокружности.

Если эту плоскую конфигурацию вращать вокруг диаметра, то мы и получим сферу, описанную вокруг конуса.

Во-вторых, с самого начала не ясно, где расположен центр сферы относительно конуса: в нем, вне его или на его основании. При обычном способе решения с помощью треугольников приходится разбирать все эти три случая.

Мы сделаем иначе. Проведем отрезок BP и рассмотрим теперь новый рисунок (рис.Р3.32).

На этом рисунке треугольник ABP — прямоугольный, ибо угол B опирается на диаметр окружности AP. Но тогда можно использовать известные соотношения в прямоугольном треугольнике:

1) $BC^2 = AC \cdot CP$, иначе

$R^2 = H \cdot (D - H)$ и

2) $AB^2 = AP \cdot AC$, иначе $L^2 = D \cdot H$.

К этим двум зависимостям добавим еще ту, что получается по теореме Пифагора из треугольника ABC:

3) $L^2 = R^2 + H^2$. ▲

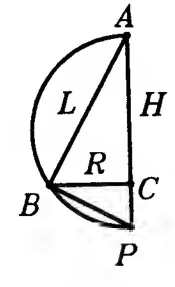


Рис.Р3.32

Теперь вы можете сами поупражняться в решении задач такого типа: даны две из этих четырех величин и требуется найти остальные.

ЗАДАЧИ К §9

2.10. В правильной четырехугольной пирамиде известны сторона основания и высота. Как вычислить площадь сечения, проходящего через сторону основания перпендикулярно противоположной боковой грани? Выберите сами числовые данные и получите результат.

△ Пусть CDD_1C_1 — искомое сечение (рис.Р3.33). Прежде всего определим вид этого четырехугольника. Так как $CD \parallel AB$, то $CD \parallel (PAB)$. Но тогда $CD \parallel C_1D_1$. (Почему?)

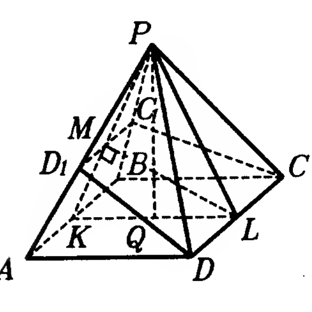


Рис.Р3.33

Предположим, что $DD_1 \parallel CC_1$ тогда четырехугольник CDD_1C_1 — параллелограмм. Учитывая, что $AD \parallel BC$, получим (по признаку параллельности плоскостей), что плоскости ADD_1 и BCC_1 параллельны, — но они имеют общую точку P. Значит, наше предположение неверно и на самом деле CDD_1C_1 — трапеция. (К тому же результату могли бы прийти иначе: $C_1D_1 < CD$, следовательно, CDD_1C_1 не параллелограмм.)

Нам известны сторона основания пирамиды и высота PQ. Запишем формулу площади трапеции CDD_1C_1:

$$S = \frac{CD + C_1D_1}{2} \cdot h.$$

В ней неизвестны C_1D_1 и h — расстояние между прямыми CD и C_1D_1. Рассмотрим сечение пирамиды PKL, где точка K — середина AB, точка L — середина CD. Обозначим буквой M точку пересечения KP и C_1D_1. Так как $CD \perp (PKL)$, то $CD \perp LM$. Значит, LM — высота трапеции и ее длина есть неизвестная величина h. Кроме того, $LM \perp PK$. (Обоснуйте это.)

Для удобства дальнейших вычислений рассмотрим отдельно треугольник PKL (рис.Р3.34). Он равнобедренный ($PK = PL$). В нем известно KL (равное AD). PK находим из тре-

угольника PKQ по теореме Пифагора. Так как в треугольнике PKL известны три стороны, то можно найти его площадь, а уже затем и высоту LM на боковую сторону PK.

Перейдем к вычислению C_1D_1. Так как $C_1D_1 \| AB$, то ΔPC_1D_1 подобен ΔPAB, а коэффициентом подобия является отношение $\frac{C_1D_1}{AB}$. Этот коэффициент равен также отношению $\frac{PM}{PK}$, которое можно вычислить из треугольника PKL.

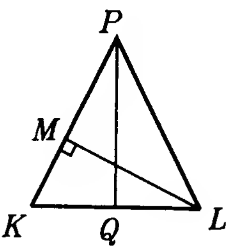


Рис.Р3.34

Пусть, к примеру, $CD = 2$ (чтобы легче было делить пополам). $PQ = 3$. Теперь проведите все вычисления.

Решая эту задачу, предположили, что искомое сечение является четырехугольником, и доказали, что оно является трапецией Но оно необязательно будет четырехугольником. Рассмотрим треугольник PKL. В нем LM — высота из вершины основания на боковую сторону. Однако хорошо известно, что такая высота необязательно пересекает именно сторону треугольника — она может проходить и через P, если треугольник PKL прямоугольный, и проходить за стороной PK, если треугольник PKL тупоугольный. Соответственно, площадь искомого сечения будет получаться другой. (Объясните.)

В связи с этим надо подумать: а какое именно сечение получается при выбранных нами числовых данных — трапеция, треугольник или отрезок? Для этого определим вид треугольника PKL.

$$KL^2 = 2^2 = 4.$$

$$PL^2 + PK^2 = 2PK^2 = 2\,(PQ^2 + OK^2) = 2(9+1) = 20.$$

Так как $KL^2 < PL^2 + PK^2$, то треугольник PKL остроугольный, значит, высота LM падает именно на сторону PK, а тогда сечение является трапецией, как мы и предполагали. ▲

2.11. Известны длины ребер тетраэдра. Как найти его высоту?

△ Пусть $PABC$ — данный тетраэдр, PQ — искомая высота.

Длину отрезка PQ найдем из какого-либо треугольника, в котором он находится. Таким треугольником может быть треугольник PQQ_1, где QQ_1 — перпендикуляр из Q на (BC) (рис.Р3.35). $|PQ_1|$ находим из треугольника PBC (?). PQ_1Q — линейный угол двугранного угла при ребре BC. Его можно найти по теореме косинусов для трехгранного угла с вершиной B (или C). После этого находим $|PQ|$.

В этом несложном решении осталось обосновать его независимость от рисунка. Положение точки Q_1 для решения несущественно(?). Впрочем, если точка Q находится внутри треугольника ABC, то хотя бы одна проекция точки Q на прямые, проходящие через стороны треугольника, будет лежать внутри стороны треугольника ABC (?), ее можно назвать точкой Q_1. А что если точка Q находится вне треугольника ABC? Есть два варианта ответа. Первый — убедиться в том, что для любого положения точки Q по отношению к треугольнику ABC решение принципиально не меняется (?). Второй — доказать, что в любом тетраэдре проекция хоть одной вершины лежит внутри противоположной ее грани, и тем самым свести задачу к уже рассмотренному случаю(?).

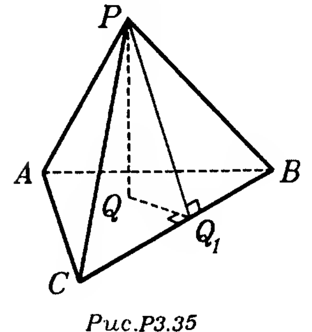


Рис.Р3.35

Вычислительная часть этой задачи довольно длинная. Тем любопытнее то обстоятельство, что ответ может быть получен без всяких вычислений. Отрезок, равный высоте тетраэдра, может быть построен циркулем и линейкой (?)!

Эту задачу мы решали в предположении, что тетраэдр дан. Но на нее можно посмотреть несколько иначе.

Поставить вопрос: "Можно ли построить тетраэдр, ребра которого равны шести данным отрезкам?" (Аналогичная задача на плоскости хорошо известна.) К решению этой задачи можно подойти разными путями. Один из них идет от задачи, рассмотренной нами только что(?). ▲

2.12. **Найдите радиус шара, вписаного в правильную n-угольную пирамиду, зная сторону основания a и плоский угол при вершине φ.**

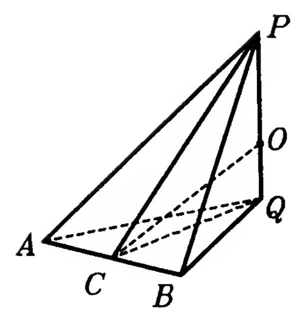


Рис.Р3.36

△ Для решения достаточно рассмотреть часть такой пирамиды, являющейся тетраэдром. Основанием этого тетраэдра является треугольник, у которого две вершины — это две соседние вершины правильного n-угольника, лежащего в основании пирамиды, а третья вершина — центр основания этого правильного многоугольника. Вершина этого тетраэдра — это вершина данной пирамиды (рис.Р3.36).

На этом рисунке PQ — высота данной пирамиды и ребро тетраэдра, QAB — основание тетраэдра.

Центр O вписанной сферы лежит на PQ — в той точке, где PQ пересекается с биссектором двугранного угла при ребре AB или, что все равно, с биссектрисой CO линейного угла PCQ этого двугранного угла, начало которой в середине AB (?).

Треугольник PCQ рассмотрим отдельно (рис.Р3.37). Проведем в нем еще $OD \perp PC$. Что есть на этом рисунке? $OQ = OD = r$, где r — радиус вписанного шара(?). PQ — высота данной пирамиды, PC — ее апофема, QC — радиус окружности, вписанной в основание пирамиды.

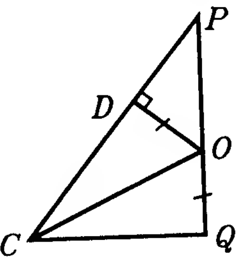


Рис.Р3.37

Перейдем к самим вычислениям. Из подобия треугольников POD и PQC (?) имеем:

$$\frac{OD}{OP} = \frac{QC}{PC}.$$

$OD = r$, $OP = PQ - OQ = H - r$, где H — высота данной пирамиды.

$$QC = \frac{a}{2}ctg\frac{\pi}{n} \qquad (\text{из } \Delta\ QCB). \qquad (?)$$

$$PC = \frac{a}{2}ctg\frac{\varphi}{2} \qquad (\text{из } \Delta\ PCB). \qquad (?)$$

Тогда

$$\frac{r}{H-r}=\frac{ctg\frac{\pi}{n}}{ctg\frac{\varphi}{2}},$$

откуда

$$r=\frac{Hctg\frac{\pi}{n}}{ctg\frac{\varphi}{2}+ctg\frac{\pi}{n}}.$$

Высоту H находим из ΔPQC по теореме Пифагора. Получаем

$$H=\frac{a}{2}\sqrt{ctg^2\frac{\alpha}{2}-ctg^2\frac{\pi}{n}}.$$

И, окончательно,

$$r=\frac{a}{2}ctg\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sqrt{ctg^2\frac{\alpha}{2}-ctg^2\frac{\pi}{n}}}{ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\pi}{n}}.$$

Можно еще попытаться упростить полученное выражение, но это уже неважно. ▲

И еще. Когда вы будете знать формулы для объемов, вернитесь к этой задаче. Тогда ее можно будет сделать короче.

2.13. **В данную правильную треугольную усеченную пирамиду с боковым ребром a можно поместить сферу, касающуюся всех граней, и сферу, касающуюся всех ребер. Найти стороны оснований пирамиды.**

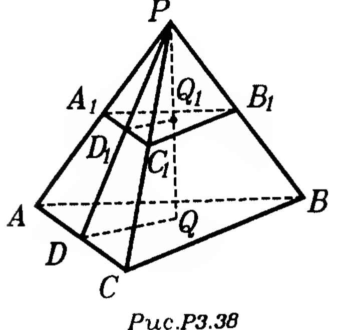


Рис.Р3.38

△ Усеченную пирамиду сначала надо нарисовать. Удобно сделать так — сперва нарисовать исходную "полную" пирамиду, а потом отсечь от нее "макушку".

В нашем случае рисунок будет такой (рис.Р3.38).

Данная нам пирамида — $ABCA_1B_1C_1$, PQ — высота "полной" пирамиды, PQ_1 — ее часть до верхнего основания усеченной пирамиды.

Эта задача сводится к планиметрической, при этом не надо рисовать ни одной из данных сфер.

Так как в усеченную пирамиду можно вписать сферу, касающуюся всех ребер, то в ее боковую грань можно вписать окружность(?). Обозначим $AC = 2x$, $A_1C_1 = 2y$ (так будет удобнее делить эти отрезки пополам) и для описанного четырехугольника AA_1C_1C получим, что $2x + 2y = 2a$, откуда

$$x + y = a \qquad (1)(?).$$

Из существования вписанного шара следует, что существует полуокружность, расположенная в трапеции DD_1Q_1Q (PD — апофема "полной" пирамиды) так, что ее центр лежит в середине QQ_1, а сама она касается остальных трех сторон трапеции(?).

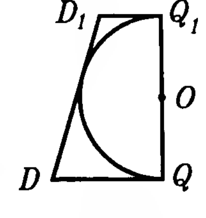


Рис.Р3.39

Сделаем отдельный рисунок (рис.Р3.39). O — центр шара, Q и Q_1 — точки касания. Но тогда

$$D_1Q_1 + DQ = DD_1. \qquad (?)$$

Осталось выразить эти величины через x и y. Из ΔABC

$$DQ = \frac{x}{\sqrt{3}}. \qquad (?)$$

Из $\Delta A_1B_1C_1$

$$D_1Q_1 = \frac{y}{\sqrt{3}}. \qquad (?)$$

Из трапеции AA_1C_1C

$$DD_1 = \sqrt{a^2 - (x-y)^2},$$

получаем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y) = \sqrt{a^2 - (x-y)^2}. \qquad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2), получим, что стороны оснований равны $a\cdot\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. ▲

2.14. В правильной четырехугольиой пирамиде центры вписанного и описанного шаров совпадают. Найдите косиниус двугранного угла при основании.

△ Пусть $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, PQ — ее высота, O — центр вписанного и описанного ша-

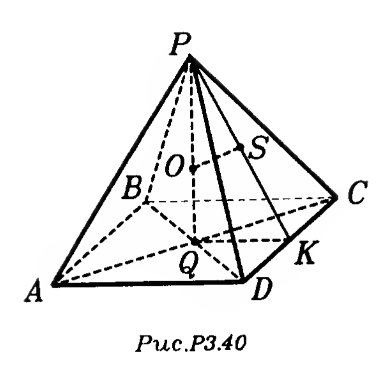


Рис.Р3.40

ра, PK — апофема пирамиды, OS — перпендикуляр на грань PCD (рис.Р3.40). Тогда OP — радиус описанного шара, $OS = OQ$ — радиус вписанного шара. Обозначим QK через x, PK — через y, радиус описанного шара — R, а радиус вписанного — r. Искомый косинус выражаем из ΔPQK (?)

$$\cos\varphi = \frac{QK}{PK} = \frac{x}{y}.$$

Так как $\angle POS = \angle PKQ$, то из ΔPOS запишем

$$\cos\varphi = \frac{OS}{OP} = \frac{r}{R}.$$

Получили первое уравнение

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{R}. \qquad (1)$$

Из ΔPQK по теореме Пифагора

$$PQ^2 = PK^2 - QK^2,$$

значит,

$$(R+r)^2 = y^2 - x^2. \qquad (2)$$

И, наконец, из ΔOQD, в котором $OD = R$, по теореме Пифагора имеем $OD^2 = OQ^2 + QD^2$, значит,

$$R^2 = r^2 + (x\sqrt{2})^2. \qquad (3)$$

Запишем полученные уравнения как систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{r}{R} & (1) \\ y^2 - x^2 = (R+r)^2 & (2) \\ 2x^2 = R^2 - r^2. & (3) \end{cases}$$

В этой системе четыре неизвестных, а уравнений всего три. Как же ее решать? А ее и не надо решать, ибо нужны не x и y, а их отношение.

Из (3) получаем $x^2 = \dfrac{R^2 - r^2}{2}$, подставив это значение x^2 в (2), получаем

$$y^2 = \frac{3R^2 + 4Rr + r^2}{2},$$

отсюда

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{R^2 - r^2}{3R^2 + 4Rr + r^2}.$$

Из (1) получаем

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Приравняем правые части

$$\frac{R^2 - r^2}{3R^2 + 4Rr + r^2} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Левую часть можно упростить, ибо знаменатель раскладывается на множители(?). Получаем

$$\frac{R - r}{3R + r} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Числитель и знаменатель левой части поделим на R. Получим

$$\frac{1 - \frac{r}{R}}{3 + \frac{r}{R}} = \frac{r^2}{R^2}.$$

Но $\dfrac{r}{R} = cos\varphi$. Тогда $\dfrac{1 - cos\varphi}{3 + cos\varphi} = cos^2\varphi$.

Решая это тригонометрическое уравнение, получим три корня, причем два из них не подходят по условию задачи. Остается один, именно

$$cos\varphi = \sqrt{2} - 1. \quad \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧИ К §4

Дополняем теорию

2.1. Две сферы имеют единственную общую точку. Установите зависимость между их радиусами и расстоянием между их центрами.

2.2. Докажите, что в одном и том же шаре: а) равные хорды равноудалены от центра (и обратно); б) чем больше хорда, тем ближе она к центру (и обратно); в) чем больше хорда, тем больше угол, под которым она видна из центра (и обратно).

2.3. Из одной точки сферы выходят равные хорды. а) Докажите, что они образуют равные углы с диаметром, выходящим из той же точки. б) Проверьте обратное утверждение. в) Какую фигуру образуют концы этих хорд, не совпадающие с данной точкой?

2.4. В шаре с центром O провели сечение с центром A. Докажите, что прямая OA перпендикулярна плоскости сечения.

2.5. Докажите, что центр шара лежит на: а) прямой, перпендикулярной любому его круговому сечению и проходящей через его центр; б) прямой, проходящей через центры двух его круговых сечений, лежащих в параллельных плоскостях.

2.6. Докажите, что в одном и том же шаре: а) равные сечения равноудалены от центра (и обратно); б) чем больше сечение, тем ближе оно к центру (и обратно).

2.7. На сфере проведены две окружности, имеющие единственную общую точку. Докажите, что центр сферы, центры обеих окружностей и общая точка лежат в одной плоскости.

Рисуем

2.8. Нарисуйте шар. Нарисуйте шар, центрально-симметричный данному относительно: а) точки, лежащей вне шара; б) точки, лежащей на его сфере; в) середины радиуса. Нарисуйте пересечение этих двух шаров (если оно не пусто).

2.9. Нарисуйте шар. Нарисуйте шар, зеркально-симметричный данному относительно плоскости: а) не пересекающей шар; б) касательной к шару; в) пересекающей шар. Нарисуйте пересечение этих двух шаров (если оно не пусто).

2.10. Нарисуйте шар. Нарисуйте его хорду, не лежащую в его экваториальной плоскости, а затем нарисуйте хорду: а) симметричную данной относительно центра шара; б) симметричную данной относительно экваториальной плоскости; в) симметричную данной относительно плоскости большого круга, причем этот большой круг пересекает данную хорду.

2.11. Нарисуйте фигуру, которая получается в результате вращения круга вокруг прямой, проходящей: а) мимо него; б) через точку на его окружности; в) внутри него, но не через центр.

2.12. Нарисуйте фигуру, которая получается в результате вращения кругового сегмента вокруг прямой, проходящей: а) через его хорду; б) параллельно его хорде; в) перпендикулярно его хорде; г) пересекающей его хорду в ее конце.

2.13. Нарисуйте фигуру, которая получается в результате вращения кругового сектора вокруг прямой, проходящей: а) через его крайний радиус; б) через его средний радиус; в) перпендикулярно его среднему радиусу и через центр круга; г) через центр круга и в его плоскости.

Планируем

2.14. Как найти длину шестидесятой параллели на Земле?

2.15. а) На сфере данного радиуса даны три точки. Расстояния между этими точками известны. Как найти расстояние от центра сферы до плоскости, проходящей через эти точки? б) Каждая сторона треугольника с данными сторонами имеет с шаром единственную общую точку. Как найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника?

2.16. Через одну прямую проведены к шару две касательные плоскости. Известен радиус шара и расстояние между точками касания шара с этими плоскостями. Как найти угол между этими плоскостями? Как найти расстояние от шара до общей прямой этих плоскостей?

Представляем

2.17. В пространстве зафиксирована точка. Какая фигура образована всеми точками такими, что: а) $OX < 2$; б) $OX \geq 1$; в) $1 \leq OX \leq 2$?

2.18. Рассмотрим на сфере фиксированную сетку меридианов и параллелей. а) Сколько меридианов проходит через данную точку сферы? б) Сколько параллелей проходит через данную точку сферы? в) Сколько общих точек имеют два меридиана? г) Через каждую ли точку на сфере проходит меридиан? Параллель? д) Как расположены плоскости: двух меридианов; двух параллелей; меридиана и параллели? е) Может ли длина параллели равняться длине меридиана? Быть больше длины меридиана? ж) Для каждой ли параллели есть параллель с той же длиной? с меньшей длиной?

2.19. На сколько частей разбивают сферу: а) две окружности, расположенные на ней; б) три окружности, расположенные на ней; в) плоскости граней тетраэдра, находящегося внут-

ри нее; г) плоскости граней треугольной призмы, находящейся внутри нее?

2.20. Сколько равных сечений шара можно провести через: а) данную точку шара; б) данную хорду шара?

2.21. На сфере дана точка. Сколько можно провести через нее: а) больших окружностей; б) окружностей данного радиуса, лежащих на сфере? Решите те же задачи, если будут даны две точки на сфере.

2.22. Шар касается плоскости. Эта фигура проектируется на плоскость, проходящую через радиус шара, проведенный в точку касания. Как выглядит проекция?

2.23. Две плоскости касаются шара. Эта фигура проектируется на плоскость, проходящую через радиусы, проведенные в точки касания. Как выглядит эта проекция, если две данные плоскости: а) параллельны; б) пересекаются?

2.24. Какой фигурой является множество точек пространства, из которых данный отрезок виден под данным углом?

2.25. Два шара имеют общую часть, отличную от точки. Является ли она: а) центрально-симметричной; б) зеркально симметричной? Обладает ли такими свойствами объединение таких шаров?

2.26. Какие элементы симметрии имеет: а) полушар; б) четверть шара; в) шаровой сегмент (часть шара между секущей его плоскостью и сферой); г) шаровой пояс (часть шара между двумя пересекающими его параллельными плоскостями); д) часть шара, отсеченная от него двумя перпендикулярными плоскостями, не проходящими через его центр?

Оцениваем

2.27. Шар лежит на плоскости. К нему проведены две касательные плоскости, образующие между собой данный угол и составляющие с данной плоскостью равные углы. В каком положении эти равные углы имеют наибольшее значение? А наименьшее?

2.28. а) Данный шар касается двух перпендикулярных плоскостей. Как расположен наименьший шар, касающийся данного шара и данных плоскостей? А наибольший? б) Решите аналогичную задачу, если плоскостей три.

Сделаем

2.29. Докажите, что два равных и параллельных сечения одного и того же шара: а) центрально-симметричны; б) зеркально симметричны.

Исследуем

2.30. В шаре данного радиуса провели два сечения данных радиусов. а) Как найти расстояние между ними, если эти сечения параллельны? б) Как найти расстояние от центра до их общего отрезка, если они пересекаются?

2.31. Шар пересекает две перпендикулярные плоскости. Известны радиусы получающихся при этом кругов. Можно ли найти радиус шара, если известные круги: а) имеют единственную общую точку; б) имеют общую хорду данной длины; в) находятся на известном расстоянии между собой?

2.32. В шаре радиусом R провели два сечения радиусом r, плоскости которых пересекаются под углом φ. Можно ли установить связь между R, r и φ, если эти сечения: а) имеют единственную общую точку; б) имеют общую хорду данной длины; в) находятся на известном расстоянии между собой?

2.33. На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности радиуса 1, каждая из которых касается трех других. Как найти радиус окружности, которая расположена на этой сфере и касается каждой из данных окружностей?

Поступаем в ВУЗ

2.34. В шаре проведен диаметр AB и две равные хорды AM и AN, каждая под углом α к диаметру. Найдите угол между хордами, если отрезок MN виден из центра шара под углом β.

Ответ: $2arcsin\dfrac{sin\beta}{2cos\alpha}$.

2.35. Отрезок AB единичной длины, являющийся хордой сферы радиуса 1, расположен под углом $\dfrac{\pi}{3}$ к диаметру CD этой сферы. Расстояние от конца C диаметра до ближайшего к нему конца A хорды равно $\sqrt{2}$. Определите величину отрезка CD.

Ответ: 1.

2.36. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, концы которых лежат на сфере радиуса 10, попарно перпендикулярны и пересекаются в точке M. Длина отрезка AA_1 равна 12, длина отрезка BB_1 равна 18. Найдите расстояние от центра сферы до точки M, если известно, что отношение длины отрезка CM к длине отрезка MC_1 равно $\dfrac{11}{3}$.

Ответ: $\sqrt{67}$.

2.37. Три хорды шара, исходящие из одной его точки на его поверхности, равны *A*, углы между хордами равны 60°. Найдите радиус шара.

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

2.38. В шаре радиуса *R* хорда *AB* равна *R*. Пусть точки *C* и *D* лежат на поверхности шара и угол *ACB* прямой, а угол *ADB* равен 60°. Найдите угол между плоскостями *ACB* и *ADB*.

Ответ: $arcsin\frac{1}{3}$.

2.39. Через касательную к шару радиуса *R* проведены две плоскости под углом 45° друг к другу. Найдите радиусы сечений шара этими плоскостями, если известно, что они относятся как 1:2.

Ответ: радиус большего сечения равен $R\sqrt{\frac{10+4\sqrt{2}}{17}}$.

2.40. Три параллельные прямые касаются в точках *A*, *B* и *C* сферы радиуса 4 с центром в точке *O*. Найдите угол *BAC*, если известно, что площадь треугольника *OBC* равна 4, а площадь треугольника *ABC* больше 16.

Ответ: $\frac{5\pi}{12}$.

2.41. В плоскости *P* дан равнобедренный треугольник *ABC* такой, что $AB=BC=\gamma$, $AC=2a$. Шар радиуса *r* касается плоскости *P* в точке *B*. Две скрещивающиеся прямые проходят через точки *A* и *C* и касаются шара. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью *P* равен α. Найдите расстояние между этими прямыми.

Ответ: $\frac{2a\cdot tg\alpha\sqrt{2r\gamma\cdot sin\alpha-(r^2+\gamma^2)\cdot sin^2\alpha}}{\sqrt{\gamma^2-a^2\cdot cos^2\alpha}}$.

2.42. Основанием тетраэдра *ABCD* является треугольник *ABC*, в котором $\angle A=\frac{\pi}{2}$, $\angle C=\frac{\pi}{6}$, $BC=2\sqrt{2}$. Длины ребер *AD*, *BD*, *CD* равны между собой. Сфера радиуса 1 касается ребер

AD, *BD*, продолжения ребра *CD* за точку *D* и плоскости *ABC*. Найдите величину отрезка касательной, проведенной из точки *A* к сфере.

Ответ: $\sqrt{3}-1$.

2.43. Отрезок *PQ* параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник *KLMN*, причем $KL=1$, $PQ=3$. Все стороны прямоугольника *KLMN* и отрезки *KP*, *LP*, *NQ*, *MQ*, *PQ* касаются некоторого шара. Найдите радиус этого шара.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$.

2.44. Сфера касается ребер *AS*, *BS*, *BC* и *AC* тетраэдра *SABC* в точках *K*, *L*, *M* и *N* соответственно. Найдите длину отрезка *KL*, если $MN=7$, $NK=5$, $LN=2\sqrt{29}$ и $KL=LM$.

Ответ: 9.

2.45. Две касающиеся сферы вписаны в двугранный угол величиной $\dfrac{\pi}{3}$. Пусть *A* — точка касания первой сферы с первой гранью, *B* — точка касания второй сферы со второй гранью. Найдите отношение *AK*:*KL*, если *K* и *L* — точки пересечения отрезка *AB* с первой и второй сферами соответственно.

Ответ: 3 : 1.

2.46. Два равных шара касаются друг друга и граней двугранного угла 2α. Пусть *A* — точка касания одного шара с одной гранью угла, а *B* — точка касания другого шара с другой гранью угла. В каком отношении отрезок *B* делится сферами?

Ответ: $1:tg^2\alpha:1$.

2.47. Три шара попарно касаются друг друга и некоторой плоскости. Точки касания шаров с плоскостью образуют прямоугольный треугольник с катетом, равным 3, и противоположным углом 30°. Определите радиусы данных шаров.

Ответ: $0{,}75\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$.

2.48. Три шара касаются плоскости треугольника со сторонами *a*, *b* и *c* в его вершинах и попарно касаются друг друга. Найдите радиусы шаров.

Ответ: $\dfrac{bc}{2a}$, $\dfrac{ac}{2b}$, $\dfrac{ab}{2c}$.

2.49. Шар радиуса R и окружность радиуса $1{,}25R$ имеют общий центр O. Точка A расположена так, что $AO = 1{,}25R$ и множество точек данной окружности, которые можно соединить с A прямой, не пересекающейся с шаром, есть дуга, соответствующая центральному углу α. Найдите угол между OA и плоскостью, содержащей данную окружность.

Ответ: $\arccos\left(\dfrac{7}{25\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right)$.

Переключаемся

2.50. Муравей ползет по сфере. Сначала он прополз по меридиану вниз, затем по параллели направо, затем по меридиану вверх. Длина каждого участка пути одна и та же. Может ли он оказаться там, где он был с самого начала?

2.51. Можно ли циркулем постоянного раствора проводить окружности разных радиусов?

2.52. Придумайте свой способ вычисления радиуса реального шара.

2.53. Маленькие шарики чуть отличаются между собой по диаметру. Предложите устройство для их быстрой сортировки по размерам.

2.54. Как измерить расстояние по земле между двумя населенными пунктами, если они находятся на: а) одном меридиане; б) одной параллели?

ЗАДАЧИ К §5

Дополняем теорию

2.55. Докажите, что три биссекторные плоскости трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

2.56. В трехгранном угле все углы при вершине — прямые. Из его вершины выходит луч. Пусть α, β, γ — углы, которые он составляет с ребрами трехгранного угла. Докажите, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Рисуем

2.57. Нарисуйте невыпуклый трехгранный угол.

2.58. Нарисуйте трехгранный угол. Нарисуйте трехгранный угол, центрально-симметричный данному относительно: а) вершины; б) точки внутри его ребра; в) точки внутри его

грани; г) точки внутри него. В случае г) нарисуйте пересечение и объединение исходного и полученного углов.

2.59. Нарисуйте трехгранный угол. Нарисуйте трехгранный угол, зеркально-симметричный данному относительно плоскости его грани.

Планируем

2.60. В трехгранном угле все плоские углы прямые. Известны два угла, которые составляет с двумя его ребрами луч, выходящий из вершины угла и проходящий внутри него. Как найти угол между этим лучом и третьим ребром?

2.61. Пусть известны три плоских угла трехгранного угла. Как вычислить: а) угол между его ребром и плоскостью противоположной грани; б) расстояние от некоторой точки ребра до плоскости противоположной грани; в) угол между ребром и лучом в противоположной грани, выходящим из вершины трехгранного угла; г) угол между ребром и лучом, выходящим из вершины трехгранного угла, если известно, какие углы он составляет с другими ребрами этого угла?

2.62. Каждый угол трехгранного угла равен 60°. Внутри угла расположена точка, удаленная от двух граней на расстояние a, а от третьей — на расстояние $2a$. Как найти расстояние от этой точки до вершины угла?

2.63. Пусть все двугранные углы трехгранного угла равны. Некоторая точка, лежащая внутри него, удалена от его вершины на данное расстояние и равноудалена от всех граней. Как найти расстояние от нее до его граней?

Представляем

2.64. Сколько трехгранных углов образуется при попарном пересечении трех плоскостей, имеющих общую точку?

2.65. Укажите элементы симметрии трехгранного угла, в котором: а) все плоские углы прямые; б) все плоские углы равны между собой; в) два плоских угла равны.

Оцениваем

2.66. Докажите, что сумма плоских углов выпуклого трехгранного угла меньше 2π.

Сделаем

2.67. Плоские углы трехгранного угла равны. Через его вершину проведена прямая, составляющая равные углы с его ребрами. а) Докажите, что она составляет равные углы с его гранями. б) Проверьте утверждение, обратное а). Пусть плоский угол трехгранного угла равен φ. Найдите углы, которые эта прямая составляет с ребрами и гранями трехгранного угла.

2.68. В трехгранном угле, плоские углы которого равны, находится точка, равноудаленная от его граней. Докажите, что она равноудалена от его ребер. Докажите обратное.

Исследуем

2.69. Верно ли, что каждый двугранный угол трехгранного угла меньше суммы двух его других двугранных углов?

2.70. Какими свойствами обладает трехгранный угол, в котором два плоских угла равны?

2.71. Какими свойствами обладает трехгранный угол, в котором три плоских угла равны?

Поступаем в ВУЗ

2.72. Трехгранный угол образован тремя плоскостями α, β, χ. Две плоскости α и β перпендикулярны плоскости χ, а между собой они образуют угол φ. Сфера S касается плоскости χ и пересекает плоскости α и β по окружностям радиуса R. Расстояние центра сферы от вершины трехгранного угла равно 1. Определите радиус сферы R.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{l^2 sin^2 0{,}5\varphi + r^2}{1 + sin^2 0{,}5\varphi}}$.

2.73. Один из двугранных углов трехгранного угла равен A; прилежащие к данному двугранному углу плоские углы равны α и β. Найдите третий плоский угол.

Ответ: $cos\chi = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta \cdot cosA$.

2.74. В трехгранном угле каждый из плоских углов при вершине равен α. Как удалена от его вершины точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждой грани?

Ответ: $\sqrt{3} arctg 0{,}5\alpha$.

2.75. Все плоские углы трехгранного угла $SPQR$ (S — вершина) — прямые. На грани PQS взята точка A на расстоянии 12 от ребра QS и на расстоянии 5 от ребра PS. Из некоторой точки T, расположенной внутри трехгранного угла $SPQR$, в точку A направлен луч света. Он образует угол $\dfrac{\pi}{4}$ с ребром RS и угол $\dfrac{\pi}{3}$ с ребром PS. Луч зеркально отражается от граней угла $SPQR$ сначала в точке A, затем в точке B, затем в точке C. Найдите длину отрезка BC.

Ответ: 14.

2.76. У трехгранного угла $OABC$ угол между гранями OAB и OBC прямой, а величина каждого иэ остальных двугранных углов равна χ. Найдите величину плоского угла AOC.

Ответ: $arccos(ctg^2\chi)$.

2.77. Дан трехгранный угол с вершиной O, у которого величина каждого из плоских углов равна φ. Плоскость α пересекает ребра этого трехгранного угла в точках A, B, C, причем $OA = OB$, а отрезок OC короче отрезка OA. Известно, что величина двугранного угла между плоскостью α и гранью OAB равна β. Два шара расположены по разные стороны от плоскости так, что каждый шар касается всех граней трехгранного угла и плоскости α. Найдите: а) величину угла между прямой, проходящей через центры шаров, и плоскостью грани OAB; б) отношеиие радиусов указанных шаров.

Ответ: $arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}tg\frac{\varphi}{2}\right)$; $\frac{\sqrt{3ctg^2\frac{\varphi}{2}-1}-tg\frac{\beta}{2}}{\sqrt{3ctg^2\frac{\varphi}{2}-1}+ctg\frac{\beta}{2}}$.

2.78. Каждый из двугранных углов трехгранного угла равен α. Как удалена от его вершины точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждого ребра?

Ответ: $\frac{a\cdot\sqrt{3}tg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3tg^2\frac{\alpha}{2}-1}}$.

ЗАДАЧИ К §6

Дополняем теорию

2.79. Докажите, что сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси и проходящей через внутреннюю точку его основания, является прямоугольником.

2.80. Докажите, что: а) около цилиндра можно описать сферу; б) в сферу можно вписать цилиндр.

2.81. Докажите, что около сферы можно описать цилиндр.

2.82. Докажите, что в цилиндр можно вписать сферу, если образующая цилиндра равна диаметру его основания.

Рисуем

2.83. Нарисуйте цилиндр. Нарисуйте его сечение: а) проходящее через ось; б) параллельное оси; в) перпендикулярное оси; г) какого-либо другого вида.

2.84. Нарисуйте цилиндр. Нарисуйте плоскость, опорную к нему и проходящую через: а) образующую; б) основание; в) как-нибудь иначе.

2.85. Нарисуйте множество точек: а) удаленных от данной прямой на данное расстояние; б) удаленных от данного отрезка на данное расстояние; в) удаленных от каждой из двух параллельных прямых на одно и то же расстояние.

2.86. Нарисуйте фигуру, которая получается в результате вращения прямоугольника вокруг прямой, проходящей: а) через его сторону; б) через его среднюю линию; в) мимо него и параллельио его стороне.

2.87. Нарисуйте фигуру, получающуюся при пересечении двух равных, тонких и достаточно длинных цилиндров, оси которых пересекаются под прямым углом.

2.88. а) В сферу вписан цилиндр. Нарисуйте осевое сечеиие этой фигуры. б) Около сферы описан цилиндр. Нарисуйте осевое сечение этой фигуры.

Планируем

2.89. В цилиндре с радиусом основания R и высотой H проводится сечеиие иа расстоянии x от оси цилиндра. Как выразить его площадь как функцию от x?

2.90. Две пересекающиеся плоскости, опорные к цилиндру радиуса R, проходят через его образующие. Как иайти расстояние от прямой пересечения этих плоскостей до цилиндра?

2.91. В даииую сферу вписан цилиндр с известными размерами. Как найти расстояние от центра сферы до поверхности цилиндра?

Представляем

2.92. Какие элементы симметрии есть у цилиндра?

2.93. На какое иаибольшее число частей можно разрезать цилиндр плоскими разрезами, если разрезов: а) 2; б) 3; в) 4?

2.94. Как плоским разрезом разбить цилиндр на две равные части?

2.95. Какой фигурой является проекция цилиндра на плоскость: а) параллельную его оси; б) перпендикулярную его оси; в) пересекающую его ось?

Оцениваем

2.96. Точка A находится на окружности одного из оснований цилиндра, а точка B — на окружности другого основания. а) При каком положении прямая AB составляет с плоскостью основания наименьший угол? б) В каком положении отрезок AB ближе всего к оси цилиндра? А дальше всего?

2.97. В шаре радиусом R находится цилиндр с наибольшим по площади осевым сечением. Как он расположен?

2.98. Рассмотрим всевозможные цилиндры с диагональю осевого сечеиия 1. Каковы наибольший из шаров, содержащих такой цилиндр, и наименьший?

2.99. Цилиндр радиуса R касается плоскости по некоторой образующей и, не пересекаясь с ним, этой же плоскости касается шар радиуса r. Расстояние от оси цилиндра до центра шара равно a. В каком положении находится минимальио возможный шар, который касался бы одновремеино цилиндра, плоскости и заданного шара?

Сделаем

2.100. Пусть плоскость, опорная к цилиндру, проходит через образующую его поверхности. Докажите, что она: а) проходит через прямую, опорную к его основанию; б) перпендикулярна плоскости осевого сечения цилиндра, проходящего через эту образующую.

2.101. Два цилиндра имеют единственную общую образующую на поверхности каждого из них. Через эту образующую проведена плоскость, опорная к одному из цилиндров. Докажите, что она будет опорной и к другому из них.

Исследуем

2.102. Два равных цилиндра, размеры которых известны, лежат на данной плоскости (то есть каждый из них имеет с ней общее основание или общую образующую иа поверхности). Цилиндры имеют единственную общую точку. Можете ли Вы найти расстояние между осями этих цилиндров?

2.103. Сможете ли Вы расположить пять равных цилиидров так, чтобы каждый имел единственную общую точку с каждым из остальных? А шесть таких же цилиндров?

Поступаем в ВУЗ

2.104. В цилиндре высота равна диаметру основания. Под углом α к плоскости основания проведена прямая, соединяющая некоторую точку окружности нижнего осиования с некоторой точкой окружности верхнего основания. Найдите расстояние между этой прямой и осью цилиндра, если радиус основания равен R.

Ответ: $\frac{\sqrt{-cos2\alpha}}{sin\alpha}R$.

2.105. Сторона основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 1, а каждое иэ боковых ребер имеет длину $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Цилиндр расположен так, что точка A_1 и середина M ребра CC_1 лежат на его боковой поверхности, а ось цилиндра параллельна прямой AB_1 и отстоит от нее на расстоянии 0,25. Определите радиус цилиндра.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

2.106. Внутри цилиндра, высота которого равна $3r$, лежат три равных шара радиуса r так, что каждый шар касается двух других шаров и боковой поверхности цилиндра, причем два шара касаются иижнего основания цилиндра, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найдите радиус основания цилиндра.

Ответ: $\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}r$.

2.107. На плоскость положеиы два цилиндра, радиусы которых r; цилиндры примыкают друт к другу по образующей. На них положеиы два других касающихся по образующей цилиндра с радиусами R и осями, перпендикулярными осям первых двух цилиндров. Найдите радиус шара, касающегося всех четырех цилиндров.

Ответ: $\frac{(R+r)^2}{2(R+r+\sqrt{R^2+6Rr+r^2})}$.

2.108. На плоскости лежат два шара с радиусами r и цилиндр с радиусом R ($R > r$). Шары касаются друт друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найдите радиус шара, большего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

Ответ: $\left(\frac{2R\sqrt{r}+r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)}\right)^2$.

Переключаемся

2.109. Как найти длину самого длинного предмета, который уместится в цилиндрическом футляре?

2.110. Для вычисления площади поверхности испарения горючего в цилиндрических цистернах, расположенных горизонтально, в справочниках предлагается использовать такую формулу: $S=0{,}865dl$, где d — диаметр основания цистерны, l — ее длина. Всегда ли целесообразно применять эту формулу?

2.111. Два шарика от настольного тенниса укладывают в цилиндрический футляр. При каком условии это возможно?

2.112. Внутри полого цилиндра должна вращаться прямоугольная рамка. Ось вращения перпендикулярна оси цилиндра и проходит через его середину. При каком условии это возможно?

ЗАДАЧИ К §7

Дополняем теорию

2.113. Докажите, что можно описать сферу около: а) правильной призмы; б) прямоугольного параллелепипеда.

2.114. Докажите, что в прямую призму можно вписать сферу, если ее высота равна диаметру окружности, вписанной в ее основание.

2.115. Докажите, что перпендикулярные сечения призмы равны между собой. (Перпендикулярное сечение призмы — это многоугольник, который получается при пересечении призмы или ее продолжения плоскостью, перпендикулярной ее образующей).

2.116. Докажите, что в прямой призме: а) плоскости боковых граней перпендикулярны основанию; б) высота равна боковому ребру; в) ее перпендикулярное сечение равно основанию.

2.117. Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Рисуем

2.118. Нарисуйте правильную треугольную призму и: а) плоскость ее симметрии, параллельную основанию; б) другие плоскости симметрии; в) ось поворотной симметрии.

2.119. Нарисуйте параллелепипед, имеющий: а) одну плоскость симметрии; б) две плоскости симметрии; в) три плоскости симметрии; г) одну ось поворотной симметрии; д) две оси поворотной симметрии; е) три оси поворотной симметрии. Решите аналогичную задачу для треугольной призмы.

2.120. 1) В треугольиой призме $ABCA_1B_1C_1$ вершина A_1 проектируется в центр треугольника ABC и все ее ребра равны. Нарисуйте: а) высоты этой призмы из вершин C и C_1; б) перпендикуляриое сечение этой призмы, проходящее через точку A_1; в) проекцию вершины A_1 на плоскость грани BCC_1B_1; г) проекции верхней грани и всей призмы на плоскость ABC; д) проекцию верхнего осиования на плоскость B_1BC.

2) Сделайте аналогичные рисунки в треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, у которой в основании иаходится равносторонний треугольник, грань AA_1C_1C является квадратом, а две другие в точках A и C имеют острые углы.

2.121. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани ромбы. Острые углы этих ромбов, равные 60°, сходятся в вершиие A. Нарисуйте: а) высоты этого параллелепипеда из вершии A_1 и C; б) перпендикулярные сечения, проходящие через точки D, C; в) проекции верхнего основания и всего параллелепипеда на плоскость ABC.

2.122. Нарисуйте прямоугольный параллелепипед. Нарисуйте ему симметричный относительно диагональной плоскости. Нарисуйте объединение исходного и полученного параллелепипедов.

Планируем

2.123. В правильной треугольной призме ребро основания равно 1, а боковое ребро равио 2. Как вычислить: а) расстояние между боковыми ребрами; б) расстояние между боковым ребром и плоскостью противоположной грани; в) расстояние от вершины одного из оснований до ребра в другом основании, которое не лежит с этой вершиной в одной грани; г) площадь сечения, проходящего через ребро основания и вершину другого основания, не лежащую с этим ребром в одной грани?

2.124. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны и $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60^\circ$. Как вычислить угол между: а) боковым ребром и основанием; б) прямой A_1C_1 и плоскостью B_1BC; в) боковыми гранями и основанием; г) боковыми гранями; д) боковым ребром и скрещивающимся ребром основания?

2.125. Как найти радиус сферы, описанной около: а) куба с ребром 1; б) прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c; в) правильной треугольной призмы с ребром 1?

Представляем

2.126. а) У призмы 10 вершин. Сколько у нее ребер и граней? б) У призмы 12 ребер. Сколько у нее вершин и граней? в) У призмы 13 граней. Сколько у нее вершин и ребер?

2.127. Можно ли одиой плоскостью разбить правильную треугольную призму на: а) две правильные треугольные призмы; б) две треугольные призмы, среди которых нет правильных; в) треугольную и четырехугольную призму; г) две равные призмы; д) два многогранника, не являющиеся призмами?

2.128. Как одним плоским разрезом разбить прямоугольный параллелепипед на: а) два прямоугольных параллелепипеда; б) две прямых треугольных призмы; в) две четырехугольных призмы, не являющихся параллелепипедами; г) два равных прямоугольных параллелепипеда?

Оцениваем

2.129. В правильной треугольной призме с ребром 1 проводится сечение через: а) ребро основания; б) диагональ боковой грани; в) вершину основания параллельно противоположному ребру. В каждом случае установите, в каком положении площадь такого сечения достигает граничных значений.

2.130. Высота прямой призмы равна 2, в ее основании — прямоугольник со сторонами 1 и 2. Через ребро основания проведено сечение. В каком положении оно имеет наибольшую площадь?

2.131. Из квадратного листа со стороной 1 делают правильную четырехугольную призму без одного из оснований. Какая из таких призм имеет наибольшую диагональ?

2.132. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях AB_1 и CA_1, параллельные плоскости ABB_1A_1. Какой из них имеет наименьшую длину?

Сделаем

2.133. В параллелепипеде проведены параллельные сечения, каждое из которых проходит через три его вершины, не лежащие в одной грани. Докажите, что они делят пересекающую их диагональ параллелепипеда иа три равные части.

Исследуем

2.134. Существует ли такой прямоугольный параллелепипед, в котором: а) диагональ в два раза длиннее самого длинного ребра; б) диагональ составляет с ребрами, выходящими из

той же вершины три заданных угла; в) диагональ в два раза длиннее самой длинной диагоиали грани; г) диагональ составляет с диагоналями граней, выходящими из той же вершины, три заданных угла?

Поступаем в ВУЗ

2.135. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a, точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственио. Длина ортогональиой проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равиа $\frac{5a}{6}$. Определите высоту призмы.

Ответ: $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2.136. В осиовании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$, боковые ребра имеют длину 4. Пусть K — точка пересечения диагоналей BC_1 и B_1C боковой грани BB_1C_1C. Сфера, центр которой принадлежит призме, касается граней ABC, AA_1B_1B, AA_1C_1C и прямой A_1K. Найдите радиус сферы.

Ответ: 0,75.

2.137. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 4. Прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны. Найдите высоту призмы.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

2.138. На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки D и E так, что $DE \parallel BC$. Определите отношение DE к BC.

Ответ: 1:2.

2.139. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найдите угол между этими диагоналями.

Ответ: $arccos(sin\alpha \cdot sin\beta)$.

2.140. Одна из вершин верхнего прямоугольного основания наклонного параллелепипеда проектируется ортогонально в центр его нижнего основания. Сечение, проведенное через эту вершину и параллельные диагонали оснований, имеет площадь два раза большую площади основания. Острый угол при вершине сечения равен $\frac{\pi}{3}$. Найдите отношение сторон основания.

Ответ: $\sqrt{3}:1$.

2.141. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которого лежит квадрат со стороной 3, боковые ребра имеют длину 5. Равносторонний треугольник расположен так, что одна его вершина находится в точке C, а две другие расположены на прямых BB_1 и C_1D_1 соответственно. Найдите длину медианы этого треугольника.

Ответ: $\frac{3\sqrt{30}}{2}$.

2.142. Основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб со стороной a и острым углом φ, а высота призмы равна h. Найти расстояние от вершины B_1 до диагонали A_1D.

Ответ: $\frac{a\sqrt{h^2 + a^2 sin^2 \varphi}}{\sqrt{h^2 + a^2}}$.

2.143. В параллелепипеде все грани — равные ромбы с острыми углами α. Найдите отношение площадей диагональных сечений параллелепипеда.

Ответ: $\sqrt{\frac{sin 1,5\alpha}{sin 0,5\alpha}}$.

2.144. Основанием призмы является квадрат со стороной длины a, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α, причем проекция одного из них содержит диагональ квадрата. Из вершины квадрата, для которой проходящее через нее ребро и диагональ квадрата образуют острый угол, параллельно другой диагонали проведена секущая плоскость под углом β к плоскости основания. Найдите площадь сечения в предположении, что сечение не пересекает верхнее основание.

Ответ: $\dfrac{sin\alpha}{sin(\alpha-\beta)}a^2$.

2.145. Докажите, что если все диагонали параллелепипеда равны, то он прямоугольный.

2.146. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки M и N так, что отрезки MN и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

Ответ: 1:3.

Переключаемся

2.147. 1) Из центра одного основания правильной треугольной призмы в центр другого основания ползет жук. Каков его кратчайший путь по поверхности призмы?

2) Решите аналогичную задачу для правильной четырехугольной призмы.

2.148. Можете ли вы вычислить длину диагонали спичечного коробка, ничего на нем не измеряя?

ЗАДАЧИ К §8

Дополняем теорию

2.149. В конусе радиусом R и высотой H проводится сечение, параллельное основанию. Выразите как функцию от x площадь этого сечения, где x — расстояние от вершины конуса до этого сечения.

2.150. Говорят, что конус вписан в сферу (а сфера описана около конуса), если его вершина и окружность основания лежат на сфере. Докажите, что около конуса можно описать сферу.

2.151. Говорят, что конус описан около сферы (а сфера вписана в конус), если есть такая сфера, которая лежит в конусе, касается основания, а с боковой поверхностью конуса имеет общую окружность. Докажите, что около сферы можно описать конус, а в конус можно вписать сферу.

Рисуем

2.151. Нарисуйте опорную плоскость к конусу, проходящую через: а) его образующую; б) его основание; в) ровно одну точку основания; г) вершину.

2.153. Нарисуйте конус. Нарисуйте конус: а) центрально симметричный данному относительно вершины; б) зеркально симметричный данному относительно плоскости основания; в) зеркально симметричный данному относительно плоскости,

параллельной основанию и пересекающей его ось. Нарисуйте объединение исходного и полученного конусов.

2.154. Равносторонний треугольник вращается вокруг: а) высоты; б) стороны; в) прямой, параллельной высоте и проходящей через вершину. Нарисуйте получившуюся фигуру вращения.

2.155. Квадрат вращается вокруг: а) диагонали; б) прямой, параллельной диагонали и проходящей через вершину. Нарисуйте получившуюся фигуру вращения.

2.156. Ромб вращается вокруг: а) стороны; б) прямой, перпендикулярной стороне и проходящей через вершину ромба. Нарисуйте получившуюся фигуру вращения.

П л а н и р у е м

2.157. Пусть R и r — радиусы оснований усеченного конуса, L — его образующая. Как найти его высоту?

2.158. В конусе радиусом R и высотой H провели два сечения, параллельные основанию. Их площади S и s. Как найти расстояние между этими сечениями?

2.159. Через вершину конуса проведено сечение. Пусть известен угол в осевом сечении конуса при его вершине и угол между образующими конуса, принадлежащими этому сечению. Как найти угол, который данное сечение составляет с плоскостью основания?

2.160. Как найти радиус шара, вписанного в конус?

2.161. В данную сферу вписан конус, размеры которого известны.

П р е д с т а в л я е м

2.162. Как проходит в конусе его сечение, являющееся: а) кругом; б) треугольником; в) какой-нибудь другой фигурой?

2.163. На сколько частей можно разделить конус: а) двумя плоскостями; б) тремя плоскостями?

2.164. В каждом ли конусе существует сечение, параллельное основанию, площадь которого равна площади осевого сечения?

2.165. Может ли в конусе находиться отрезок, более длинный, чем диаметр основания и образующая? А в усеченном конусе?

О ц е н и в а е м

2.166. В каком положении образующие конуса образуют между собой наибольший угол?

2.167. Дан конус. Какое положение имеет то его сечение, проходящее через вершину, которое имеет наибольшую площадь?

2.168. Дан шар. а) Как расположен такой вписанный в него конус, который имеет наибольшее по площади осевое сечение? А наименьшее? б) Решите аналогичную задачу про конус, описанный около данного шара.

2.169. Образующая поверхности конуса равна 1. Как расположен: а) наибольший описанный около него шар; б) наименьший описанный около него шар; в) наибольший вписанный в него шар; г) наименьший вписанный в него шар?

Сделаем

2.170. Через образующую конуса проведена плоскость, опорная к нему. Докажите, что она: а) проходит через прямую, опорную к его основанию; б) перпендикулярна осевому сечению конуса, проходящему через ту же образующую.

2.171. Угол при вершине осевого сечения конуса равен α. Угол между двумя его образующими равен β. Через эти образующие проводятся опорные плоскости к этому конусу. Как найти угол между: а) этими плоскостями; б) прямой пересечения этих плоскостей и плоскостью основания конуса?

2.172. Конус известных размеров стоит основанием на плоскости. Этой плоскости и боковой поверхности данного конуса касаются шары известного радиуса. Кроме того, каждые два соседних шара касаются между собой. Как подсчитать число таких шаров?

Исследуем

2.173. Три равных конуса лежат на плоскости и каждые два имеют общую образующую. Можно ли в образовавшееся углубление вложить такой же конус?

Поступаем в ВУЗ

2.174. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между высотой SO и образующей равен φ. На плоскости основания вне конуса выбраны две точки A и B так, что прямые SA и SB взаимно перпендикулярны и образуют с высотой SO углы, соответственно равные α и β. Вычислите угол между образующими, по которым боковая поверхность конуса пересекает треугольники OSA и OSB.

Ответ: $\arccos(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta)$.

2.175. В прямом круговом конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания равен β. Вычислите угол между биссектрисами углов OSA и OSB, где точка O является центром круга, служащего основанием конуса.

Ответ: $arccos\left(cos^2 0{,}5\beta + sin 0{,}5\beta\sqrt{\dfrac{cos\alpha - cos\beta}{2}}\right)$.

2.176. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе через его вершину проведена плоскость под углом φ. Определите площадь проведенного сечения.

Ответ: $\dfrac{R^2 \cdot tg\alpha\sqrt{1 - tg^2\alpha \cdot tg\ \varphi}}{cos\varphi}$.

2.177. Найдите центральный угол развертки боковой поверхности конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен α.

Ответ: $2\pi \cdot sin 0{,}5\alpha$.

2.178. В конусе высота равна диаметру основания. Через некоторую образующую конуса проведена плоскость, касательная к боковой поверхности конуса, и в этой плоскости через вершину конуса проведена прямая под углом α к образующей. Найдите угол, который составляет проведенная прямая с плоскостью основания.

Ответ: $arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}} cos\alpha\right)$.

2.179. Дан угол α $\left(\alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ осевого сечения конуса с вершиной S и образующей длины l. Через точку A, взятую на основании конуса, проведена плоскость P, которая перпендикулярна к образующей SA. Через вершину конуса проведена плоскость Q. Эта плоскость перпендикулярна плоскости осевого сечения конуса, проходящего через SA, и составляет с образующей SA конуса угол $\beta\left(\beta < \dfrac{\alpha}{2}\right)$. Плоскость Q рассекает конус по двум образующим. Пусть продолжения этих образующих пересекают плоскость P в точках C_1 и C_2. Найдите длину отрезка C_1C_2.

Ответ: $2i\dfrac{\sqrt{sin(\alpha - \beta) sin\beta}}{cos\dfrac{\alpha}{2} cos\beta}$.

2.180. Угол между образующей конуса и его высотой равен α. Найдите угол φ между двумя образующими этого конуса, если известно, что плоскости, касающиеся конуса по этим образующим, взаимно перпендикулярны.

Ответ: $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{tg\alpha}{\sqrt{2}}$.

2.181. Два конуса, осевое сечеиие каждого из которых является равносторонним треугольником со стороной a, лежат на горизонтальной плоскости, касаясь друг друга, имея общую вершину. На какой высоте над плоскостью находится точка касания оснований этих конусов?

Ответ: $a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.182. Три одинаковых конуса, радиусы оснований которых равны r и составляют 0,75 их высоты, расположены по одну сторону от плоскости P, а их основания лежат в этой плоскости. Окружности оснований каждых двух из этих конусов касаются. Найти радиус шара, лежащего между конусами и касающегося как плоскости P, так и всех трех конусов.

Ответ: $2r\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

2.183. На плоскости лежат три равных конуса с общей вершиной. Каждый из них касается двух рядом лежащих. Найдите угол при вершине осевого сечения одного из этих конусов.

Ответ: $2arctg\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.184. На плоскости уложены n равных конусов, имеющих общую вершину в точке, лежащей на этой плоскости. Каждый конус касается двух других конусов. Найдите угол при вершине в осевом сечении конуса.

Ответ: $2arctg\,\sin\frac{\pi}{n}$.

Переключаемся

2.185. Как найти длину самого длинного предмета, который можно уместить в футляре, имеющем форму: а) конуса; б) усеченного конуса?

2.186. Закрепив вершину, конус покатили по плоскости. а) Какая получается фигура от движения оси? б) Пусть разме-

ры конуса известны. Как вычислить путь, который проделает центр основания конуса за один оборот конуса?

2.187. Вот цитата из Пушкина: "Читал я где-то, Что царь однажды воинам своим Велел снести земли по горсти в кучу, И гордый холм возвысился — и царь Мог с вышины с весельем озирать И дол, покрытый белыми шатрами, И море, где бежали корабли." Могло ли такое быть на самом деле?

ЗАДАЧИ К §9

Дополняем теорию

2.188. Докажите, что в правильной пирамиде: а) проекция высоты на боковую грань лежит на высоте грани (апофеме пирамиды); б) проекция высоты на ребро основания — середина этого ребра; в) каждая точка высоты равноудалена от боковых ребер, вершин основания, ребер основания, боковых граней; г) угол между боковым ребром и плоскостью основания один и тот же для всех ребер пирамиды; д) угол между боковой гранью и плоскостью основания для всех боковых граней один и тот же; е) все углы между соседними боковыми гранями равны.

2.189. Докажите, что: а) около правильной пирамиды можно описать сферу; б) около тетраэдра можно описать сферу; в) в правильную пирамиду можно вписать сферу.

Рисуем

2.190. Нарисуйте проекцию правильной треугольной пирамиды на плоскость: а) основания; б) проходящую через боковое ребро и апофему; в) боковой грани.

2.191. Нарисуйте проекцию правильной четырехугольной пирамиды на плоскость: а) основания; б) проходящую через апофемы, лежащие в противоположных гранях; в) боковой грани; г) проходящую через два противоположных боковых ребра.

2.192. Нарисуйте правильную усеченную пирамиду: а) треугольную; б) четырехугольную.

2.193. Нарисуйте правильную треугольную пирамиду. Нарисуйте затем пирамиду: а) центрально симметричную данной относительно середины ее высоты; б) зеркально симметричную данной относительно плоскости, параллельной основанию и проходящей через середину высоты; в) полученную в результате поворота вокруг высоты на угол 60°. В каждом случае нарисуйте объединение исходной и полученной пирамиды.

2.194. Нарисуйте правильную четырехугольную пирамиду. Нарисуйте затем пирамиду: а) центрально симметричную данной относительно середины ее высоты; б) зеркально симмет-

ричную данной относительно плоскости, параллельной основанию и проходящей через середину высоты; в) полученную в результате поворота вокруг высоты на угол 45°. В каждом случае нарисуйте объединение исходной и полученной пирамиды.

Планируем

2.195. В правильной n-угольной пирамиде известны сторона основания и плоский угол при вершине. Как найти: а) высоту пирамиды; б) радиус описанной сферы; в) радиус вписанной сферы; г) угол между боковым ребром и плоскостью основания; д) угол между апофемой и плоскостью основания; е) угол между боковой гранью и основанием; ж) угол между соседними боковыми гранями; з) угол между гранями, идущими через одну?

2.196. В правильной n-угольной усеченной пирамиде известны стороны оснований и боковое ребро. Как вычислить высоту пирамиды?

2.197. В правильной треугольной пирамиде известны сторона основания и высота. Как вычислить площадь сечения, проходящего: а) параллельно основанию через середину высоты; б) через боковое ребро и высоту; в) через сторону основания перпендикулярно боковому ребру; г) через центр основания параллельно боковой грани; д) через середины четырех ребер?

2.198. В правильной четырехугольной пирамиде известны сторона основания и высота. Как вычислить площадь сечения, проходящего через: а) середину бокового ребра параллельно основанию; б) диагональ основания перпендикулярно боковому ребру; в) диагональ основания параллельно боковому ребру; г) центр основания параллельно боковой грани; д) ребро основания перпендикулярно боковой грани?

2.199. В тетраэдре $PABC$ основанием является правильный треугольник. $PBC \perp ABC$, другие боковые грани составляют с основанием угол φ. Как вычислить угол между: а) прямыми PA и BC; б) прямыми PB и AC; в) прямой PA и плоскостью ABC; г) плоскостями PAB и PAC; д) плоскостями PAC и PBC?

2.200. Основанием пирамиды $PABCD$ является квадрат $ABCD$. $PB \perp ABC$. $PB = AB$. Как вычислить угол между: а) прямыми PD и AB; б) прямой PD и плоскостью APC; в) прямой AD и плоскостью DPC; г) плоскостями PAB и PCD; д) плоскостями PAD и PCD?

Представляем

2.201. Как разрезать тетраэдр на: а) два тетраэдра; б) усеченную пирамиду и пирамиду; в) треугольную пирамиду и четырехугольную пирамиду; г) два многогранника, не являющихся пирамидами; д) призму и две пирамиды?

2.202. Как разрезать четырехугольную пирамиду на: а) два тетраэдра; б) две четырехугольные пирамиды; в) пирамиду и усеченную пирамиду; г) четырехугольную пирамиду и многогранник, не являющийся пирамидой; д) два многогранника, не являющихся пирамидами?

2.203. Какие элементы симметрии можно найти в правильной усеченной пирамиде?

2.204. Основанием пирамиды является квадрат. Сколько ее граней могут быть прямоугольными треугольниками?

Оцениваем

2.205. В какой правильной треугольной пирамиде достигает граничных значений двугранный угол между соседними боковыми гранями? Обобщите полученный результат.

2.206. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Все ее боковые грани — прямоугольные треугольники. Через ее наибольшее ребро проводится переменное сечение. Когда его площадь достигает граничных значений?

2.207. В правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания и высотой, равными 1, вписан прямоугольный параллелепипед, основание которого расположено в плоскости основания пирамиды, а вершины противоположной грани — на боковой поверхности пирамиды. Площадь основания параллелепипеда равна $\frac{1}{18}$. В каком положении диагональ параллелепипеда имеет наименьшее значение? А наибольшее?

2.208. Сторона основания правильной треугольной пирамиды имеет длину a, боковое ребро — длину b. Сечение пирамиды проводится плоскостью, параллельной ребру основания и боковому ребру. Какое из них имеет наибольшую площадь?

Сделаем

2.209. В тетраэдре проведены отрезки, соединяющие его вершины с точками пересечения медиан противоположных граней. Докажите, что эти отрезки имеют общую точку. В каком отношении они делятся этой точкой?

Исследуем

2.210. В основании пирамиды — квадрат. Вершина пирамиды проектируется в центр основания, а два боковых ребра равны a и b. Можно ли найти другие боковые ребра пирамиды?

2.211. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная к противоположной грани. Как вычислить площадь сечения, если сторона основания равна a и двугранный угол при основании равен α.

Поступаем в ВУЗ

2.212. Основанием тетраэдра $PABC$ является треугольник ABC с углом $C=90^\circ$ и острым углом 30°. Боковые ребра тетраэдра наклонены к плоскости основания под углом 45°, высота тетраэдра равна H. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точку C параллельно AB и делящей грань ASB на части равной площади.

Ответ: $H^2\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

2.213. В основании тетраэдра $PABC$ лежит правильный треугольник ABC, а все боковые грани имеют равные площади. Ребро PA равно 2 см, ребро PB равно $\sqrt{2}$ см. Через вершину B перпендикулярно к ребру PC проведено сечение тетраэдра. Найдите площадь этого сечения.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{6}}{40}$.

2.214. Все грани тетраэдра — равные равнобедренные треугольники. Высота тетраэдра совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найдите высоту тетраэдра, если расстояние между наибольшими боковыми ребрами равно 1.

Ответ: $\sqrt{2}$.

2.215. В тетраэдре боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны a, b, c. Высота тетраэдра, опущенная из вершины на основание, равна h. Докажите, что $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{h^2}$.

2.216. В тетраэдре $PABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине A, B, C равны π. Найдите расстояние между скрещивающимися ребрами PA и BC, если $BC=4$, $AC=5$, $AB=6$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{61}{2}}$.

2.217. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что его ребра AD и BC перпендикулярны в том и только в том случае, когда выполняется равенство: $AB^2 + DC^2 = AC^2 + DB^2$.

2.218. Основанием тетраэдра $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину AB.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

2.219. Докажите, что треугольная пирамида является правильной, если: а) шар касается трех сторон основания в их серединах, а середины боковых ребер лежат на поверхности шара; б) шар касается всех боковых граней пирамиды в точках пересечения их медиан; в) шар касается боковых граней треугольной пирамиды в точках пересечения их высот, а сумма плоских углов при каждой вершине одна и та же; г) шар касается всех боковых граней в центрах описанных около них окружностей и все плоские углы при вершине равны; д) шар касается всех боковых граней в центрах вписанных в них окружностей. (Каждая из задач а)—д) предлагалась на вступительном экзамене как часть некоторой другой задачи).

2.220. В основании тетраэдра лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из его граней перпендикулярна плоскости основания. Она является равнобедренным треугольником с боковой стороной b $(b \neq a)$. Найдите площадь того сечения тетраэдра, которое является квадратом.

Ответ: $\dfrac{a^2(2b^2 + a^2)}{\left(a\sqrt{2} + \sqrt{2b^2 + a^2}\right)^2}$.

2.221. В тетраэдре $KLMN$ плоские углы LKN и MKN при вершине равны 45° и 135° соответственно. Угол между гранями LKM и MKN равен 90°. Определите плоский угол LKM.

Ответ: 120°.

2.222. Все высоты тетраэдра $EFGH$, грани которого являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $FG = 17$, $HG = 14$, $\angle EHG = 60^\circ$. Найдите длину ребра HF.

Ответ: $\sqrt{247}$.

2.223. Боковые ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны. Высота тетраэдра равна h. Найдите радиус сферы, описанной около тетраэдра.

Ответ: $1{,}5h$.

2.224. Основанием тетраэдра служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют каждая длину b. Боковые грани тетраэдра, проходящие через эти стороны, перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой угол α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания равен также α. Определите радиус шара, вписанного в тетраэдр.

Ответ: $b \cdot cos 0{,}5\alpha \cdot tg 0{,}25\alpha$.

2.225. В тетраэдре $PABC$ плоские углы при вершине P — прямые. Докажите, что вершина P, точка G пересечения медиан основания и центр O описанного около тетраэдра шара принадлежат одной прямой.

2.226. В тетраэдре $PABC$ боковое ребро PC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом $\frac{\pi}{3}$. Вершины A, B, C и середины боковых ребер тетраэдра расположены на сфере радиуса 1. Докажите, что центр этой сферы лежит на ребре AB и найдите высоту тетраэдра.

Ответ: $\sqrt{3}$.

2.227. Шар радиуса r касается всех ребер тетраэдра. Центр шара лежит внутри тетраэдра на его высоте на расстоянии $r \cdot \sqrt{3}$ от вершины. Докажите, что тетраэдр является правильной пирамидой. Найдите ее высоту.

Ответ: $\frac{4}{3} r\sqrt{3}$.

2.228. В основании тетраэдра лежит прямоугольный треугольник. Вершины основания и середины его боковых ребер лежат на одной сфере. Докажите, что углы наклона боковых ребер к основанию равны между собой. Найдите углы наклона

боковых граней тетраэдра к плоскости основания, если катеты основания равны a и b, а высота тетраэдра равна H.

Ответ: $0{,}5\pi$; $arctg\frac{2H}{a}$; $arctg\frac{2H}{b}$.

2.229. Дан тетраэдр $ABCD$. Скрещивающиеся ребра AC и BD, AD и BC перпендикулярны, ребра AB и CD равны, все ребра касаются шара радиуса r. Найдите площадь грани ABC.

Ответ: $2r^2\sqrt{3}$.

2.230. В тетраэдре, ребро которого равно $3\sqrt{3}$, высота служит диаметром шара. Найдите длину линии пересечения поверхности тетраэдра и шара.

Ответ: 4π.

2.231. В тетраэдре $PABC$ грани PAC и ABC перпендикулярны и являются равными равнобедренными треугольниками ($AP=AC=AB=a$, угол PAC равен $\frac{\pi}{6}$). Найдите высоту конуса, окружность основания которого проходит через точки A, B и C, а боковая поверхность — через точку P.

Ответ: $\frac{a(2+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}}$.

2.232. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB и BD прямые, $\angle ACD=\alpha$. Вершина конуса совпадает с одной из вершин тетраэдра, окружность основания конуса вписана в одну из граней. Найдите угол в осевом сечении конуса.

Ответ: $2arctg\sqrt{sin\frac{\alpha}{2}}$.

2.233. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ (D — вершина, ABC — основание). Известно, что $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам AD и BC и отстоящая на расстоянии d от ребра AD. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{5}}ad-\frac{8\sqrt{2}}{5}d^2$.

2.234. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, высота в которой в два раза больше стороны основания, на боковых ребрах SB и SC взяты точки M и N так, что MN параллель-

на BC. Через прямую MN проходят плоскости α и β. Плоскость α перпендикулярна плоскости грани SBC и содержит точку A, плоскость β проходит через середину бокового ребра SA. Найдите отношение площадей сечений пирамиды плоскостями α и β.

Ответ: $\sqrt{\frac{211}{147}}$.

2.235. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания, равной a, углы между ребрами при ее вершине равны α $(\alpha \le 90^\circ)$. Определите площадь сечения, проведенного через сторону основания перпендикулярно противоположному боковому ребру.

Ответ: $\frac{a^2}{4}\sqrt{4cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$.

2.236. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна b, а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в пирамиду, касается грани ACD в точке K. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и ребро AB.

Ответ: $\frac{\sqrt{219}}{36}b^2$.

2.237. В правильную треугольную пирамиду $PABC$ вписан шар единичного радиуса; двугранный угол при ребре основания равен 60°. Докажите, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра AB и BC в некоторых точках M и N таких, что $MN=5$, касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, пересекающая продолжение высоты пирамиды PK за точку K в некоторой точке D. Найдите длину отрезка PD.

Ответ: 9.

2.238. Шарик лежит на основании правильной треугольной пирамиды, касаясь основания в его центре. Плоскость, проведенная через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, касается этого шарика. Найдите радиус шарика, если высота пирамиды равна H, сторона основания пирамиды равна a.

Ответ: $a\left(\dfrac{\sqrt{48H^2+a^2}-a}{48H}\right)$.

2.239. Сфера вписана в правильную треугольную пирамиду $SABC$, а также вписана в правильную треугольную призму $KLMK_1L_1M_1$, у которой $KL=KM=\sqrt{6}$, а боковое ребро KK_1 лежит на прямой AB. Найдите радиус сферы, если известно, что прямая SC параллельна плоскости LL_1M_1M.

Ответ: $\sqrt{3}-1$.

2.240. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ угол между боковым ребром PA и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между ребром PA и плоскостью грани PBC. Определите этот угол.

Ответ: $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

2.241. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, длина апофемы пирамиды равна $1{,}5a$. Ортогональной проекцией пирамиды на плоскость, перпендикулярную одной из боковых граней, является равнобедренная трапеция. Найдите площадь этой трапеции.

Ответ: $\dfrac{4}{\sqrt{17}}a^2$.

2.242. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен $\dfrac{\pi}{3}$. Докажите, что один из двугранных углов этой пирамиды вдвое меньше другого.

2.243. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$, у которой все ребра равны a. Через вершину A основания проведена плоскость, параллельная диагонали BD и образующая с плоскостью основания угол 30°. Найдите площадь сечения.

Ответ: $\dfrac{2a^2(2\sqrt{3}-3)}{3}$.

2.244. В шар вписана пирамида, боковые ребра которой равны c. Основание ее — прямоугольник, стороны которого

стягивают дуги α и β в сечениях шара плоскостями боковых граней. Определите радиус описанного шара.

Ответ: $\dfrac{c}{\sqrt{2(\cos 0{,}5\alpha + \cos 0{,}5\beta)}}$.

2.245. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро пирамиды равно b. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

Ответ: $\dfrac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$.

2.246. Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, находится на расстоянии a от боковой грани и на расстоянии b от бокового ребра. Найдите радиус сферы.

Ответ: $\dfrac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$.

2.247. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, находится на расстоянии $\sqrt{2}$ от бокового ребра и на расстоянии $\sqrt{5}$ от стороны основания. Найдите радиус шара.

Ответ: $0{,}5\sqrt{5}$.

2.248. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна b, а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в эту пирамиду, касается боковой грани PAD в точке K. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и ребро AB.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{17}}{16}b^2$.

2.249. В четырехугольной пирамиде $ABCDE$ основание $ABCD$ — параллелограмм, а грани ADE и BCE — прямоугольные треугольники. Ребро BC перпендикулярно медиане EP грани CDE и $BC=EP$. Сечением пирамиды плоскостью является равнобокая трапеция $GKHL$, вершины которой G, K, H, L лежат соответственно на ребрах AE, BE, CE, DE, причем $GE=3GA$ и $GH=EH$. Найдите отношение площади трапеции $GKHL$ к площади грани ABE.

Ответ: $\frac{5\sqrt{5}}{16}$.

2.250. В основании пирамиды находится ромб. Шар касается боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания пирамиды. Докажите, что прямая, соединяющая вершину пирамиды с центром шара, проходит через точку пересечения диагоналей ромба.

2.251. В правильной пятиугольной пирамиде задан двугранный угол φ при боковом ребре. Найдите плоский угол при вершине боковой грани.

Ответ: $2\arccos\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

2.252. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна a, а высота равна h. Вычислите площадь сечения, проходящего через середины двух несмежных и непараллельных сторон основания и середину высоты пирамиды.

Ответ: $\frac{25}{64}a\sqrt{4h^2+3a^2}$.

2.253. В правильной шестиугольной пирамиде вписанная сфера проходит через центр описанной. Во сколько раз радиус описанной сферы больше радиуса вписанной?

Ответ: $1+\sqrt{\frac{7}{3}}$.

2.254. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ нижнее основание — квадрат $ABCD$ со стороной 3, верхнее основание $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат со стороной 1, боковые ребра имеют длину 3. Точка M — середина ребра C_1D_1. Через точку M проходит прямая, пересекающая прямые AA_1 и BC в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ.

Ответ: $\frac{3\sqrt{101}}{5}$.

П е р е к л ю ч а е м с я

2.255. Высоту пирамиды Хеопса Фалес нашел по ее тени. А вы смогли бы это сделать?

2.256. а) Из одной точки и в разных направлениях полетели четыре вороны. В некоторый момент времени они оказались в одной плоскости. Повторится ли еще такая ситуация? б) В другой раз эти же вороны вылетели из одной точки по четырем направлениям со скоростями 1, 2, 3, 4 соответственно. Окажутся ли они в какой нибудь момент времени в одной плоскости?

2.257. В одном задачнике по геометрии было написано, что не существует четырехугольной пирамиды, у которой противоположные грани перпендикулярны основанию. Опровергните это утверждение.

ГЛАВА 3

ТЕЛА, ПОВЕРХНОСТИ, МНОГОГРАННИКИ

Основной предмет геометрии в пространстве составляют геометрические тела или, как говорят короче, тела, а также их поверхности. Изучая в главе 2 частные виды геометрических тел — пирамиду и призму, цилиндр и конус вращения, шар, мы до сих пор не дали общего определения тела. В этом пока не было необходимости, так как каждому из конкретных геометрических тел мы давали свое определение, чаще всего конструктивное, т.е. указывающее как построить это тело (например, для пирамид или цилиндров). В этой главе мы определим, что в геометрии называют телом. Этим мы подытожим те наглядные представления о телах, которыми вы уже владеете. Средствами элементарной геометрии достаточно глубоко можно изучать два класса тел — многогранники и выпуклые тела. О них также рассказано в этой главе.

*§10. ТЕЛА И ИХ ПОВЕРХНОСТИ

10.1. **Наглядное представление о телах.** Понятие о геометрическом теле дает любое реальное физическое тело и можно сказать, что геометрическое тело — это часть пространства, занимаемое физическим телом (рис.10.1).

Каждое тело мы представляем себе имеющим внутренние точки, отделенные от остального пространства поверхностью или, как еще говорят, границей тела. Так внутренность шара отделена от остального пространства сферой, а внутренности цилиндра и конуса вращения — их поверхностями. Уточнение сказанного

Рис.10.1

о телах мы и начнем с точных определений понятий границы и внутренности.

10.2. **Граница и внутренность.** Определения границы фигуры и ее внутренности вполне соответствуют наглядным представлениям о них. То, что точка A лежит на границе фигуры F означает, что сколь угодно близко к ней, кроме точек самой фигуры F, имеются также и точки, не принадлежащие фигуре F (рис.10.2).

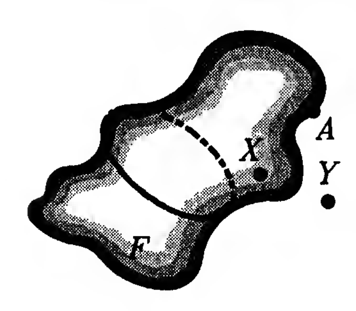


Рис.10.2

Итак, точка называется **граничной** для данной фигуры, если сколь угодно близко от нее есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Выражение "сколь угодно близко" означает "на сколь угодно малом расстоянии". Реальные примеры граничных точек — точки на границе государства или на границе садового участка.

Множество граничных точек фигуры называется ее **границей**.

Точка фигуры, не лежащая на ее границе, называется **внутренней** точкой фигуры.

Множество внутренних точек фигуры называется ее **внутренностью**.

Внутренность фигуры получается, если из фигуры исключены все ее граничные точки, т.е. удалена ее граница. Например, сфера радиусом R с центром O является границей шара радиуса R и тем же центром O. Множество точек X, для которых $OX < R$ является внутренностью этого шара.

Граница фигуры может принадлежать ей, а может и не принадлежать или принадлежать отчасти, как, скажем, у куба с одной или со всеми исключенными гранями.

Точки, которые не являются ни внутренними, ни граничными для фигуры, называются **внешними** для нее точками.

Данные общие определения относятся не только к стереометрии, но также и к планиметрии. В планиметрии точка называется граничной для данной фигуры, если сколь угодно близко от нее есть точки плоскости, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Внутренние точки фигуры — это те точки, вблизи которых нет точек плоскости, не принадлежащих фигуре. Например, окружность круга — это его граница на плоскости, и, исключая ее, получаем внутренность круга на плоскости.

В стереометрии фигура рассматривается в пространстве. Граничные точки фигуры — это те, сколь угодно близко к которым есть точки пространства, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей.

Поэтому если плоская фигура рассматривается как фигура в пространстве, то, очевидно, сколь угодно близко к любым ее точкам есть точки пространства, ей не принадлежащие, — точки вне плоскости фигуры. Как фигура в пространстве, она сплошь состоит из граничных точек.

Следовательно, понятия границы и внутренности относительны: говоря о внутренних точках или о границе, нужно иметь в виду, относительно чего они берутся. Так, например, можно говорить о внутренних и граничных точках фигуры на сфере относительно сферы и т.п.

На плоскости точки, расположенные от данной точки A не более чем на данное расстояние r, образуют круг с центром в точке A. В пространстве же такие точки образуют шар. Поэтому внутренние и граничные точки фигуры можно характеризовать следующим образом.

В пространстве точка A является граничной точкой фигуры F, если во всяком шаре с центром A (как бы он мал не был) содержатся точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Точка B является внутренней точкой фигуры, если есть шар с центром B, который целиком содержится в фигуре, т.е. не содержит точек, не принадлежащих фигуре (рис.10.3).

На плоскости граничные и внутренние точки характеризуются так же, только вместо шара берется круг.

10.3. Определение тела и замкнутой плоской области. Теперь можно дать точное определение того, что называют в геометрии телом.

Телом называется ограниченная фигура в пространстве, обладающая двумя свойствами:

1) у нее есть внутренние точки и любые две из них можно соединить ломаной (или отрезком) внутри фигуры;

2) фигура содержит свою границу, и ее граница совпадает с границей ее внутренности.

Согласно первому условию, внутренность тела не распадается на отдельные куски. Поэтому фигура, состоящая из объединения двух шаров, не имеющих общих точек, телом не считается. Точно так же не считается телом фигура, состоящая из двух шаров, имеющих лишь одну общую точку, или двух кубов, имеющих лишь одну общую вершину или лишь одно общее ребро (рис.10.4).

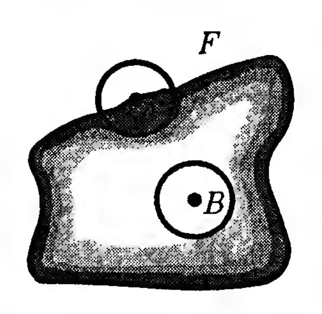
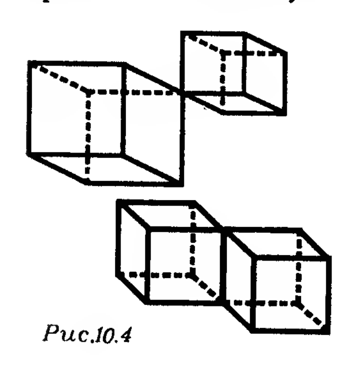
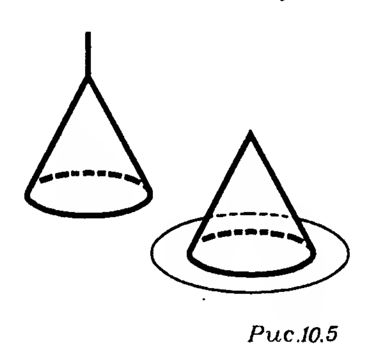


Рис.10.3

Второе условие означает, во-первых, что граница тела принадлежит ему, так что шар без сферы или даже шар без одной ее точки — уже не тело. Во-вторых, согласно условию 2, граница тела везде прилегает к его внутренности, так что конус со шпилем — отрезком — или конус с плоскими "полями", как у шля-


Рис.10.4


Рис.10.5

пы, телами не считаются (рис.10.5). Отметим также, что тело является ограниченной фигурой, так что, например, полупространство телом не является.

Граница тела называется его **поверхностью.**

Проверьте, применив определение тела, что шар, пирамида, призма, цилиндр вращения и конус вращения являются телами.

Аналогом понятия тела в планиметрии является понятие замкнутой области.

Замкнутой областью называется фигура на плоскости, обладающая двумя свойствами:

1) у нее есть внутренние точки и любые две из них можно соединить ломаной (или отрезком) внутри фигуры;

2) фигура содержит свою границу, и ее граница совпадает с границей ее внутренности.

Разница в определении тела лишь в том, что там граница и внутренность понимаются относительно пространства, а здесь — относительно плоскости.

Теперь мы можем дать ответ на такой вопрос: когда цилиндр или конус являются телом? Ответ таков: *цилиндр и конус являются телами тогда и только тогда, когда их основаниями являются замкнутые области*. Обдумайте эти утверждения и попробуйте их доказать.

Для цилиндра и конуса, являющихся телами, можно определить понятия их боковых поверхностей. Их боковые поверхности состоят из образующих, концы которых лежат на границе их оснований. Вся же поверхность слагается из их боковой поверхности и оснований.

10.4. **Выпуклые фигуры.** Одним из важнейших классов тел является класс выпуклых тел. Перед тем как рассказать о нем, познакомимся с более общим понятием выпуклой фигуры.

Фигура называется выпуклой, если вместе с каждыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок (рис.10.6).

Точка и пустое множество (фигура, не имеющая точек) считаются выпуклыми фигурами.

Примеры выпуклых фигур: отрезок, луч, прямая, плоскость, треугольник, параллелограмм, круг, все пространство, полупространство, шар (рис.10.7). Докажем, например, что *круг — выпуклая фигура.*

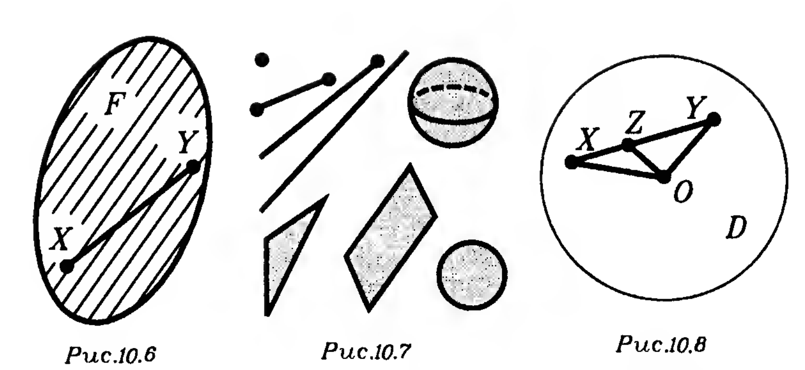


Рис.10.6 Рис.10.7 Рис.10.8

Рассмотрим круг D радиуса R с центром O (рис.10.8). Возьмем любые две точки $X \in D$ и $Y \in D$. Тогда $OX \le R$ и $OY \le R$. Возьмем любую точку Z на отрезке XY. Тогда выполняется хотя бы одно из двух неравенств: $OZ < OX$ или $OZ < OY$ (так как хотя бы один из смежных углов OZX и OZY не острый). Поскольку $OX \le R$ и $OY \le R$, то и $OZ < R$, т.е. $Z \in D$. А это значит, что отрезок XY содержится в круге D, т.е. круг D — выпуклая фигура. ■

Докажем несколько предложений о выпуклых фигурах. Начнем с самого важного из них.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пересечение (общая часть) любых двух выпуклых фигур есть выпуклая фигура, и вообще, пересечение любой совокупности выпуклых фигур есть выпуклая фигура.*

□ Пусть F_1 и F_2 — две выпуклые фигуры и F — их пересечение (рис.10.9). Если две точки A и B принадлежат фигуре F, то значит они принадлежат и фигурам F_1 и F_2. А тогда по выпуклости фигуры F_1, она содержит отрезок AB. Аналогично, F_2 содержит отрезок AB. Поэтому отрезок AB содержится и в F_1, и в F_2, т.е., в фигуре F. Итак, отрезок, соединяющий любые две

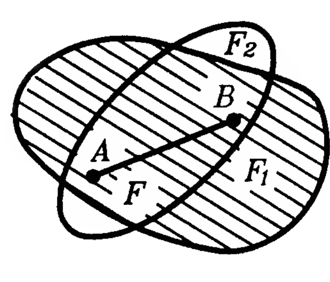


Рис.10.9

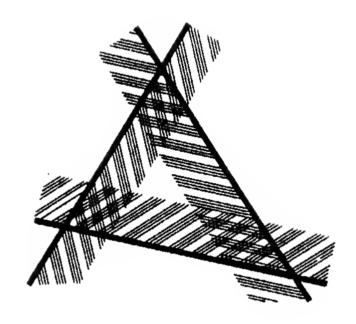


Рис.10.10

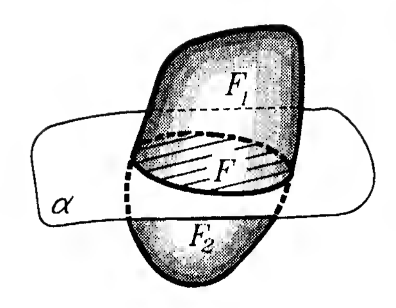


Рис.10.11

точки A и B фигуры F, содержится в F, т.е., фигура F — выпуклая фигура.

В случае пересечения любой совокупности выпуклых фигур доказательство то же, но следует говорить не о двух фигурах, а сразу о фигурах всей совокупности. Повторите это доказательство еще раз. ■

Замечание. В частности, пересечение данных фигур может быть пустым или одноточечным множеством. Если бы пустое и одноточечное множества не считались выпуклыми, то эти случаи надо было бы исключить из теоремы и ее нельзя было бы формулировать так кратко.

Предложение 1 позволяет получать выпуклые фигуры путем пересечения каких-либо выпуклых фигур. Например, треугольник ABC можно получить пересечением трех полуплоскостей, на границах которых лежат две вершины треугольника и внутри них — третья вершина (рис.10.10). Часто используются и следующие три утверждения.

Предложение 2. *Пересечение выпуклой фигуры с плоскостью является выпуклой фигурой* (рис.10.11).

Оно вытекает из предложения 1 и выпуклости плоскости.

Предложение 3. *Каждая плоскость разбивает любую выпуклую фигуру на две выпуклые фигуры* (рис.10.11). *Каждая из них есть пересечение исходной выпуклой фигуры с полупространством, ограниченным данной плоскостью.*

Отметим, что точки исходной фигуры, лежащие в этой плоскости, относятся к каждой из полученных выпуклых фигур.

П р е д л о ж е н и е 4. *Проекция выпуклой фигуры на плоскость есть выпуклая фигура.*

Действительно, пусть F — выпуклая фигура и F' — ее проекция на плоскость α (рис.10.12). Возьмем любые две точки A' и B' фигуры F'. Они являются проекциями некоторых точек A и B фигуры F. Поскольку F — выпуклая фигура, то отрезок AB содержится в фигуре F. Значит проекция отрезка AB — отрезок $A'B'$ — содержится в фигуре F', т.е., F' — выпуклая фигура.

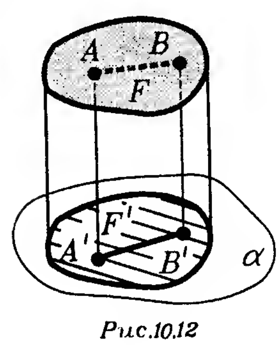


Рис.10.12

Отметим также, что *цилиндр и конус выпуклы тогда и только тогда, когда их основания — выпуклы.* Докажем это, например, для цилиндра.

Следует доказать два утверждения:

1) *если цилиндр выпуклый, то его основание — выпукло;*

2) *если основание цилиндра выпукло, то и сам цилиндр выпуклый.*

Первое утверждение непосредственно вытекает из предложения 2, так как основание цилиндра является пересечением цилиндра с плоскостью этого основания.

Докажем второе утверждение. Пусть основание F цилиндра C выпукло (рис.10.13). Возьмем в цилиндре любые две точки A и B и проведем через них образующие XX' и YY'. Если A и B лежат на одной образующей, то отрезок AB лежит в цилиндре C. Поэтому будем считать, что образующие XX' и YY' различны. Концы этих образующих, лежащие в F, — точки X и Y — являются концами отрезка XY, лежащего в F, так как основание F — выпукло.

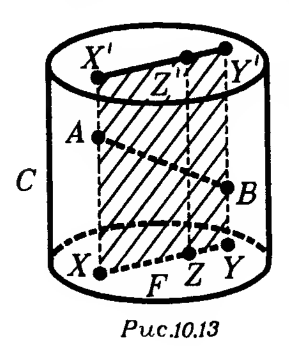


Рис.10.13

Поэтому все отрезки ZZ', исходящие из точек Z отрезка XY, параллельные и равные отрезку XX', являются образующими цилиндра C. Следовательно, параллелограмм $XX'Y'Y$ содержится в цилиндре C. Так как отрезок AB содержится в параллелограмме $XX'Y'Y$, то отрезок AB содержится в C. Итак, цилиндр C выпуклый. ■

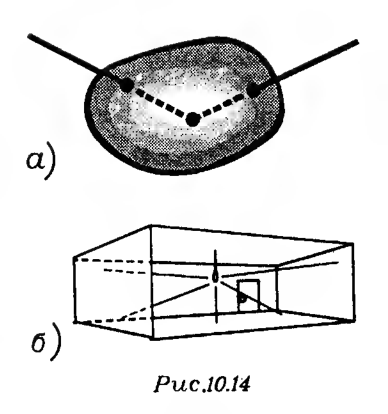


Рис.10.14

10.5. **Выпуклые тела.** Что такое выпуклое тело ясно из названия: это тело, являющееся выпуклой фигурой, т.е. такое тело, каждые две точки которого соединимы в нем отрезком. Важнейшие примеры выпуклых тел — шар, цилиндр вращения, конус вращения, тетраэдр, параллелепипед.

Мы расскажем здесь о некоторых интересных и важных свойствах тел, но не будем доказывать формулируемых теорем, хотя некоторые из них доказываются довольно просто, и вы сами могли бы их доказать.

Из определения выпуклого тела легко выводятся две теоремы, характеризующие выпуклые тела.

Т е о р е м а 1. **Тело является выпуклым тогда и только тогда, когда каждый луч, исходящий из любой его внутренней точки, пересекает поверхность тела в единственной точке.**

Наглядная иллюстрация теоремы такова: *тело является выпуклым тогда и только тогда, когда из любой его внутренней точки можно видеть всю поверхность тела* (рис.10.14*а*).

Иначе говоря, тело — "помещение" выпукло тогда и только тогда, когда в нем нет "закоулков", т.е. всю его поверхность можно "осветить" из любой его точки (рис.10.14*б*).

Т е о р е м а 2. **Ограниченная фигура является выпуклым телом тогда и только тогда, когда у нее есть внутренние точки и каждая прямая, проходящая через внутренюю точку, пересекает фигуру по отрезку**

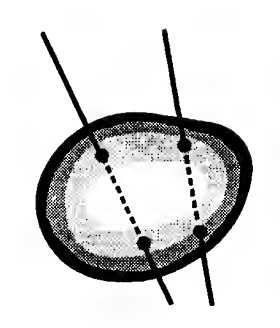


Рис.10.15

(рис.10.15). (То, что граница принадлежит фигуре, гарантировано здесь тем, что каждый такой отрезок содержится в фигуре целиком, т.е. вместе с концами.)

Но, пожалуй, главной теоремой о выпуклых телах надо считать следующую:

Т е о р е м а 3. **Тело выпукло тогда и только тогда, когда через каждую точку его границы проходит опорная плоскость.**

Как всегда, выражение "тогда и только тогда" означает, что верны два взаимно обратных утверждения:

1) *если тело выпукло, то через каждую точку его границы проходит опорная плоскость;*

2) *если у тела через каждую точку границы проходит опорная плоскость, то тело выпукло.*

Теорема означает, что среди всех тел любое выпуклое тело характеризуется тем, что его можно опереть, скажем, о плоскость стола любой точкой поверхности. Именно по такому свойству и судят о выпуклости предмета (рис.10.16). Ясно, что для невыпуклого тела это невозможно; у него на поверхности всегда найдутся точки, к которым не прикоснуться плоским предметом (рис.10.17). С предыдущей теоремой связана следующая.

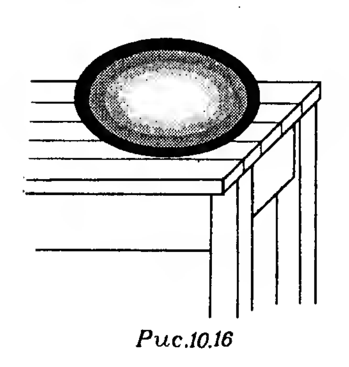


Рис.10.16

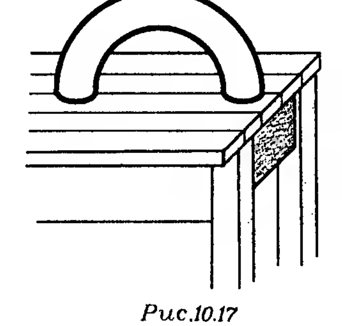


Рис.10.17

Т е о р е м а 4. **Ограниченная фигура является выпуклым телом тогда и только тогда, когда она имеет внутренние точки и каждая не принадлежащая ей точка отделима от нее плоскостью, т.е. существует такая плоскость, что фигура и точка лежат с разных сторон от нее** (рис.10.18).

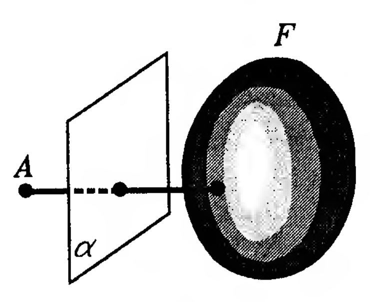


Рис.10.16

Поскольку любую точку, не принадлежащую выпуклому телу, можно отделить от него плоскостью, то, значит, проводя плоскости, отделяющие от тела внешние точки, получим само тело. Иначе говоря, выпуклое тело можно вырезать из окружающего пространства плоскими разрезами, для невыпуклого тела это сделать нельзя.

На точном языке геометрии это значит, что из последней теоремы вытекает

С л е д с т в и е. *Выпуклое тело является пересечением полупространств. (Более того, выпуклое тело является пересечением полупространств, ограниченных его опорными плоскостями.)*

И вместе с тем фигура с внутренними точками, являющаяся пересечением полупространств, представляет собою выпуклое тело.

Обратите внимание на то, что **выпуклые поверхности** — границы выпуклых тел — **и выпуклые кривые** — границы замкнутых выпуклых областей — выпуклыми фигурами не являются. Так, например, сфера — это выпуклая поверхность — граница шара, но сфера выпуклой фигурой не является. Точно так же, окружность — это выпуклая кривая, но не выпуклая фигура: внутренние точки хорд, соединяющие точки окружности, самой окружности не принадлежат.

§11. МНОГОГРАННИКИ

11.1 **Определение многогранника и его элементов.** Обычно, определяя многогранник, говорят: **многогранником** называется тело, граница которого состоит из конечного числа многоугольников.

Решая задачи, мы постоянно обращаемся к простейшим многогранникам — пирамидам и призмам, чаще всего к тетраэдрам, кубам, параллелепипедам. Реальными

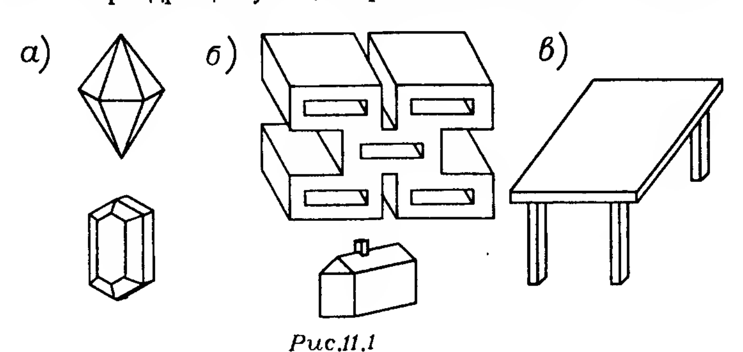


Рис.11.1

примерами тел, имеющих более или менее точную форму многогранников, могут служить кристаллы (рис.11.1*а*), архитектурные сооружения, как древнейшие, например, египетские пирамиды, так и современные, построенные из бетонных блоков (рис.11.1*б*), мебель (полки, шкафы, столы и т.п., рис.11.1*в*).

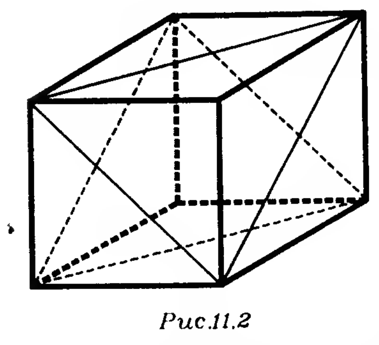


Рис.11.2

Элементами многогранника называют его грани, ребра, вершины, а также углы его граней и углы между гранями.

Определяя многогранник, мы сказали, что многогранник — это тело, граница которого состоит из конечного числа многоугольников. И часто продолжают: эти многоугольники называются гранями многогранника. Но тогда можно считать, например, что грани куба — это двенадцать равнобед-

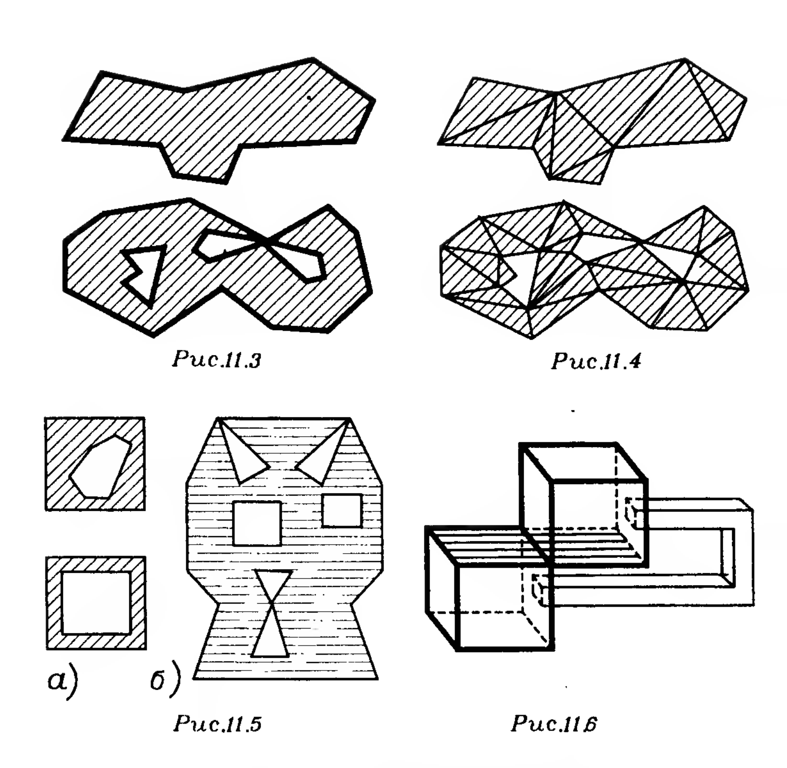


Рис.11.3 Рис.11.4

Рис.11.5 Рис.11.6

ренных прямоугольных треугольников (рис.11.2): ведь они составляют границу куба. Да и вообще тогда можно считать, что грани многогранника — это лишь треугольники; ведь любой многоугольник можно разбить на треугольники.

Значит, грани многогранника — это не просто многоугольники, составляющие поверхность многогранника. **Гранью многогранника** следует считать такой многоугольник на поверхности многогранника, который не содержится ни в каком другом многоугольнике, лежащем на поверхности многогранника (иначе он является лишь частью грани). При этом **многоугольником** следует считать любую плоскую замкнутую область, граница которой состоит из конечного числа отрезков (рис.11.3). Такие многоугольники можно составить, прикладывая друг к другу конечное число треугольников (рис.11.4). Они мо-

гут быть, например, кольцеобразными (рис.11.5*а*) или даже устроенными более сложно: их граница может состоять из любого числа замкнутых ломаных (рис.11.5*б*). Что многогранники могут иметь такие грани показывают примеры многогранников на рисунках 11.1*б*. Многоугольники, ограниченные одной замкнутой ломаной, будем называть **простыми.**

К сказанному следует еще добавить, что внутренность многогранника должна прилегать лишь с одной стороны к этому многоугольнику. Многоугольники, не удовлетворяющие этому условию, могут лежать на поверхности многогранника (рис.11.6).

Суммируя все сказанное, можем дать такое о п р е д е л е н и е г р а н и: многоугольник на поверхности многогранника называется его гранью, если, во-первых, внутренность многогранника прилегает лишь с одной стороны к этому многоугольнику и, во-вторых, он не со-

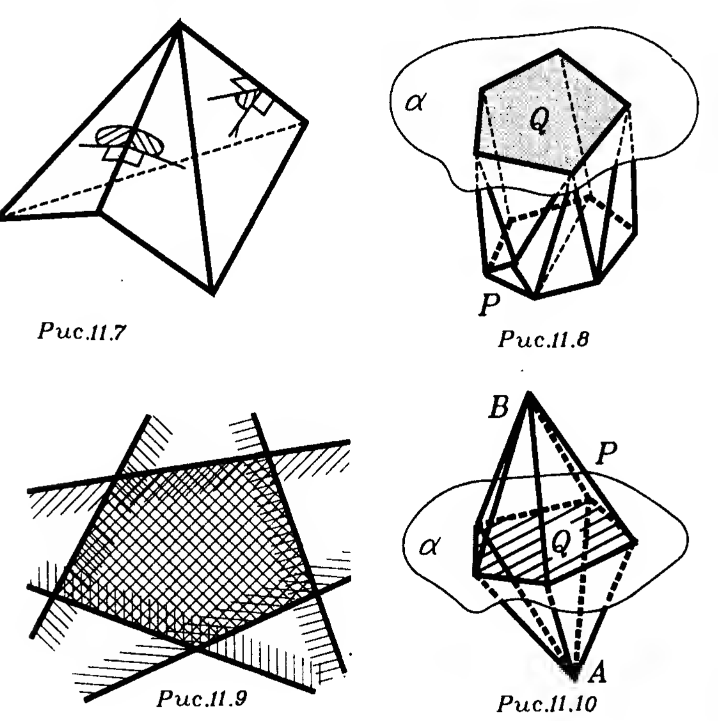


Рис.11.7

Рис.11.8

Рис.11.9

Рис.11.10

держится ни в каком другом многоугольнике, лежащем на поверхности многогранника.

После того, как понятие грани определено, остальные элементы многогранника определяются легко. **Ребрами многогранника** называются стороны его граней, а **вершинами многогранника** называются вершины его граней.

Углы между гранями многогранника, имеющими общее ребро, измеряются как двугранные углы между полуплоскостями, идущими вдоль граней от их общего ребра (рис.11.7). При этом двугранный угол измеряется изнутри многранника, т.е. он может быть и больше 180°.

*11.2. **Выпуклые многогранники.** Что такое выпуклый многогранник ясно из названия: согласно данных нами определений, это многогранник, любые две точки которого соединены в нем отрезком. Но часто выпуклым называют многогранник, который лежит с одной стороны от плоскости каждой своей грани (рис.11.8), т.е. аналогично тому, как определяют выпуклые многоугольники в планиметрии (рис.11.9). Докажем равносильность этих двух подходов к понятию выпуклого многогранника. Эта равносильность вытекает из следующих предложений.

П р е д л о ж е н и е 1. *Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, т.е. каждая такая плоскость является опорной для выпуклого многогранника.*

□ Допустим, что выпуклый многогранник P не лежит по одну сторону от плоскости α некоторой своей грани Q. Тогда в P имеются точки A и B, лежащие по разные стороны от α (рис.11.10). Тогда, соединяя точки A и B со всеми точками грани Q, мы получили бы многогранник P_1, состоящий из двух пирамид с общим основанием Q. Внутренние точки грани Q лежат внутри P_1. Поскольку P_1 содержится в P (так как P — выпуклая фигура), то эти точки лежат внутри P, что невозможно, так как грань Q лежит на границе многогранника P. Полученное противоречие доказывает предложение. ■

Доказанное свойство выпуклого многогранника наглядно можно выразить так: выпуклый многогранник

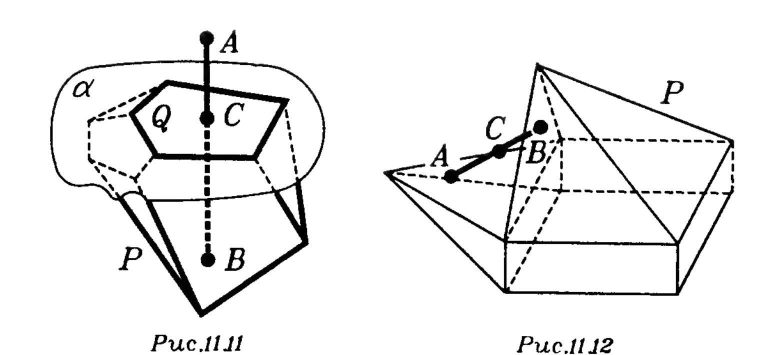


Рис.11.11 Рис.11.12

можно приложить к плоской поверхности (например, к столу) каждой своей гранью.

Прежде чем доказать предложение, обратное предложению 1, докажем следующую лемму.

Л е м м а (об отделимости). **Пусть многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Тогда, если точка A не принадлежит этому многограннику, то у него найдется такая грань, что точка A и все внутренние точки данного многогранника лежат по разные стороны от плоскости этой грани, т.е. такая плоскость отделяет точку A от данного многогранника.**

□ Пусть многогранник P лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани и точка A не принадлежит P. Отрезок, соединяющий точку A с любой точкой B, лежащей внутри P, пересекает поверхность многогранника P и тем самым имеет общую точку хотя бы с одной гранью Q (рис.11.11). Можно считать, что отрезок AB пересекает грань Q во внутренней точке, (так как этого можно добиться чуть-чуть сместив точку B). Плоскость α грани Q и отделяет точку A от многогранника P, так как A и P лежат по разные стороны от плоскости α. ■

П р е д л о ж е н и е 2. *Если многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, то он выпуклый.*

□ Пусть многогранник P лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Допустим, что он невыпуклый. Тогда в P найдутся такие точки A и B, что на

отрезке AB имеется точка C, не принадлежащая P (рис.11.12). Эта точка C по лемме об отделимости должна была бы отделяться от P плоскостью, которая пересекала бы как отрезок AC, так и отрезок CB, что невозможно, так как плоскость пересекает прямую лишь в одной точке. Итак, P — выпуклый многогранник. ■

Мы установили равносильность двух подходов к определению выпуклого многогранника. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в планиметрии для выпуклых многоугольников. Теперь легко доказать предложение, которое дает еще один подход к возможности определить выпуклый многогранник.

Предложение 3. *Выпуклый многогранник есть пересечение содержащих его полупространств, ограниченных плоскостями его граней.*

□ Действительно, во-первых, выпуклый многогранник, согласно предложению 1, содержится в одном из полупространств, ограниченном плоскостью любой его грани, а потому содержится и в пересечении этих полупространств. Во-вторых, по лемме об отделимости, каждая точка вне многогранника отделяется от него плоскостью какой-либо его грани, т.е. не попадает хотя бы в одно из рассматриваемых полупространств. Поэтому общая часть этих полупространств содержит многогранник, но не содержит никаких лишних точек, т.е. совпадает с многогранником. ■

Еще два наглядно очевидных предложения требуют, тем не менее, некоторых обоснований.

Предложение 4. *Каждая грань выпуклого многогранника является выпуклым многоугольником.*

□ Действительно, пусть Q — грань выпуклого многогранника P, а α — плоскость грани Q (рис.11.8). Согласно предложению 1 плоскость α опорная для P. Поэтому пересечение многогранника P с плоскостью α содержится в границе многогранника P, а потому состоит из многоугольников. Вместе с тем, это пересечение P с α представляет собой выпуклую фигуру, как пересечение выпуклых фигур. Поэтому оно является выпуклым многоугольником. Он содержит грань Q, а значит совпадает с нею (так грань не может уже содержаться

ни в каком другом многоугольнике, лежащем на границе многогранника). ■

П р е д л о ж е н и е 5. *Плоскость, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многогранника, пересекает его по выпуклому многоугольнику.*

□ Действительно, пусть плоскость α проходит через внутреннюю точку A выпуклого многогранника P. Тогда фигура Q — пересечение P и α — выпукла и содержит внутренние точки. Кроме того, граница фигуры Q есть пересечение плоскости α с границей многогранника P, а потому состоит из конечного числа отрезков. Значит Q — выпуклый многоугольник. ■

В дополнение к предложению 5 отметим, что пересечение выпуклого многогранника с его опорной плоскостью есть либо грань, либо ребро, либо вершина этого многогранника.

Укажем еще характерное свойство выпуклости призм и пирамид: *призма и пирамида выпуклы тогда и только тогда, когда их основаниями являются выпуклые многоугольники.*

Для выпуклых многогранников Эйлером была доказана замечательная теорема, носящая его имя, а позднее оказалось что она справедлива для гораздо более широкого класса многогранников и имеет глубокие обобщения для поверхностей.

*11.3. **Теорема Эйлера.** Рассмотрим любой выпуклый многогранник P. Пусть e — число его вершин, k — число его ребер, а f — число его граней.

Леонардом Эйлером была доказана удивительная теорема.

Т е о р е м а Э й л е р а. **Для любого выпуклого многогранника $e - k + f = 2$.**

Проверьте это равенство на примерах n-угольной пирамиды, n-угольной призмы или n-угольной усеченной пирамиды.

В этих примерах выпуклость многогранников не предполагается. И действительно, теорема Эйлера справедлива не только для выпуклых многогранников, но и для таких многогранников, которые могут быть получены из выпуклых с помощью непрерывной деформации "без

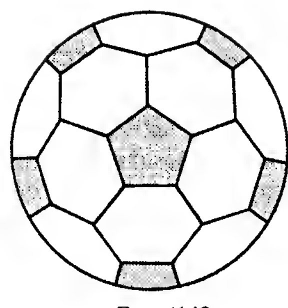


Рис.11.13

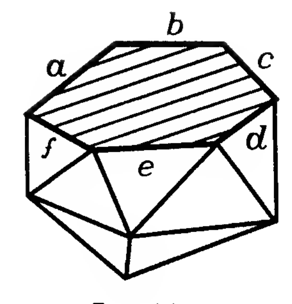


Рис.11.14

разрывов и склеиваний" (мы не даем точных определений таким деформациям, но интуитивно ясно, о каких деформациях идет речь). При этом ясно, что поскольку в теореме Эйлера речь идет лишь об элементах поверхности многогранника, то в ее условии, говоря "многогранник", можно иметь в виду многогранную поверхность, а не многогранное тело, и эта теорема относится именно к поверхностям, а не к телам. Более того, в формуле Эйлера величина $e - k + f$ определяется лишь сетью вершин и ребер на поверхности выпуклого многогранника. Эта величина не изменится, если мы деформируем рассматриваемую многогранную поверхность, например, в сферу, а сеть вершин и ребер многогранника — в некоторую сеть точек и кривых на сфере. Тогда можно считать e числом вершин такой сети, k — числом ее "ребер", а f — числом областей, на которые сеть разбивает сферу: эти области на сфере получаются в результате деформации из граней многогранника. Хорошее представление о такой сети дает, например, покрышка футбольного мяча (рис.11.13).

Итак, в формуле Эйлера речь идет о таких свойствах фигур, которые сохраняются при непрерывных деформациях фигур "без разрывов и склеиваний". Эти свойства называются топологическими, а раздел математики, изучающий топологические свойства фигур, — топологией. (До XX в. топология была частью геометрии, но теперь она сформировалась в большую самостоятельную область математики.)

Возможностью таких деформаций, не изменяющих числа e, k, f, мы и воспользуемся при доказательстве теоремы Эйлера. Поступим так. Пусть P — выпуклый многогранник, а e, k, f — числа его вершин, ребер и граней. Удалим из P любую его грань Q, оставив ее стороны и вершины (рис.11.14). Оставшуюся многогранную поверхность обозначим через P'. Число вершин у P и P' одно и то же — e. Точно так же у P и P' одно и то же число ребер — k. А число f' граней у P' на единицу меньше, чем у P. т.е. $f' = f - 1$. Поэтому равенство Эйлера $e - k + f = 2$ равносильно равенству

$$e - k + f' = 1.$$

А это равенство мы докажем с помощью следующей леммы.

Л е м м а. **Пусть простой многоугольник Q разбит некоторой сетью, состоящей из точек (вершин сети) и соединяющих их отрезков (ребер сети), на f' простых многоугольников T_1, ..., T_f. Если e — число вершин в этой сети, а k — число ее ребер (считая вершины и стороны самого многоугольника Q), то $e - k + f' = 1$.**

□ Среди простых многоугольников, на которые разбит многоугольник Q, всегда найдется такой многоугольник T_1, что, удалив T_1 из Q, мы снова получим один простой многоугольник Q_1 (рис.11.15). (Попробуйте точно обосновать существование такого многоугольника T_1. Вообще говоря, не каждый из многоугольников разбиения, выходящих на границу многоугольника Q, обладает таким свойством. Например, им не обладает многоугольник T_2).

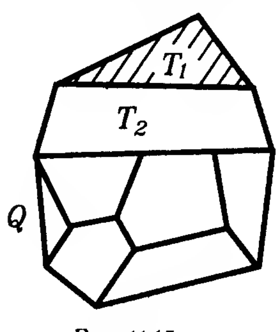


Рис.11.15

Удалив многоугольник T_1 из Q, мы удалим все его внутренние точки и только те его вершины (и ребра), которые не являются вершинами (и ребрами) других многоугольников, входящих в разбиение Q. Поэтому если, удаляя многоугольник T_1, мы удалим часть границы многоугольника Q, которая является ломаной, состоящей из m ребер, то мы при этом удалим $m-1$ вершину. Итак, для разбиения многоугольника Q_1 число его вершин $e_1 = e - (m-1)$, число его ребер $k_1 = k - m$, а число многоугольников $f_1' = f' - 1$. Следовательно,

$$e_1 - k_1 + f_1' = (e - m + 1) + (k - m) + (f' - 1) = e - k + f'.$$

Таким образом, число $e - k + f'$ не изменяется при описанном удалении многоугольника T_1. Продолжив такие операции $n = f' - 1$ раз, мы придем к одному простому многоугольнику, для которого число его вершин e_n равно числу его ребер k_n, а $f_n' = 1$. Поскольку, очевидно, $e_n - k_n + f_n' = 1$, а $e - k + f' = e_n - k_n + f_n'$, то равенство $e - k + f' = 1$ справедливо. ■

Теперь, чтобы завершить доказательство теоремы Эйлера, достаточно "растянуть" многогранную поверхность P' вместе с сетью ее вершин и ребер на плоскость в плоский многоугольник и воспользоваться доказанной леммой. То, что это можно сделать, интуитивно ясно, и можно было бы на этом закончить доказательство. Для тех же, кто хочет подкрепить это интуитивное убеждение некоторым рассуждением, укажем один из способов такого "растяжения".

Возьмем внутри грани Q любую точку O. Любой луч, идущий из O в точку $X \in P'$, пересекает P' лишь в точке X. Ясно, что это свойство сохранится, если точку O чуть сместить до положения O' вне многогранника P (рис.11.16). (Попробуйте точно указать, где может находиться такая точка O'.) Спроектируем теперь вершины, ребра и грани многогранника P' из O' на грань Q. Получим в Q сеть, разбивающую грань Q на f' выпук-

лых многоугольников $T_1,...,T_f$. В этой сети столько же вершин и ребер (считая вершины и ребра многоугольника Q), сколько вершин и ребер у многогранника P'. Каждый из многоугольников T_i, соответствующий некоторой грани Q_i многогранника P', можно получить так: взять пирамиду с вершиной O' и основанием Q_i и пересечь ее многоугольником Q. К этому разбиению грани Q на многоугольники T_1, ..., T_f, и применяется лемма.

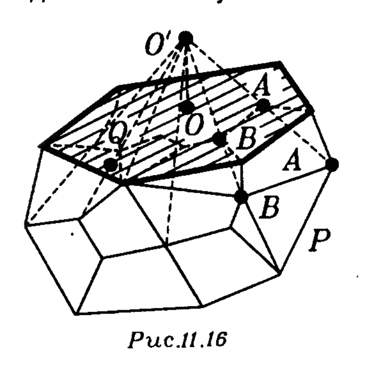
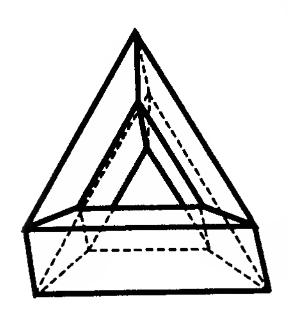


Рис.11.16

З а м е ч а н и е. Одним из главных моментов проведенного доказательства является возможность "распрямить и положить на плоскость" поверхность многогранника после того, как у него удалена одна грань, которая является простым многоугольником. Этого нельзя сделать, например, для многогранника, изображенного на рисунке 11.17. Для него уже $e - k + f \neq 2$.


Рис.11.17

Но для многогранников любого строения и вообще для тел выполняется обобщенная теорема Эйлера. Для всех сетей, которые могут быть "нарисованы" на поверхности данного тела или любого получаемого из него деформацией без разрывов и склеиваний, число $e - k + f$ одно и то же при условии, что каждую "грань" (область) можно деформировать в простой многоугольник (с тем же числом сторон).

*Л.Э й л е р (1707—1783) — великий математик, физик и астроном; швейцарец по рождению, он был членом Петербургской академии наук и работал в России в 1727—1741 и в 1766—1783 г.г.

*11.4. **Выпуклые многогранники и выпуклые оболочки.** Идея понятия выпуклой оболочки состоит в том, что выпуклая оболочка некоторого множества F являет-

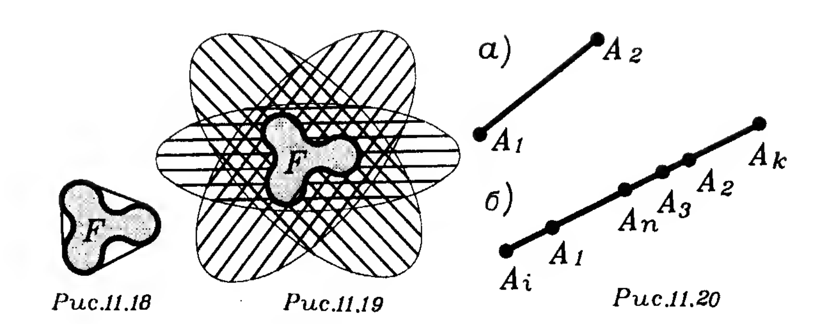


Рис.11.18 Рис.11.19 Рис.11.20

ся в некотором смысле наименьшим выпуклым множеством, содержащим F (рис.11.18). А точное определение его таково.

Выпуклой оболочкой множества F называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих F (рис.11.19). Оно обозначается CoF.

Поскольку пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество, то *выпуклая оболочка множества является выпуклым множеством.*

Выпуклая оболочка выпуклой фигуры есть, очевидно, сама эта фигура. Нас будут интересовать выпуклые оболочки конечного числа точек. Очевидно, выпуклой оболочкой одной точки является сама эта точка.

Выпуклой оболочкой двух точек A_1, A_2 является отрезок A_1A_2 (рис.11.20*а*). Действительно, отрезок A_1A_2 является выпуклым множеством, содержащим точки A_1, A_2. С другой стороны, любое выпуклое множество, содержащее A_1 и A_2, содержит и отрезок A_1A_2. Поэтому $Co\{A_1,A_2\} = A_1A_2$. ■

Ясно, что *выпуклой оболочкой любой системы S конечного числа точек A_1, A_2,..., A_n, лежащих на одной прямой* (рис.11.20*б*), *является отрезок, соединяющий наиболее удаленные точки A_i, A_k из этой системы S.*

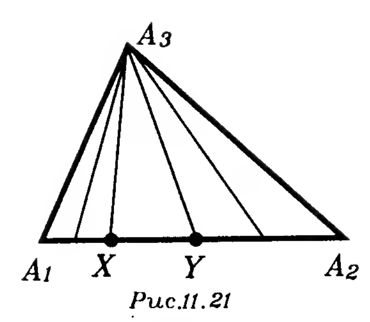


Рис.11.21

Рассмотрим систему S, состоящую из трех точек A_1, A_2, A_3, не лежащих на одной прямой. Чтобы получить выпуклую оболочку этих трех точек, следует точку A_3 соединять со всеми точками отрезка A_1A_2 (рис.11.21). В результате получим треугольник $A_1A_2A_3$, который и является выпуклой оболочкой точек A_1, A_2, A_3.

Добавим к трем точкам A_1, A_2, A_3 еще одну точку A_4 и будем искать выпуклую оболочку системы из четырех точек A_1, A_2, A_3, A_4.

Возможны такие случаи.

1) Точка A_4 принадлежит треугольнику $A_1A_2A_3$. Ясно, что тогда $Co\{A_1, A_2, A_3, A_4\} = \Delta A_1A_2A_3$ (рис.11.22*а*).

2) Точка A_4 не принадлежит треугольнику $A_1A_2A_3$, но лежит в плоскости этого треугольника. Тогда снова выпуклую оболочку системы A_1, A_2, A_3, A_4 получим, соединяя точку A_4 с точками треугольника $A_1A_2A_3$ (рис.11.22*б*). В результате получим либо выпуклый четы-

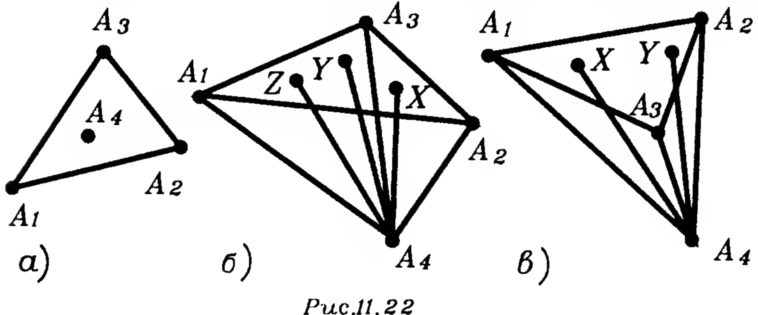


Рис.11.22

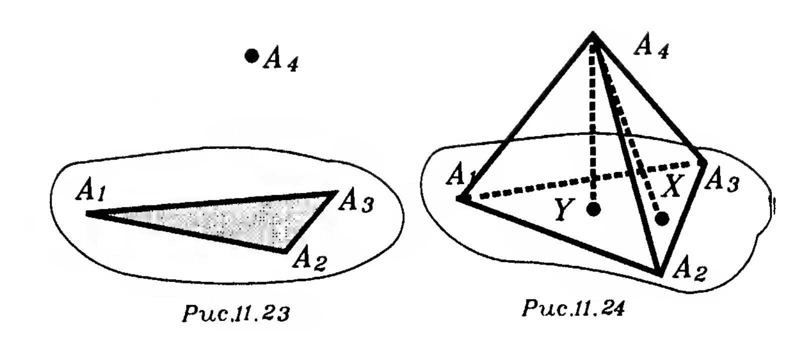


Рис.11.23

Рис.11.24

рехугольник $A_1A_2A_3A_4$, либо треугольник, одной из вершин которого является A_4, а две другие вершины лежат в двух из трех точек A_1, A_2, A_3 (рис.11.22в).

3) Точка A_4 не принадлежит плоскости треугольника $A_1A_2A_3$ (рис.11.23). Выпуклой оболочкой точек A_1, A_2, A_3, A_4 в этом случае является тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, который заполнят отрезки, соединяющую точку A_4 с точками треугольника $A_1A_2A_3$ (рис.11.24).

Проведенные построения подсказывают, как построить выпуклую оболочку F системы S, состоящей из $n+1$ точки $A_1, \ldots, A_n$, A_{n+1}: надо найти сначала выпуклую оболочку G точек $A_1, \ldots, A_n$, а затем соединить отрезками точку A_{n+1} со всеми точками фигуры G (рис.11.25). Эти отрезки и заполнят выпуклую оболочку F системы S.

Выделим это утверждение как лемму и докажем ее.

Л е м м а (о выпуклой оболочке конечного числа точек). **Выпуклая оболочка F системы точек $A_1, \ldots, A_n$, A_{n+1} является фигурой, заполненной отрезками, которые соединяют точку A_{n+1} со всеми точками выпуклой оболочки G системы точек $A_1, \ldots, A_n$.**

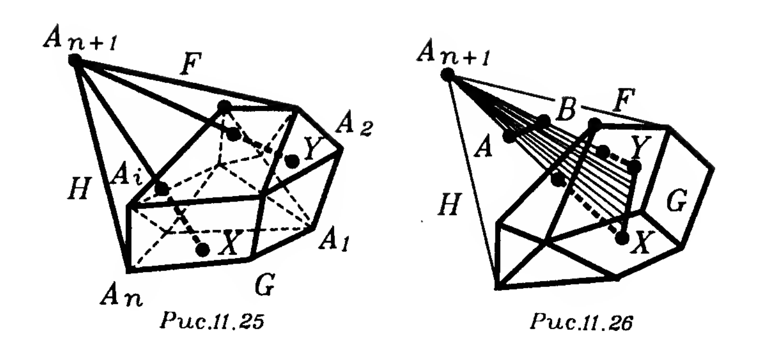


Рис.11.25 *Рис.11.26*

☐ Обозначим через H фигуру, заполненную отрезками, которые соединяют точку A_{n+1} со всеми точками фигуры G (рис.11.25). Покажем, что фигура H — выпукла. Возьмем любые две ее точки X, Y. Они лежат на отрезках $A_{n+1}A$, $A_{n+1}B$, идущих из точки A_{n+1} в некоторые точки A, B фигуры G. Так как G — выпуклая фигура, то она содержит отрезок AB (рис.11.26). Но тогда все отрезки, идущие из A_{n+1} в точки отрезка AB, содержатся в H, а потому и весь треугольник ABA_{n+1} содержится в H. Поскольку отрезок XY содержится в треугольнике ABA_{n+1}, то XY содержится и в H. Итак, H содержит отрезок, соединяющий любые две точки фигуры H, т.е. H — выпуклая фигура.

Итак, H — выпуклая фигура, содержащая точки A_1, A_2, ... , A_{n+1}. Поэтому H содержит выпуклую оболочку F точек A_1, A_2, ... , A_{n+1}.

С другой стороны, H состоит из отрезков, каждый из которых, очевидно, содержится в F. Поэтому H содержится в F. Следовательно, H и F совпадают. ■

Доказанная лемма позволяет сделать вывод, что *выпуклой оболочкой конечной системы точек A_1, ..., A_n, лежащих в одной плоскости, но не лежащих на одной прямой, является выпуклый многоугольник, вершины которо-*

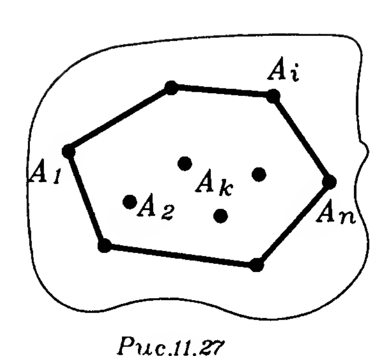


Рис.11.27

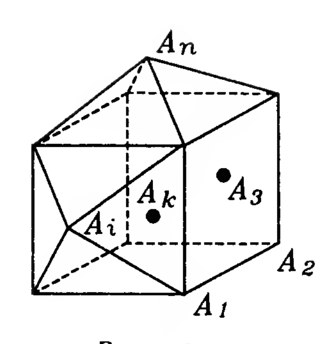


Рис.11.28

го лежат разве лишь в точках $A_1, \ldots, A_n$ (может быть не во всех из них, рис.11.27).

Действительно, такой многоугольник является объединением конечного числа треугольников, имеющих общую вершину A_n, две другие вершины лежат в остальных точках $A_1, \ldots, A_{n-1}$ данной системы.

Если же точки $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ *не лежат в одной плоскости, то их выпуклой оболочкой является выпуклый многогранник. Он может быть получен объединением тетраэдров, имеющих общую вершину* A_n, три другие вершины которых лежат в остальных точках $A_1, \ldots, A_{n-1}$ данной системы. *Вершины этого многогранника лежат разве лишь в точках данной системы* (рис.11.28).

В завершение этого пункта докажем теорему, обратную, в известном смысле, предложениям, установленным выше.

Т е о р е м а (о задании выпуклого многогранника своими вершинами). **Выпуклый многогранник (а также и выпуклый многоугольник) есть выпуклая оболочка своих вершин и, следовательно, полностью определяется своими вершинами.**

□ Из определения выпуклой оболочки следует, что выпуклая оболочка вершин выпуклого многогранника содержится в этом многограннике. Поэтому достаточно доказать, что, обратно, выпуклый многогранник содержится в выпуклой оболочке своих вершин.

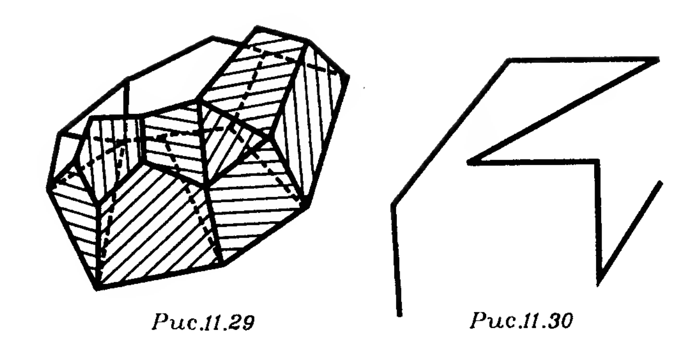


Рис.11.29 Рис.11.30

Пусть A — какая-либо точка выпуклого многогранника P. Если она лежит на его ребре, то она, очевидно, принадлежит выпуклой оболочке вершин этого ребра. Если точка A лежит внутри грани Q, то проведем через нее отрезок до пересечения с границей грани Q. Тогда концы этого отрезка лежат на ребрах и, следовательно, принадлежат выпуклой оболочке вершин. Но в таком случае и сам отрезок, а вместе с ним и точка A принадлежат этой выпуклой оболочке.

Наконец, если точка A лежит внутри многогранника P, то проводим через нее отрезок до пересечения его с границей многогранника. Тогда, по доказанному, концы этого отрезка принадлежат выпуклой оболочке вершин и, значит, сам отрезок, а вместе с ним и точка принадлежат этой выпуклой оболочке. ■

З а м е ч а н и е. Доказывая эту теорему для многогранника, мы попутно доказали ее утверждение и для многоугольника.

*11.5. **Многогранная поверхность и развертка.** Наряду с многогранниками рассматривают также **многогранные поверхности** — фигуры, составленные из многоугольников, которые прикладываются друг к другу сторонами (рис.11.29). Это можно сравнить с тем, как ломаная составляется из отрезков: одни отрезки прикладываются к другим концами (рис.11.30). Но у отрезка только два конца, а сторон у многоугольника много. Поэтому, когда многоугольник приложен к другому стороной, то остается не одна свободная сторона и возможностей приложить новые многоугольники много.

К той стороне, где уже приложен многоугольник, прикладывать другие не разрешается, так что многоугольники встречаются по сторонам только попарно. Но могут оставаться и свободные стороны (например, у поверхности куба с вынутой гранью, как коробка без крышки). Если свободных сторон не остается, поверхность называется замкнутой (подразумевается, что многоугольников конечное число).

Можно допускать, что многоугольники могут пересекаться, как могут пересекаться отрезки ломаной. Если этого не допускать, то замкнутая многогранная поверхность ограничивает многогранник. Но у произвольного многогранника граница может состоять из нескольких замкнутых многогранных поверхностей. Такой многогранник получается, когда из внутренности одного многогранника удалены внутренности одного или нескольких многогранников, так что получаются многогранники с полостями внутри.

Нередко многогранные поверхности называют многогранниками (например, в Большой советской энциклопедии многогранники определяются как замкнутые многогранные поверхности). Это делают и в быту, когда склеивают из бумаги или картона кубики, коробки или другие многогранники. Понятно, из бумаги или картона склеивается не куб — тело, а куб — многогранная поверхность. "Многогранники" — многогранные поверхности — склеивают из разверток.

Вообще **разверткой многогранника** — многогранной поверхности — называется совокупность многоугольников, для которой указано, как их нужно склеивать — прикладывать друг к другу по сторонам. Конечно, склеиваемые стороны должны быть равны, и нужно указывать, какой конец одной стороны должен совпадать с каким концом другой стороны.

При составлении — склеивании многогранной поверхности — многоугольники развертки могут "переламываться".

Не исключается, что многоугольник склеивается сам с собой, как в известной крестообразной развертке куба (рис.11.31, здесь же нарисованы и другие примеры).

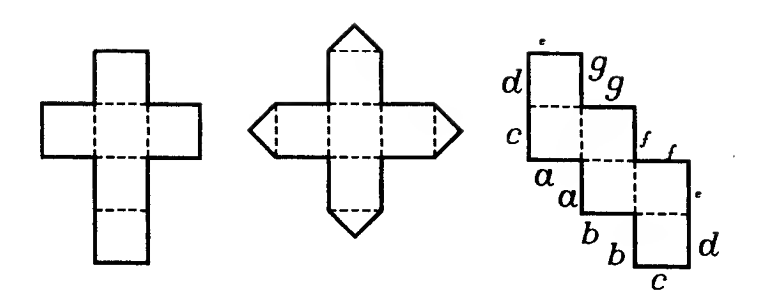


Рис.11.31

Для того чтобы из данной развертки можно было бы склеить многогранник, она должна удовлетворять дополнительным условиям. Сейчас мы на них не останавливаемся. Но в п.11.7 будут даны условия, которые обеспечивают возможность склеить из развертки замкнутый выпуклый многогранник. (Вообще, сказанное о развертках — это наглядное описание, хотя его можно превратить в точное математическое определение.) Заметим, что изучение разверток составляет важный вопрос геометрии не только в теории многогранников, но и в той области геометрии, которая называется топологией.

Реальное изготовление многогранников по их разверткам — дело интересное и не всегда простое. Английский учитель математики М.Венинджер посвятил ему целую книгу под названием "Модели многогранников" ("Мир"; М., 1974). Попробуйте склеить из разверток правильные и полуправильные многогранники (о них рассказывается в следующем параграфе).

*11.6. **Многогранные углы.** Расширим класс многогранных поверхностей, включив в него многогранные углы. Мы уже знакомы с двугранными и трехгранными углами. Многогранный угол можно получить, продолжая ребра и грани, идущие из одной вершины какого-либо многогранника, например, из вершины пирамиды (рис.11.32). Многогранные углы составляются из обычных углов (такие углы мы теперь часто будем называть плоскими углами), подобно тому, как замкнутая ломаная составляется из отрезков. А именно, дается следующее определение:

Многогранным углом называется фигура, образованная плоскими углами так, что выполнены условия:

1) никакие два угла не имеют общих точек, кроме их общей вершины или целой стороны;

2) у каждого из этих углов каждая его сторона является общей с одним и только одним другим таким углом;

3) от каждого угла к каждому можно перейти по углам, имеющим общие стороны;

4) никакие два угла с общей стороной не лежат в одной плоскости.

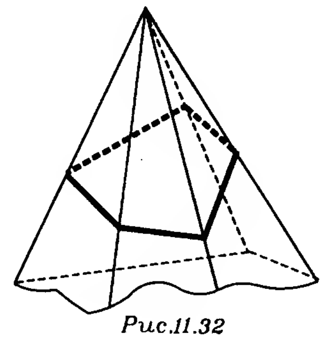


Рис.11.32

При этих условиях плоские углы, образующие многогранный угол, называются его **гранями**, а их стороны — его **ребрами**.

Трехгранные углы мы рассматривали в §5. Под данное определение подходит и двугранный угол. Он составлен из двух развернутых плоских углов. Вершиной его может считаться любая точка на его ребре, и эта точка разбивает ребро на два ребра, сходящиеся в вершине. Но ввиду этой неопределенности в положении вершины двугранный угол исключается из числа многогранных углов.

Если вы рассмотрите многогранные углы у разных многогранников, то обратите внимание, что грани многогранных углов могут быть и невыпуклыми.

Многогранный угол называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

Ясно, что *грани выпуклого многогранного угла выпуклы.*

Подобно тому, как каждый треугольник является выпуклым многоугольником, так любой трехгранный угол с выпуклыми гранями является выпуклым многогранным углом. Такие трехгранные углы мы изучали в §5. Но четырехгранные углы с выпуклыми гранями могут и не быть выпуклыми, подобно тому, как четырехугольники могут быть и невыпуклыми.

Важное свойство выпуклых многогранных углов выражает следующая теорема.

Т е о р е м а. **Сумма плоских углов граней выпуклого многогранного угла меньше четырех прямых углов, т.е. меньше 360°.**

□ Докажем эту теорему сначала для трехгранного угла V с вершиной O ребрами a, b, c и гранями α, β, γ (рис.11.33). Пусть луч d является продолжением луча a. Рассмотрим трехгранный угол V_1' "смежный" с углом V, имеющий ребра d, b, c. Он имеет с углом V общую грань α, а две другие его грани являются углами, смежными с углами β и γ. Поэтому они равны $\pi-\beta$ и $\pi-\gamma$. Согласно "неравенству треугольника" для трехгранных

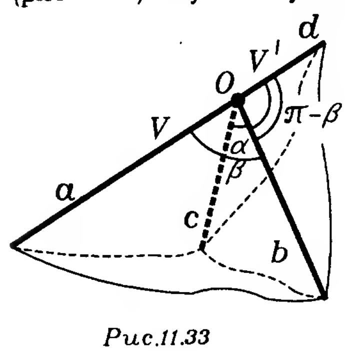


Рис.11.33

углов $(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)>\alpha$, (п.5.5), откуда и следует, что $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$. Для трехгранных углов теорема доказана.

Рассмотрим произвольный выпуклый многогранный угол V. Пусть α некоторая его грань с ребрами b, c и соседними гранями β и γ (рис.11.34). Продолжим грани β и γ за ребра b и c до пересечения по лучу d. Добавим к граням β и γ углы β' и γ' со сторонами b, d и c, d и уберем грань α угла V. Получим новый вы-

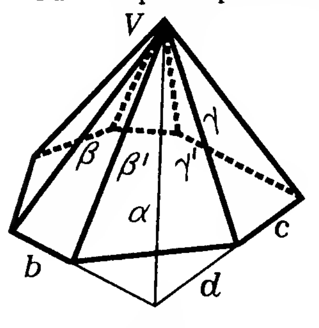


Рис.11.34

пуклый многогранный угол V_1, у которого нет грани α, грани β и γ продолжены до пересечения по ребру d, а все остальные грани те же, что и у угла V. Число граней у угла V_1 на единицу меньше, чем у угла V, а сумма уг-

лов граней возросла, так как $\beta' + \gamma' > \alpha$ (по "неравенству треугольника" для трехгранного угла с ребрами d, b, c).

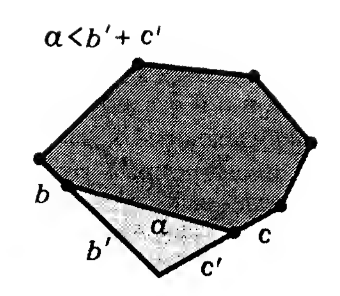


Рис.11.35

Продолжая такой процесс, мы придем к трехгранному углу, у которого сумма углов его граней больше, чем сумма углов граней исходного угла V, но, как уже доказано, сумма углов граней трехгранного угла меньше 360° (или 2π в радианном измерении). Поэтому и для угла V сумма углов его граней меньше 360°. ■

З а м е ч а н и е. На рисунке 11.35 изображены операции, аналогичные операциям доказательства теоремы, но для выпуклых многоугольников. При продолжении сторон выпуклых многоугольников периметр нового многоугольника больше, чем периметр исходного.

По аналогии с тем, как мы строили двойственные трехгранные углы в п.5.3, можно для любого выпуклого многогранного угла V с вершиной в точке O построить двойственый ему угол V' с вершиной в той же точке. Ребрами угла V' будут лучи, перпендикулярные граням угла V и расположенные с углом V' по разные стороны от плоскости соответствующей грани (рис.11.36). Как и в случае трехгранных углов, двойственные углы обладают следующими свойствами:

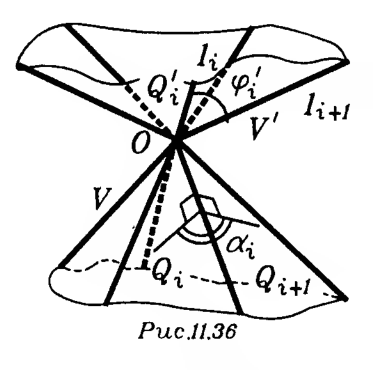


Рис.11.36

С в о й с т в о 1. *Если грань Q' угла V' имеет сторонами лучи l и l_1, перпендикулярные соседним граням Q и Q_1 угла V, то угол φ между l и l_1 (т.е. ве-*

личина угла грани Q'), равен $\pi - \alpha$, где α — величина двугранного угла между Q и Q_1 (рис.11.36).

Свойство 2. *Многогранный угол V' — выпуклый, и двойственный к нему многогранный угол — это исходный многогранный угол V. Поэтому отношение двойственности выпуклых многогранных углов взаимно.*

*11.6. **Развертка выпуклого многогранника.** Мы можем теперь сформулировать условия, гарантирующие, что из данной развертки может быть склеен замкнутый выпуклый многогранник (здесь, говоря "многогранник", мы имеем в виду многогранную поверхность). Сначала уточним понятие развертки, введенное в п.11.5.

Разверткой мы называем совокупность простых многоугольников с указанием правила склеивания их по сторонам. Склеивание двух отрезков означает, что между их точками устанавливается взаимно однозначное соответствие и соответствующие точки считаются уже за одну точку. Предполагается, что правило склеивания удовлетворяет следующим условиям:

1) склеиваемые отрезки всегда имеют равные длины;

2) любая сторона каждого из многоугольников развертки является стороной одного и только одного многоугольника (два многоугольника, имеющие общую сторону, называются смежными);

3) любые два многоугольника развертки P и Q можно соединить цепочкой (конечной последовательностью) многоугольников, в которой каждый предыдущий многоугольник смежный с последующим, причем первый элемент этой цепочки — многоугольник P;

4) если многоугольники имеют общую вершину, то выбор цепочки, связывающей эти многоугольники, можно осуществить так, чтобы все многоугольники этой цепочки имели общую вершину (рис.11.37).

Так как мы хотим из развертки склеить выпуклый многогранник, то должны выполняться еще два необходимых условия:

5) число вершин e, ребер (сторон) k и граней (многоугольников) f должно удовлетворять формуле Эйлера: $e - k + f = 2$ (при этом, конечно, вершины и ребра (сто-

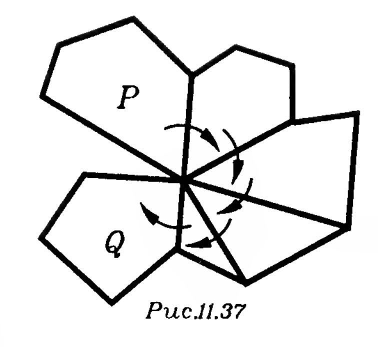


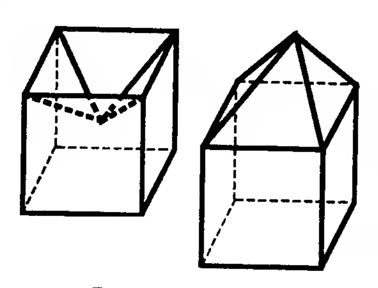
Рис.11.37

роны) многоугольников, подлежащие склеиванию, считаются одной вершиной и одним ребром развертки);

6) сумма плоских углов при каждой из вершин развертки должна быть меньше 360° (см. теорему п.11.6).

Оказывается, что этих условий достаточно, чтобы из развертки можно было склеить выпуклый многогранник. А именно, имеет место следующая теорема А.Д.Александрова:

Т е о р е м а. **Из каждой развертки, удовлетворяющей перечисленным выше условиям 1—6, можно склеить единственный (с точностью до положения в пространстве) выпуклый многогранник.**


Рис.11.38

Оговорка "с точностью до положения в пространстве" означает, что из двух одинаковых разверток склеиваются одинаковые (равные) выпуклые многогранники.

Утверждение единственности в этой теореме в более слабой форме, касающееся лишь разверток, состоящих из целых граней многогранников, было доказано еще французским математиком Огюстом К о ш и в 1813 г. и формулируется следующим образом:

Т е о р е м а (Коши). **Два замкнутых выпуклых многогранника, одинаково составленных из соответственно равных граней, равны.**

З а м е ч а н и е. Легко привести примеры (рис.11.38), показывающие, что если отказаться от требования выпуклости, то утверждение теоремы Коши не будет справедливым.

§12. ПРАВИЛЬНЫЕ И ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

12.1. **Правильные фигуры.** Вообще **правильность** фигуры понимается как равенство ее однородных элементов. Поэтому правильными называют такие многоугольники, у которых соответственно равны друг другу все стороны и все углы (рис.12.1). Далее, правильным называют такой многогранный угол, у которого все грани равны друг другу, углы и все двугранные углы между гранями также равны (рис.12.2). Если центр сферы S поместить в вершине правильного многогранного угла V, то сфера пересечет этот угол по правильному сферическому многоугольнику (рис.12.3). Кроме того, мы знакомы с правильными пирамидами и правильными призмами.

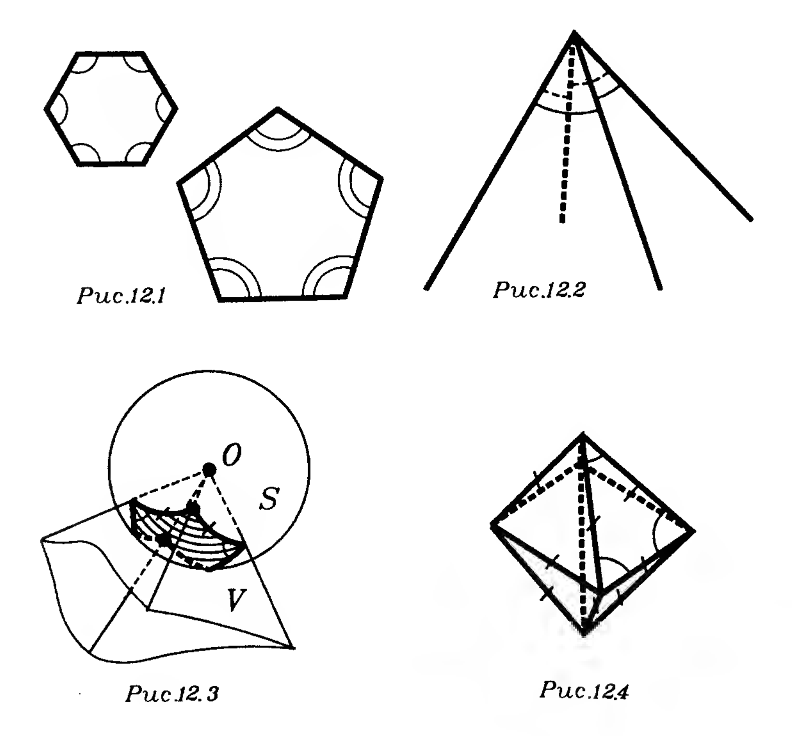


Рис.12.1

Рис.12.2

Рис.12.3

Рис.12.4

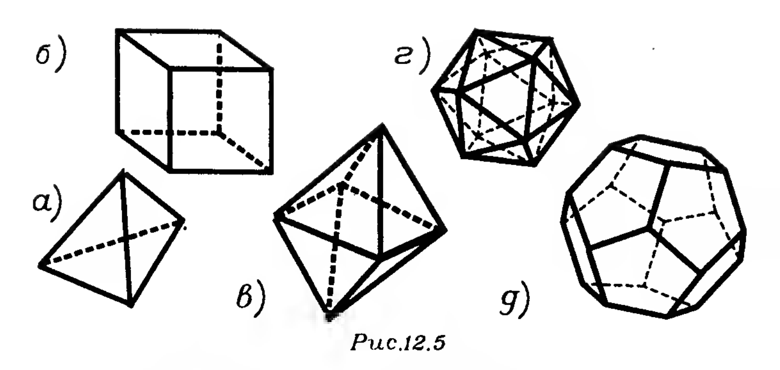


Рис.12.5

Обратимся к правильным многогранникам.

Поскольку правильность фигуры — это равенство ее однородных элементов, то естественно назвать **многогранник правильным,** если равны друг другу все его ребра, все углы его граней и все двугранные углы между соседними гранями (рис.12.4). Равенство всех ребер правильного многогранника ведет к равенству сторон в каждой его грани. Равенство же углов в гранях позволяет сделать вывод о том, что каждая грань правильного многогранника является правильным многоугольником и что все эти грани равны друг другу.

Чаще всего **правильный многогранник и определяют как многогранник, у которого все грани — это равные друг другу правильные многоугольники, а также равны друг другу углы между соседними гранями.**

Существует всего пять правильных многогранников (рис.12.5). Построением этих многогранников Евклид заканчивал свои "Начала". Вот последняя фраза этого сочинения: "Итак, кроме упомянутых пяти тел нельзя построить другой телесной фигуры, заключенной между равносторонними и равноугольными фигурами, что и требовалось доказать".

В Древней Греции пяти правильным многогранникам придавали особый мистический смысл, называли их **платоновыми телами**. Согласно Платону, атомы четырех основных элементов, из которых строится мир, имеют форму правильных многогранников. Огню соответствует тетраэдр, земле — куб, воздуху — октаэдр, воде — икосаэдр. А вся Вселенная, согласно Платону, имеет вид доде-

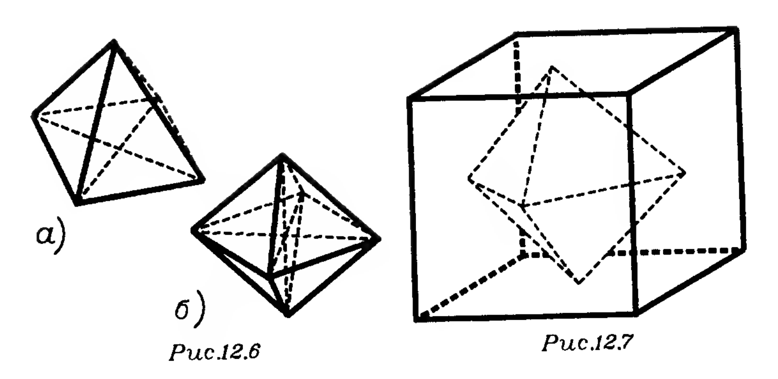


Рис.12.6

Рис.12.7

каэдра. Как пошутил значительно позднее один английский ученый: "Евклид вовсе и не собирался выпускать систематический учебник геометрии. Он задался целью написать сочинение о правильных многогранниках, рассчитанное на начинающих, в силу чего ему пришлось изложить все необходимые сведения".

12.2. **Классификация правильных многогранников.** Сначала убедимся, что правильные многогранники, изображенные на рисунках 12.5, можно построить, а затем докажем, что других правильных многогранников не существует.

Как строятся **правильный тетраэдр** и **куб** можно считать известным.

Правильный октаэдр, т.е. восьмигранник, можно составить из двух правильных четырехугольных пирамид, боковыми гранями которых являются правильные треугольники (рис.12.6). Если отрезками соединить соседние грани куба, то тоже получим правильный октаэдр (рис.12.7).

Икосаэдром, что по-гречески значит двадцатигранник, называется правильный многогранник, у которого все грани — правильные треугольники, сходящиеся по пяти в каждой вершине. Он строится так.

Берется многогранник, называемый пятиугольной **антипризмой** (рис.12.8). У него два основания — правильные пятиугольники, лежащие в параллельных плоскостях; отрезок, соединяющий их центры, — общий перпендикуляр этих плоскостей; наконец, эти пятиугольники повернуты один относительно другого на угол 36°. Кро-

ме того, у антипризмы десять боковых граней — треугольников. Можно так выбрать расстояние между плоскостями пятиугольников, что эти треугольники станут правильными. Чтобы достроить антипризму до икосаэдра, на ее основаниях строят две правильные пирамиды, боковые грани которых — правильные треугольники. Икосаэдр составляется из антипризмы и двух таких пирамид (рис.12.9).

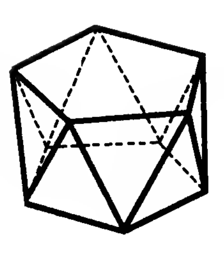
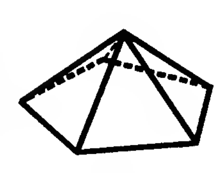
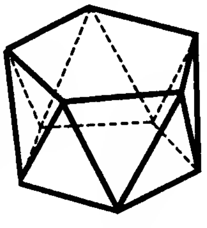


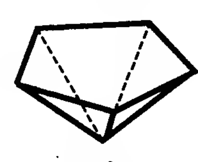
Рис.12.8

Чтобы построить **додекаэдр** — двенадцатигранник, грани которого правильные пятиугольники, сходящиеся по три в каждой вершине, — надо отрезками соединить центры соседних граней икосаэдра (рис.12.10). Эти отрезки и будут ребрами додекаэдра.

Как вы уже, наверное, заметили, центры граней каждого правильного многогранника являются вершинами нового правильного многогранника (рис.12.11). Такие многогранники называются **двойственными.** Двойственны друг другу куб и октаэдр, додекаэдр и икосаэдр, а тетраэдр двойственен сам себе.







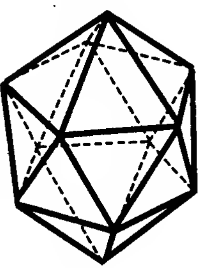


Рис.12.9

Заметим, что сходящиеся в любой вершине правильного многогранника грани определяют правильный многогранный угол, гранями которого являются углы одного из правильных многоугольников. Поскольку сумма таких углов должна быть меньше 360° (теорема п.11.6), то такое возможно лишь в пяти перечисленных выше случаях. Но уже три угла правильного шестиугольника (как и четыре угла квадрата) равны 360°, а сумма четырех углов правильного пятиугольника больше 360°.

Именно это рассуждение и проводил Евклид в "Началах", доказывая, что других правильных многогранников, кроме тех пяти, которые он уже построил, не существует.

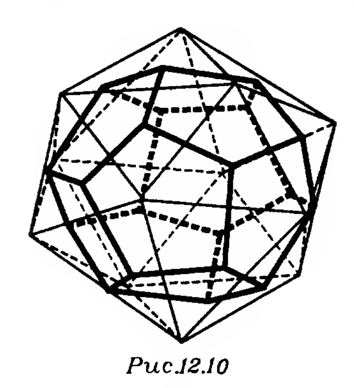


Рис.12.10

*Но этот факт имеет более глубокую природу. Оказывается, что сеть ребер выпуклого многогранника, у которого одинаковое для всех граней число ребер и одинаковое для всех вершин число сходящихся в нем ребер, может быть лишь у одного из пяти уже знакомых нам типов. Такие сети ребер мы будем называть **правильными.** Например, правильными являются сети ребер любого тетраэдра и любого параллелепипеда.

Применив теперь торему Эйлера, мы докажем такую теорему.

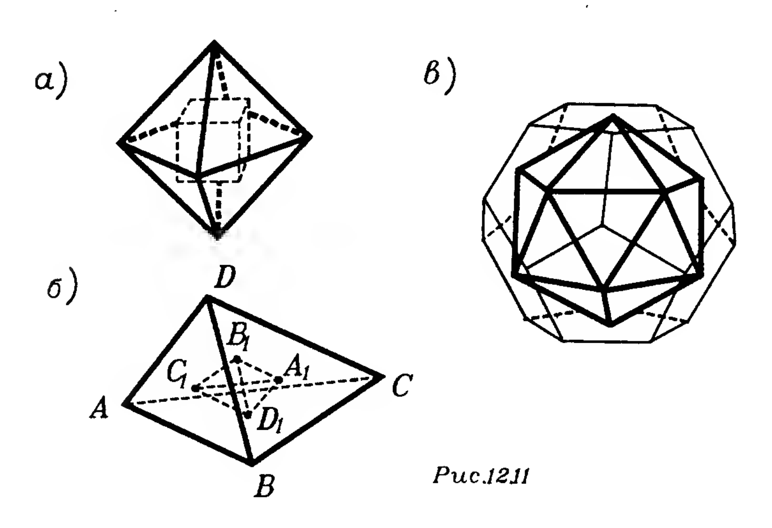


Рис.12.11

Т е о р е м а (о правильных сетях). **Существует пять и только пять типов правильных сетей ребер на выпуклых многогранниках. Эти сети такого же строения, как сети ребер правильных многогранников.**

☐ Правильную сеть, в которой из каждой вершины исходит m ребер и каждая грань имеет n ребер, будем называть сетью типа (m,n). Очевидно, m и n — натуральные числа, причем

$$m \geq 3, \quad n \geq 3. \tag{1}$$

Возьмем выпуклый многогранник с правильной сетью ребер типа (m,n). Пусть e — число его вершин, k — число его ребер, а f — число его граней. Тогда, по теореме Эйлера

$$e - k + f = 2. \tag{2}$$

Каждая грань многогранника имеет n ребер, всего f граней, и каждое ребро принадлежит двум граням. Поэтому

$$nf = 2k. \tag{3}$$

Аналогично из каждой вершины многогранника исходит m ребер, всего вершин e, и каждое ребро соединяет две вершины. Поэтому

$$me = 2k. \tag{4}$$

Выразив f и e из (3) и (4) и подставив их в (2), получим:

$$\frac{2k}{m} - k + \frac{2k}{n} = 2. \tag{5}$$

Поэтому

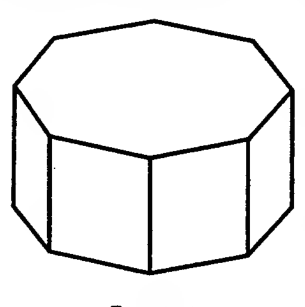
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k} > \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Учитывая, что $m \geq 3$ и $n \geq 3$, находим, что неравенству (6) удовлетворяют лишь пять следующих пар натуральных чисел (m,n): 1) (3,3); 2) (3,4); 3) (4,3); 4) (3,5); 5) (5,3). Они соответсвуют пяти типам правильных многогранников.

Окончательные результаты, в которых даны также числа вершин, ребер и граней правильных многогранников, найденные из равенств (5), (4), (3), приведены в таблице:

Тип многогранника	Число ребер при вершине	Число сторон граней	Число граней	Число ребер	Число вершин
Тетраэдр	3	3	4	6	4
Куб (гексаэдр)	3	4	6	12	8
Октаэдр	4	3	8	12	6
Додекаэдр	3	5	12	30	20
Икосаэдр	5	3	20	30	12

•12.3. **Полуправильные многогранники.** Полуправильными называют выпуклые многогранники, у которых все грани — правильные многоугольники (но не обязательно равные друг другу) и равны друг другу все многогранные углы при их вершинах.


Рис.12.12

Этому определению удовлетворяет любая правильная призма, боковые грани которой — квадраты (рис.12.12). Число таких n-угольных призм бесконечно.

К полуправильным многогранникам относятся и все правильные **антипризмы**. О построении антипризмы уже говорилось в п. 12.2 при построении икосаэдра. Любая n-угольная правильная антипризма строится аналогично.

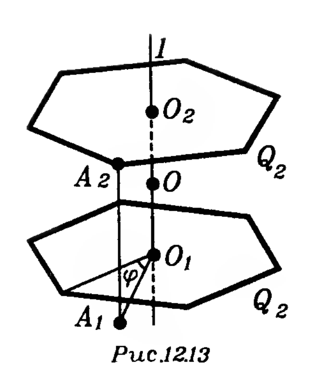


Рис.12.13

Сначала берут любой правильный n-угольник Q_1. Через его центр O_1 проводят прямую l, перпендикулярную плоскости α_1, в которой лежит Q_1 (рис.12.13). Затем берут точку $O_2 \in l$ и через нее проводят плоскость $\alpha_2 \| \alpha_1$. В плоскости α_2 строят правильный n-угольник Q_2 с центром O_2, повернутый относительно Q_1 на угол $\varphi_n = \dfrac{180°}{n}$. Затем последовательно соединяют соседние вершины многоугольников Q_1 и Q_2 и получают $2n$ треугольников. Можно так выбрать длину отрезка O_1O_2, чтобы эти треугольники получились равносторонними. Эти $2n$ правильных треугольников и правильные многоугольники Q_1 и Q_2 ограничат полуправильный многогранник P_n, который называют ***n*-угольной правильной антипризмой** (рис.12.14).

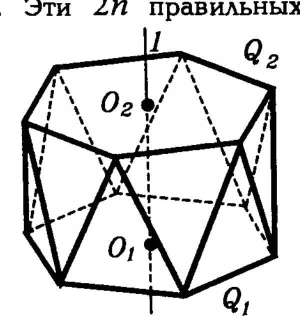


Рис.12.14

n-угольная антипризма P_n самосовмещается преобразованием, которое называют **зеркальным поворотом.** Этот зеркальный поворот состоит в последовательно выполненном повороте вокруг оси O_1O_2 на угол φ_n, а затем зеркальной симметрии, переводящей друг в друга плоскости α_1 и α_2. Прямая O_1O_2 в этом случае называется **осью зеркального поворота** порядка $2n$. Заметим, что *последовательно выполнив два зеркальных поворота на угол φ_n, получим обычный поворот на угол $2\varphi_n$.*

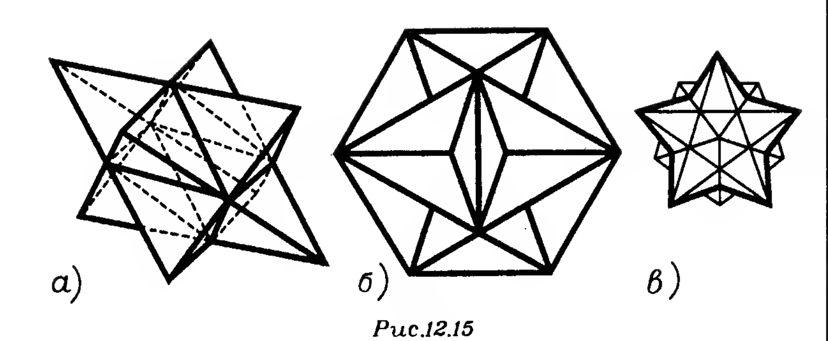
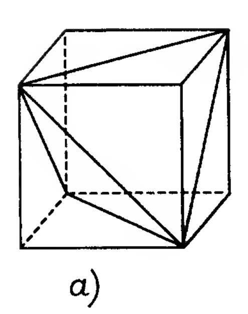


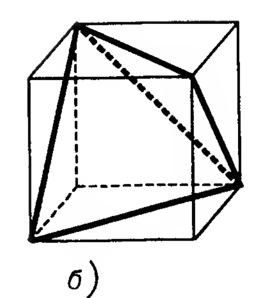
Рис.12.15

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников существует еще лишь 14 видов полуправильных многогранников. 13 из них были известны еще Архимеду и их называют **архимедовыми**. Четырнадцатый многогранник был найден в 1957 году московским математиком В.Г.Ашкинузе.

Других полуправильных многогранников нет. Доказать это можно, опираясь на теорему Эйлера, по той же схеме, как это было сделано при классификации правильных многогранников в п.12.2. Но перебор возможностей здесь значительно длиннее. Эти выводы можно найти в IV томе Энциклопедии элементарной математики (М., Физматгиз, 1963). Там же можно познакомиться с правильными звездчатыми многогранниками и их классификацией (рис.12.15). Как построить многогранник с рисунка 12.15*а*, показано на рисунке 12.16.

12.4. **Симметрия правильных многогранников.** В п.12.1 мы определили правильный многогранник как многогранник, у которого равны друг другу все элементы одного вида: грани, ребра и т.д. Но правильные многогранники можно определить как *самые симметричные изо всех многогранников*. Это означает следующее. Если мы возьмем на правильном многограннике некоторую вершину A, подходящее к ней ребро a и грань α, подходящую к этому ребру, и еще любой такой же набор A', a',α', то существует такое самосовмещение многогран-





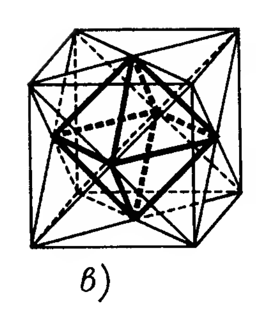
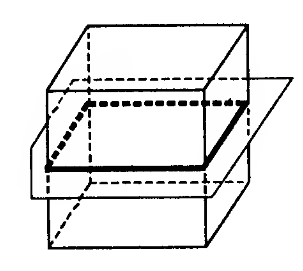


Рис.12.16

ника, которое вершину A переводит в вершину A', ребро a — в ребро a', грань α — в грань α'.

Докажем это. Так как любые две грани правильного многогранника равны, то существует движение, которое одну из них переведет в другую. Поскольку все двугранные углы этого многогранника равны, то в результате совмещения граней весь многогранник самосовместится или перейдет в многогранник, симметричный исходному относительно плоскости второй грани. Во втором случае симметрия относительно плоскости этой грани завершит процесс самосовмещения правильного многогранника.



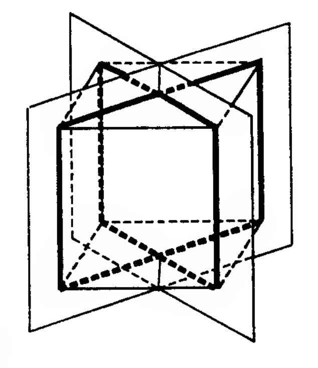


Рис.12.17

Верно и обратное: многогранники, обладающие этим свойством, будут правильными, так как у них окажутся равны все ребра, все плоские углы и все двугранные углы.

Рассмотрим теперь элементы симметрии правильных многогранников.

Начнем с *элементов симметрии куба.*

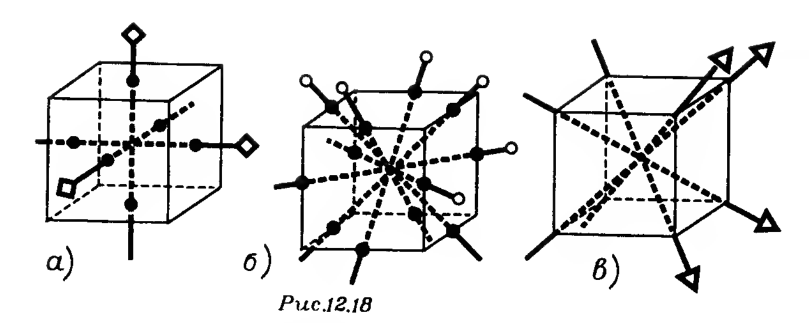


Рис.12.18

1. Центр симметрии — центр куба.

2. Плоскости симметрии (рис.12.17): 1) три плоскости симметрии, перпендикулярные ребрам в их серединах; 2) шесть плоскостей симметрии, проходящих через противоположные ребра.

3. Оси симметрии: 1) три оси симметрии 4-го порядка, проходящие через центры противоположных граней (рис.12.18*а*); 2) шесть осей поворотной симметрии 2-го порядка, проходящие через середины противоположных ребер (рис.12.18*б*); 4) четыре диагонали куба являются осями зеркального поворота шестого порядка, самосовмещающего куб (рис.12.18*в*).

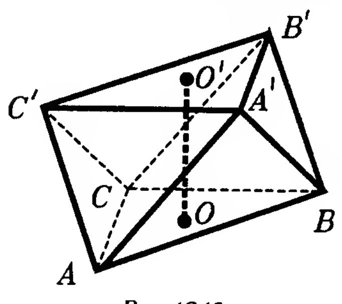


Рис.12.19

Это самый интересный и не сразу видный элемент симметрии куба. Сечение куба плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно диагонали, представляет правильный шестиугольник; при повороте куба вокруг диагонали на угол 60° шестиугольник отображается на себя, а куб в целом еще нужно отразить в плоскости шестиугольника.

Октаэдр двойственен кубу, и потому у него те же элементы симметрии с той разницей, что плоскости симметрии и оси, проходящие у куба через вершины и центры граней, у октаэдра проходят наоборот: через центры граней и вершины (рис.12.19). Так, зеркальная ось 6-го

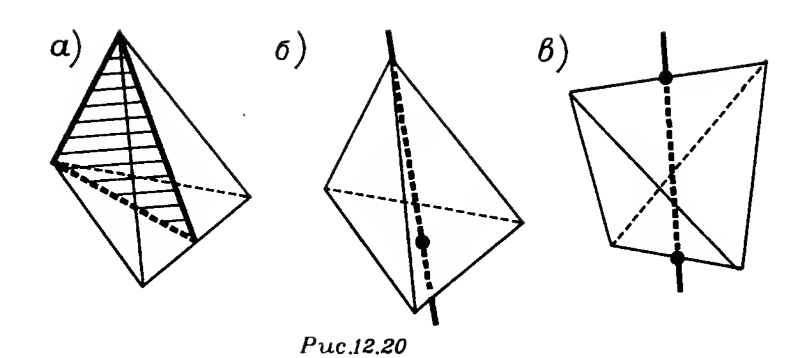


Рис.12.20

порядка проходит у октаэдра через центры противоположных граней.

Обратимся к элементам симметрии правильного тетраэдра.

1. Шесть плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через ребро и середину противоположного ребра (рис.12.20*а*).

2. Четыре оси 3-го порядка, проходящие через вершины и центры противоположных им граней, т.е. через высоты тетраэдра (рис.12.20*б*).

3. Три оси зеркального поворота 4-го порядка, проходящие через середины противоположных ребер (рис.12.20*в*).

Центра симметрии у тетраэдра нет.

В куб можно вписать два правильных тетраэдра (рис.12.16). При самосовмещениях куба эти тетраэдры либо самосовмещаются, либо отображаются друг на друга. Выясните, при каких самосовмещениях куба происходит самосовмещение тетраэдров, а при каких они отображаются друг на друга. Убедитесь, что в первом случае получатся все самосовмещения тетраэдра, так что группа симметрии куба включает в себя группу симметрии куба как подгруппу. (См. п.28.4).

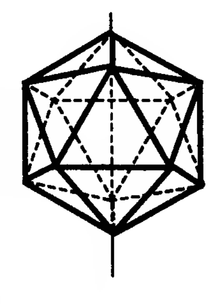


Рис.12.21

Группы симметрии у додекаэдра и икосаэдра одинаковы, поскольку эти правильные многогранники двойствен-

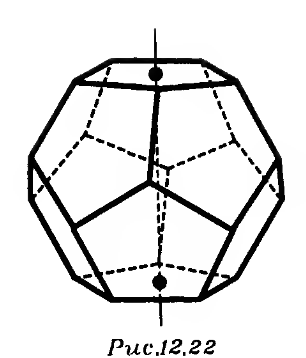


Рис.12.22

ны друг другу. У них есть центр симметрии, плоскости симметрии, оси поворотной симметрии и оси зеркальной поворотной симметрии. Труднее всего найти последние из этих элементов симметрии. Укажем, как их построить.

Оси зеркальной поворотной симметрии в икосаэдре (так же, как и в кубе) соединяют противоположные вершины этого многогранника (рис.12.21), а в додекаэдре (как и в октаэдре) эти оси идут через центры их параллельных граней (рис.12.22). Плоскости, проходящие через центры симметрии правильных многогранников и

Рис.12.2

перпендикулярные указанным осям, пересекают правильные многогранники по правильным многоугольникам (рис.12.23). В частности, додекаэдр и икосаэдр они пересекают по правильным десятиугольникам (рис.12.23г,д). Из сказанного следует, что икосаэдр и додекаэдр самосовмещаются зеркальными поворотами относительно осей шестого и десятого порядков.

Найдите самостоятельно более простые элементы симметрии икосаэдра и додекаэдра — плоскости симметрии и оси поворотной симметрии.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

ЗАДАЧИ К §10

3.1. **Пусть F — выпуклая фигура. Докажите, что: а) отрезок, соединяющий внутренние точки F, содержит только внутренние ее точки; б) отрезок, соединяющий виутреиннюю точку F с граничной точкой F, содержит, за исключением его конца, только внутреиние точки F.**

△ Докажем утверждение а). Возьмем две внутренние точки A и B фигуры F. Соединим их отрезком AB. Заметим, что, так как F выпуклая фигура, то весь отрезок AB лежит в фигуре F.

Для доказательства того, что отрезок AB содержит только внутренние точки фигуры F, возьмем любую точку X этого отрезка, кроме A и B (про них уже известно, что они внутренние), и докажем, что X — внутренняя точка фигуры F. Что же надо будет доказать? То, что найдется шар с центром в точке X, который целиком принадлежит F.

(В этом месте легко уйти в "доказательство методом от противного" и предположить: пусть такого шара нет и ... Попробуйте продвинуться на этом пути.)

Что же у нас есть для доказательства? Во-первых, мы взяли A — внутреннюю точку F. Это означает, что существует шар с центром в точке A, принадлежащий F. Обозначим его K_1, а его радиус — R_1. Во-вторых, мы взяли внутреннюю точку B. Значит, существует шар с центром в точке B, принадлежащий F. Обозначим его K_2, а его радиус — R_2. В-третьих, фигура F выпуклая. Поэтому, соединяя точки K_1 и K_2 всевозможными отрезками, мы заключаем, что все эти отрезки лежат в фигуре F. Объединение всех этих отрезков представляет собой фигуру F_1 — усеченный конус вместе с двумя частями шара(?). Если теперь взять шар с центром в точке X и радиусом меньшим, чем R_1 и R_2, то видно, что он расположится внутри построенной фигуры F_1 (рис.Р3.41). Но $F_1 \subset F$ (?). По-

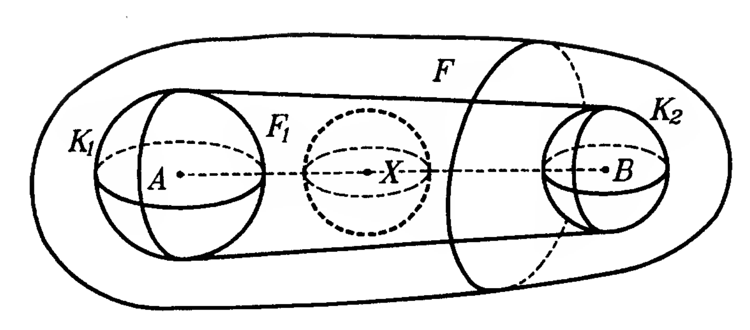


Рис.P3.41

этому такой шар будет принадлежать фигуре F. Искомый шар найден и доказательство закончено. ▲

Аналогично решается задача б).

3.2. **Докажите, что шар является выпуклой фигурой.**

△ Эту задачу можно решить даже без рисунка. В самом деле, возьмем две любые точки шара — назовем их A и B. Мы хотим доказать, что шар — фигура выпуклая. Согласно определению выпуклой фигуры, для этого достаточно доказать, что весь отрезок AB принадлежит шару.

Рассмотрим сечение шара плоскостью, проходящей через точки A и B. Оно является, как известно, кругом. Но круг — это уже планиметрия, а потому все свойства плоских фигур мы считаем известными. В частности, мы знаем, что круг — фигура выпуклая. Тогда отрезок AB лежит в этом круге. Однако наш круг лежит в данном шаре. Значит, и отрезок AB лежит в данном шаре. Что и требовалось доказать.

Есть, правда, одна загвоздка — выпуклость круга. Мы об этом знаем или подозреваем? Боюсь, что последнее, ибо доказательства вроде бы не было.

Продолжим рассуждение. Пусть точки A и B лежат на окружности нашего круга, тогда AB — его хорда (в частности, диаметр). Но любая точка хорды круга (кроме крайних) удалена от его центра на расстояние, меньше радиуса (это следует из свойств равнобедренного треугольника OAB, где O — центр круга). Значит, она принадлежит кругу. ▲

А как быть, если точки A или B лежат внутри круга(?).

Хорошо бы, если вы разобрались с этой задачей, ни разу не прибегнув к рисунку.

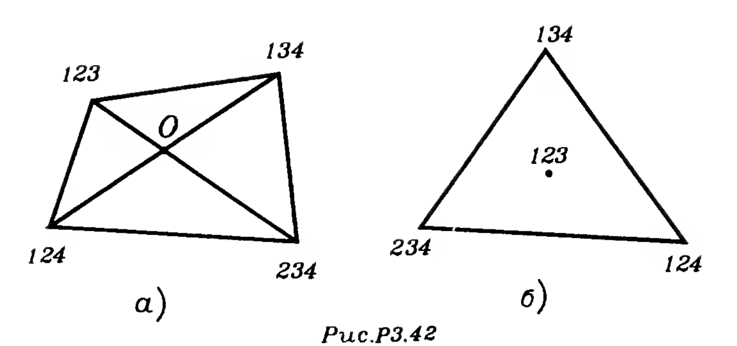


Рис.Р3.42

3.3. **Каждые три из четырех выпуклых фигур на плоскости имеют общую точку. Докажите, что все четыре фигуры имеют общую точку.**

△ Эта задача любопытна тем, что она сформулирована для произвольных фигур на плоскости, а не для каких-то конкретных — треугольников, квадратов и т.д. Тем самым она ближе к задачам геометрии как науки, чем к задачам элементарной геометрии, которая изучается в школе.

Возьмем произвольные выпуклые фигуры на плоскости и занумеруем их 1, 2, 3, 4. Эти фигуры можно и не рисовать. Общую точку фигур 1, 2, 3 обозначим 123, и соответственно обозначим 124, 134 и 234 общие точки других наборов из трех фигур, взятых из рассматриваемых нами фигур.

Для расположения этих четырех точек возможны следующие случаи.

1) Эти точки являются вершинами выпуклого четырехугольника. Пусть его противоположными вершинами будут точки 123 и 234, а также точки 124 и 134 (рис.Р3.42*а*). Пусть O — точка пересечения диагоналей этого четырехугольника. Она лежит на диагонали, соединяющей точки 123 и 234. Эта диагональ принадлежит и фигуре 2, и фигуре 3 (в силу их выпуклости). Поэтому точка O принадлежит и фигурам 2 и 3. Аналогично, точка O принадлежит и фигурам 1 и 4(?). Тем самым она принадлежит всем четырем данным фигурам.

2) Одна из точек принадлежит треугольнику с вершинами в остальных точках. Пусть, например, точка 123 принадлежит треугольнику T с вершинами в точках 124, 134, 234 (рис.Р3.42*б*). Поскольку все вершины треугольника T принадлежат фигуре 4, то весь он содержится в фигуре 4(?). Но тогда и его точка 123 принадлежат фигуре 4, т.е. она принадлежит всем четырем фигурам.

3) Все четыре точки лежат на одной прямой. Эту возможность рассмотрите самостоятельно. ▲

Мы решили задачу, опираясь на выпуклость данных фигур. Постройте контрпример, который убедит вас, что условие выпуклости существенно. Подумайте также, верно ли утверждение задачи 3.3 для пространственных фигур и как обобщить это утверждение для пространства.

3.4. **Дан прямоугольный тетраэдр. Установите по отношению к нему положение точки, равноудаленной от всех его вершин.**

△ Искомая точка — центр описанной около данного тетраэдра сферы. Легко видеть, что такой тетраэдр — часть прямоугольного параллелепипеда, "уголок" параллелепипеда.

Так как сфера однозначно определяется четырьмя точками, не лежащими в одной плоскости, то сфера, описанная около данного тетраэдра, будет одновременно описанной около прямоугольного параллелепипеда, для которого тетраэдр является "уголком". Но центр сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, лежит в середине его диагонали. Запомните это.

Далее, грань данного тетраэдра является сечением прямоугольного параллелепипеда. Причем таким сечением, которое проходит через концы трех ребер, выходящих из одной вершины. Нам уже известно, что такое сечение отсекает от диагонали одну треть ее (задача 2.133). И так как одна треть меньше половины, то искомая точка лежит вне данного тетраэдра. ▲

Если из этих рассуждений вы не "увидели" решения, то сделайте рисунок — все станет гораздо яснее.

ЗАДАЧИ К §11

3.5. **Дан выпуклый многогранник. Внутри него взяли произвольную точку и спроектировали ее на плоскости всех его граней. Докажите, что хотя бы одна проекция этой точки принадлежит какой-либо грани.**

△ Возьмем любую точку A внутри многогранника M. Из всех опорных плоскостей многогранника M, проходящих через его грани, выберем ту, которая ближе всех к A. Назовем ее α. (Если таких плоскостей несколько, то выберем любую из них.)

Пусть A_α — проекция точки A на α, причем A_α не принадлежит грани P многогранника — той грани, которая лежит в плоскости α (рис.Р3.43). Тогда $A_\alpha \notin M$ (?). Но $A \in M$. Зна-

чит, отрезок AA_α пересекает границу M в какой-то точке, назовем ее B (?). Эта точка B лежит в некоторой грани Q данного многогранника. Обозначим плоскость этой грани через β. Тогда $|A\beta| \le |AB| < |AA_\alpha| = |A\alpha|$.

Оказалось, что плоскость β ближе к точке A, чем плоскость α, что противоречит выбору плоскости α. Значит, наше предположение о том, что A_α не лежит в грани P неверно, и на самом деле A_α лежит в грани P.

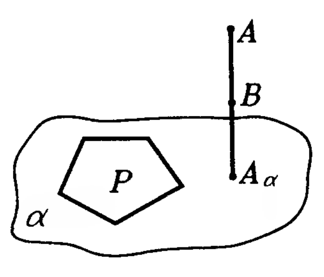


Рис.Р3.43

Полученный результат можно усилить. (Решив задачу, всегда стоит подумать о такой возможности.) А именно можно доказать, что проекция A_α точки A лежит внутри грани P, а не на вершине и не на ребре многогранника. Это мы докажем способом "от противного". Пусть A_α совпадает с вершиной многогранника. Так как AA_α — перпендикуляр из точки A на плоскость α, то AA_α — наклонная к плоскости грани, соседней с P (?). Но тогда плоскость этой соседней с P грани будет ближе к A, чем α, что противоречит выбору плоскости α.

То, что A_α не принадлежит ребру многогранника, вы теперь легко докажете сами.

В итоге получается, что A_α лежит внутри грани P.

Первая часть задачи может быть решена из механических соображений. Пусть поверхность многогранника M сделана из легкого материала, а в выбранной нами точке A сосредоточена значительная масса (в сравнении с массой всей поверхности). Поставим наш многогранник на плоскость какой-либо грани. Если проекция точки A выходит за пределы этой грани, то положение многогранника будет неустойчивым и он "перекатится" на плоскость другой своей грани. Если новая проекция точки A выйдет за пределы и той грани, то он продолжит свое "перекатывание". Если проекция точки A на плоскости всех его граней будут выходить за пределы этих граней, то "перекатывание" будет идти бесконечно, что противоречит законам механики.

Исходная задача имеет очевидный планиметрический аналог(?). В этой аналогичной задаче вместо многогранника появится, понятно, многоугольник. Здесь можно было бы сказать, что "аналогичная задача имеет и аналогичное решение". В данном случае это верно, но интересно не это. Полученную планиметрическую задачу можно решить, исходя из стереометрических соображений! Для этого придадим нашему многоугольнику "толщину", т.е. сделаем его прямой призмой. Получим многогранник, для которого задача уже решена. Конец этого решения додумайте самостоятельно. ▲

3.6. Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной 1. На $ABCD$ как на основании построены две пирамиды P_1ABCD и P_2ABCD. При этом $P_1B \perp (ABC)$ и $P_2C \perp (ABC)$, $P_1B = P_2C = 2$, точки P_1 и P_2 находятся по одну сторону от плоскости основания. Рассматриваются сечения многогранника, являющегося объединением этих пирамид, плоскостью, параллельной основанию. Пусть x — расстояние от плоскости сечения до точки P_1. Как найти зависимость от x площади сечения?

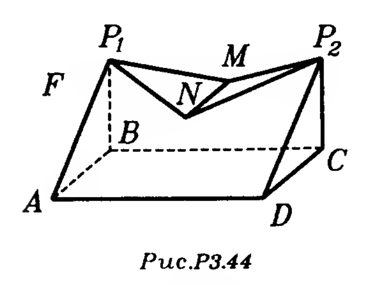


Рис.Р3.44

△ Прежде всего, надо понять, как устроен многогранник F, являющийся объединением данных пирамид. И без хорошего рисунка это вряд ли возможно (рис.Р3.44). Не пожалейте времени, чтобы его сделать. Из этого рисунка видно, что многогранник F имеет 7 граней. Для облегчения дальнейшего понимания, можно заметить, что многогранник F является частью прямой треугольной призмы ABP_1DCP_2, основанием которой является треугольник ABP_1, а боковым ребром AD (?). Несложно доказать, что и $MN \parallel (ABC)$ (?).

Плоскость, параллельная (ABC), будет давать сечения многогранника F двух видов. Представим себе, что она "движется" вверх по направлению BP_1. Пока она не проходит через MN, сечением будет прямоугольник(?). После этого сечение является объединением двух квадратов, пока не вырождается в две точки(?).

Теперь, когда геометрическая картина задачи ясна, перейдем к вычислениям, точнее наметим их план.

Пока сечением является прямоугольник, одна его сторона равна 1, а другая может быть найдена из ΔP_2CD с помощью подобия.

Когда сечением будут два квадрата, площадь каждого из них может быть найдена при помощи теоремы о сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

В любом случае особых проблем не должно быть.

Интересным является то, что площадь S сечения оказывается функцией, заданной кусочно: от 0 до 1 она задается одной формулой, а от 1 до 2 — другой. Вот эти формулы:

$$S = \frac{x^2}{2} \text{ при } x \in [0;1] \text{ и } S = \frac{x}{2} \text{ при } x \in [1;2].$$ ▲

3.7. Дан выпуклый четырехгранный угол. Докажите, что в его сечении можно получить параллелограмм.

△ Эта задача хорошо известна и встречается в разных задачниках. Мы рассмотрим три различных ее решения. Предварительно назовем данный угол $PABCD$ (P — его вершина), прямую пересечения плоскостей PAD и PBC обозначим a, прямую пересечения плоскостей PAB и PCD обозначим b (рис.Р3.45).

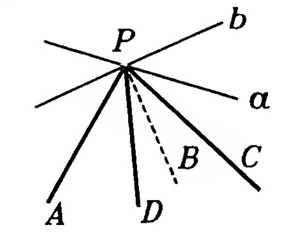


Рис.Р3.45

Р е ш е н и е 1. Проведем в грани PAD отрезок A_1D_1, параллельный прямой a. Представим себе, что некая плоскость вращается вокруг A_1D_1. Когда она будет пересекать грань PBC близко от P, отрезок, являющийся их пересечением (назовем его B_1C_1), будет достаточно мал. Когда вращающаяся плоскость будет пересекать грань PBC далеко от P, то B_1C_1 будет достаточно велик. Между этими двумя положениями найдется такое, при котором $B_1C_1 = A_1D_1$. А так как $B_1C_1 \parallel A_1D_1$ (?), то именно в этом положении сечением будет параллелограмм(?).

Р е ш е н и е 2. Рассмотрим угол APC и угол BPD. Они имеют общий луч(?). Возьмем на этом луче любую точку Q, отличную от P. Из планиметрии известно, что через любую точку внутри угла можно провести такой отрезок, у которого концы лежат на сторонах угла, а сам он делится этой точкой

пополам(?). Проведем через Q два таких отрезка — в угле PAC (назовем его A_1C_1) и в угле PBD (назовем его B_1D_1). В результате получим параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$.

Решение 3. Проведем плоскость через прямые a и b. Затем проведем плоскость через любую точку внутри луча PA, параллельную первой. Она будет пересекать данный четырехгранный угол(?). При этом на гранях PAD и PBC получится одна пара параллельных отрезков, а на гранях PAB и PCD — другая пара также параллельных отрезков(?). Эти четыре отрезка и будут являться сторонами параллелограмма. ▲

Разберитесь во всех трех решениях и запомните то, которое вам больше понравилось.

ЗАДАЧИ К §12

3.8. **Пусть ребро правильного многогранника известно. Как найти: а) радиус описанной сферы; б) радиус вписанной сферы; в) двугранный угол между соседними гранями? Пусть ребро равно 1. Вычислите эти величины.**

△ Сложнее всего найти эти величины для икосаэдра и додекаэдра. Так как эти многогранники двойственны друг другу, то, решив задачу для одного из них, легко получим ее решение и для другого. Так как правильный додекаэдр строился как двойственный правильному икосаэдру, то естественно начать отыскание этих величин для правильного икосаэдра. А для того чтобы найти эти величины в правильном икосаэдре, надо его сначала построить. Его построение указано в теоретическом тексте параграфа. Основываясь на нем, можно получить все нужные ответы. Но мы будем исходить из другого построения правильного икосаэдра. Это построение интересно само по себе. Кроме того, оно связывает правильный икосаэдр с кубом. Связь с кубом позволяет решить задачу быстрее.

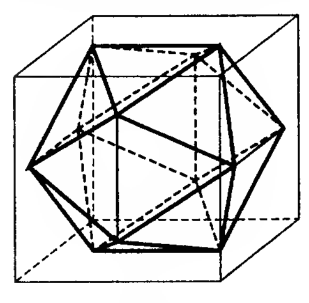


Рис.Р3.46

Оказывается, все вершины правильного икосаэдра можно расположить на поверхности куба. На каждой грани куба лежат по две соседние вершины икосаэдра. Положение этих вер-

шин указано на рисунке Р3.46. Искомые величины в икосаэдре могут быть теперь найдены как некоторые величины в кубе.

Пусть ребро куба равно 1. Вычислим ребро правильного икосаэдра. Обозначим его длину через d, расстояние от его вершины до ближайшего ребра куба — через x. Получаем первое уравнение: $d+2x=1$ (?). Из треугольника, являющегося гранью правильного икосаэдра, получаем еще одно уравнение:

$$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2. \qquad (?)$$

Решая систему этих уравнений и учитывая, что $x<1$, получим $d=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Теперь можно убедиться, что многогранник, расположенный в кубе с ребром 1, как указано на рисунке Р3.46, ребро которого $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, является правильным икосаэдром(?). Центр этого икосаэдра и центр куба совпадают(?). Все искомые величины могут быть вычислены из планиметрических соотношений(?). ▲

3.9. **Найти ребро куба, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, у которой все ребра равны 1.**

△ Прежде всего, уточним, что значит фраза "многогранник M вписан в многогранник N". Означает она, что все вершины многогранника M находятся на поверхности многогранника N.

В данной задаче куб может быть по-разному вписан в пирамиду, поэтому задача имеет бесконечно много решений(?). Для получения однозначного ответа зафиксируем положение вершин куба каким-нибудь дополнительным предположением. Пусть, например, известно, что вершина одного основания куба лежит на основании пирамиды, а вершина другого основания куба — на боковых ребрах пирамиды.

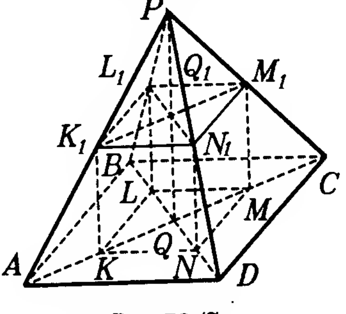


Рис.Р3.47

Сделаем рисунок (рис.Р3.47).

На этом рисунке $PABCD$ является данной пирамидой, $KLMNK_1L_1M_1N_1$ — вписанный в нее куб, PQ — высота пирамиды, Q_1 — центр верхнего основания куба.

Обоснования на этом рисунке требует расположение вершин K, L, M, N на диагоналях квадрата $ABCD$, параллельность ребер верхнего основания куба соответствующим ребрам пирамиды (скажем, $K_1N_1 \parallel AD$)(?).

После этого можно переходить к выкладкам.

Пусть ребро куба равно x. Из подобия треугольников PK_1N_1 и PAD имеем

$$\frac{K_1N_1}{AD} = \frac{PK_1}{PA}, \text{ откуда } \frac{x}{1} = \frac{PK_1}{1}, \text{ значит, } PK_1 = x .$$

Из подобия треугольников AKK_1 и APQ имеем

$$\frac{K_1K}{PQ} = \frac{AK_1}{AP}, \text{ откуда } \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-x}{1} \text{ (?)},$$

значит $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)$.

Поэтому $x = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$.

Всегда стоит себя проверить, хотя бы арифметику.

Ребро куба должно быть меньше 1 и даже меньше, чем $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (?).

Убедитесь, что найденное значение отвечает этим требованиям. ▲

3.10. **Из всех сечений куба, проходящих через его диагональ, укажите такие, которые имеют наибольшую и наименьшую площадь.**

△ Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, B_1D — диагональ, о которой идет речь в условии (рис.Р3.48).

Сначала установим форму сечения. Плоскость сечения фиксируется данной диагональю и какой-либо еще точкой. Пусть эта точка K "бегает" по прямой AA_1. Когда она нахо-

дится на ребре AA_1, то сечение является четырехугольником B_1KDL. (А что получится, когда точка K находится вне ребра AA_1 (?)).

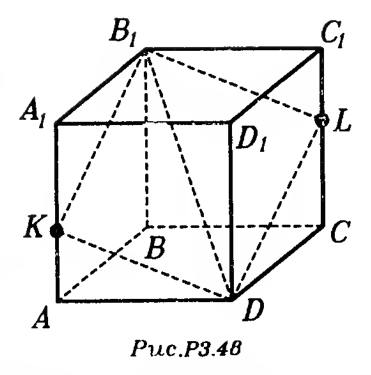


Рис.Р3.48

Четырехугольник B_1KDL — параллелограмм(?). Для вычисления его площади есть разные способы(?). Мы воспользуемся формулой $S = ab \cdot sin\varphi$, где a и b — стороны параллелограмма, φ — угол между ними. Все эти величины выразим через переменную $x = A_1K$. Пусть ребро куба равно 1. Тогда $0 \le x \le 1$.

Имеем:

$$B_1K = \sqrt{1+x^2}, \qquad (?)$$

$$DK = \sqrt{1+(1-x)^2} \qquad (?)$$

$$cos\varphi = \frac{1+x^2+1+(1-x)^2-3}{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}} (?) = \frac{x^2-x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}}.$$

$$sin\varphi = \frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+(1-x)^2}}. \qquad (?)$$

Тогда

$$S = \sqrt{2}\sqrt{x^2-x+1} \qquad (?).$$

(Все выкладки проведите самостоятельно.)

Отсюда ясно, что наименьшее значение площади достигается, когда $x = \frac{1}{2}$ (?), то есть тогда, когда точка K находится в середине ребра AA_1. Сечение в этом случае является ромбом(?).

А наибольшее значение площади достигается, когда $x = 0$ или $x = 1$. Таких сечений два и каждое из них — прямоугольник. При $x = 0$ это сечение — B_1A_1DC, а при $x = 1$ — B_1ADC_1.

Решение получено, но оно может не понравиться тем, кто не любит длинных выкладок в геометрических задачах.

Поэтому наметим более наглядное решение.

Известна формула $S_1 = S \cdot cos\alpha$ для вычисления площади S_1 проекции фигуры с площадью S, когда плоскость, в которой лежит фигура, составляет с плоскостью проекции угол α.

Тогда $S = \dfrac{S_1}{cos\alpha}$. По этой формуле

$$S_{B_1KDL} = \frac{S_{BADC}}{cos\ \alpha} = \frac{1}{cos\ \alpha}.$$

Осталось оценить $cos\ \alpha$.

Плоскость B_1KDL пересекается с плоскостью $BADC$ по прямой a, проходящей через точку D. Линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями, образован перпендикулярами, проведенными из точек B_1 и B на прямую a.

Перпендикуляры эти попадают в одну точку прямой a — назовем ее T. Тогда $tg\ \alpha = \dfrac{BB_1}{BT} = \dfrac{1}{BT}$.

Осталось оценить величину BT. Нарисуйте квадрат $ABCD$, проведите через D (в его плоскости) прямую a и перпендикуляр BT на прямую a.

Остальное вы увидите собственными глазами, как и полагается при чисто геометрическом решении. Вообще, все это решение можно "увидеть" при хорошем "геометрическом" зрении (и знании формул!). ▲

3.11. Через вершину C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, пересекающая ребра BC и CD соответственно в точках K и L и образующая с гранью $ABCD$ угол α, причем в сечении получен равнобедренный треугольник. Как найти площадь сечения, если длина ребра куба равна a?

△ Сначала нарисуем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и сечение C_1KL (рис.Р3.49). В условии сказано, что треугольник C_1KL — равнобедренный, но не сказано, какие стороны у него равны. Поэтому надо понять, что здесь может быть. Логически возможно, что: 1) $C_1K = C_1L$; 2) $C_1K = KL$; 3) $C_1L = KL$; 4) $C_1K = KL = LC_1$ (ибо равносторонний треугольник — тоже равнобедренный).

Прежде чем пускаться в море выкладок, подумаем, нельзя ли сократить число возможных случаев. И сразу же увидим, что случаи 2 и 3 равноправны(?). Далее, видно, что случай 4 выполняется, когда точка K совпадает с точкой B, а точка L совпадает с точкой D (и только в этой ситуации!)(?). Этот случай совсем прост — надо найти площадь равностороннего треугольника, зная его сторону.

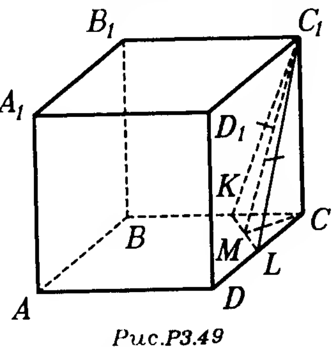


Рис.Р3.49

Есть, правда, и здесь небольшая тонкость. Угол, который составляет с плоскостью $ABCD$ плоскость C_1BD, легко найти(?), он равен $arctg\sqrt{2}$, а в условии говорится, что этот угол равен α. Как быть? Несложно понять, что случаям 1 и 2 соответствует ограничение $\alpha > arctg\sqrt{2}$ (?), поэтому будем считать, что угол α, заданный в условии, относится только к равнобедренному, но не равностороннему треугольнику.

Разберемся теперь со случаем 1.

Пусть C_1M — высота в ΔC_1KL. Зная $CC_1 = a$ и $\angle C_1MC = \alpha$, найдем CM. Зная CM — высоту равнобедренного прямоугольного треугольника CKL, — найдем его площадь. Зная площадь этого треугольника (а он является проекцией треугольника C_1KL на плоскость $ABCD$) найдем площадь треугольника C_1KL.

И наконец, случай 2, то есть $C_1K = KL$.

Так как $KC \perp CDC_1$, то получаем, что $CL = CC_1 = a$ (?).

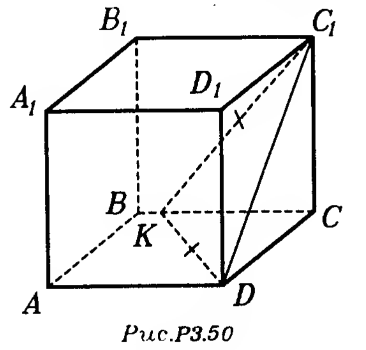


Рис.Р3.50

Но тогда точка L совпадает с D. Рисунок становится другим (рис.Р3.50).

Теперь обозначим $CK = x$ и получим:

$$C_1K = \sqrt{a^2 + x^2}, \qquad (?)$$

$$KD = KC_1 = \sqrt{a^2 + x^2}\,, \qquad (?)$$

$$C_1D = a\sqrt{2}\,, \qquad (?)$$

$$S_{\Delta KCD} = \frac{1}{2}ax\,, \qquad (?)$$

$$S_{\Delta KC_1D} = \frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{2} + x^2}\,. \qquad (?)$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{S_{\Delta KCD}}{S_{\Delta KC_1D}} = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+2x^2}}{\sqrt{2}}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+2x^2}}\,.$$

Из этого уравнения находим x, а затем и площадь искомого сечения. ▲

3.12. **Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равные сферы так, что каждая сфера касается трех других сфер и трех граней тетраэдра. Найти радиус этих сфер.**

△ Начинать решение этой задачи следует, конечно, с рисунка. Важно, однако, знать, что в иных задачах о сферах сами сферы рисовать не обязательно, достаточно указать их центры и изобразить радиусы. Так и сделаем (рис.Р3.51): $ABCD$ — данный тетраэдр, AK — его высота, O_1, O_2, O_3, O_4 — центры шаров, данных в условии, L — точка пересечения прямой AK с плоскостью $O_2O_3O_4$. Заметим, что центры равных шаров O_2, O_2, O_4, касающихся плоскости BCD, удалены от нее на рав-

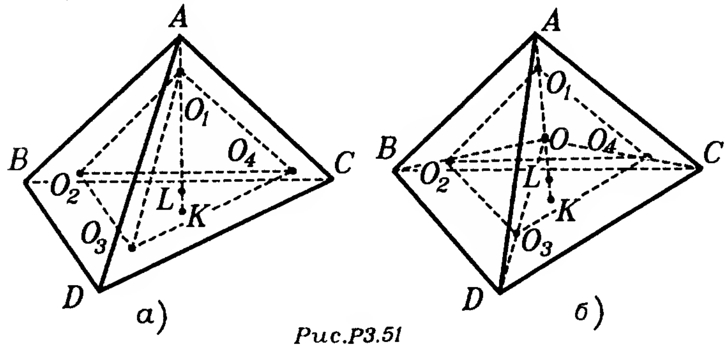


Рис.Р3.51

ные расстояния, каждое из которых равно радиусу шара (обозначим его как x). Значит плоскости $O_2O_3O_4$ и BCD параллельны, а потому $KL = x$ (?).

Далее, каждая пара шаров касается между собой, а потому расстояние между их центрами равно сумме их радиусов, то есть $2x$. Но тогда многогранник с вершинами O_1, O_2, O_3, O_4 — правильный тетраэдр с ребром $2x$.

Займемся выкладками.

Имеем $AK = AO_1 + O_1L + LK$. Но $AK = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ как высота правильного тетраэдра с ребром a (?); $O_1L = 2x\sqrt{\frac{2}{3}}$ как высота правильного тетраэдра с ребром $2x$; $LK = x$.

Осталось выразить O_1A. Заметим, что точка O_1 находится внутри трехгранного угла и удалена от его граней на расстояние x, а плоские углы трехгранного угла равны 60°. Не очень сложно получить, что $O_1A = 3x$ (?).

Но тогда приходим к уравнению

$$a\sqrt{\frac{2}{3}} = 3x + 2x\sqrt{\frac{2}{3}} + x,$$

откуда после упрощений получаем

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2(\sqrt{6}+1)}.$$

Как часто бывает в геометрии, возможно и другое решение. Оно будет использовать результаты уже известных задач, но больше соответствовать "духу" этого параграфа.

Сделаем новый рисунок (рис.Р3.51*б*).

Пусть точка O — центр правильного тетраэдра $ABCD$. Несложно доказать, что та же точка O будет центром правильного тетраэдра $O_1O_2O_3O_4$.

Результат, на который мы будем ссылаться, выглядит так:

"В произвольном тетраэдре отрезки, соединяющие его вершины с точками пересечения медиан противоположных граней, имеют общую точку, которая делит каждый из них в отношении $3:1$, считая от вершины" (см.п.24.4).

Раз это выполняется в произвольном тетраэдре, то и в правильном тоже. Тогда запишем равенство $OL + LK = OK$.

Но

$$OL = \frac{1}{4}O_1L = \frac{1}{4}\cdot 2x\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$LK = x,$$

$$OK = \frac{1}{4}\cdot AK = \frac{1}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Получаем уравнение $\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{2}{3}} + x = \frac{1}{4}a\sqrt{\frac{2}{3}}$, решив которое, приходим к нужному результату. ▲

3.13. **Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 2. Как найти радиус сферы, проходящей через точки A, B, середину ребра CD и центр грани ABC?**

△ Сначала — рисунок (рис.Р3.52). На нем $ABCD$ — данный тетраэдр, K — середина ребра CD, F — центр грани ABC. В этой задаче красивого наглядного решения не видно, увы...

Чтобы найти радиус R сферы, его надо дорисовать, а для этого понадобится изобразить центр сферы — назовем его O. Изображать надо не как попало, а поняв, где он находится. А находится он, как известно, на перпендикуляре, проходящем через центр ее любого сечения. Здесь эти сечения задаются двумя треугольниками: ABK и ABF. Центр сечения будет центром окружности, описанной около такого треугольника. Так как треугольников — два, то сечений тоже два и перпендикуляров тоже два. Их пересечение и даст центр сферы.

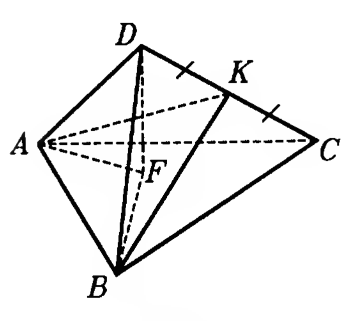


Рис.Р3.52

Подготовим теперь новый, более полный рисунок. Центр окружности, описанной около треугольника ABK будет, лежать на серединном перпендикуляре KL, проведенном из K на AB, причем внутри этого треугольника(?). Назовем его O_2 (рис.Р3.53). Центр окружности, описанной около треугольника ABF, будет лежать на серединном перпендикуляре FL, проведенном из F на AB, причем вне этого треугольника(?). Назовем его O_1.

Из точек O_1 и O_2 проведем перпендикуляры к плоскостям треугольников ABF и ABK соответственно. Эти перпендикуляры лежат в одной плоскости(?), не параллельны(?), а потому у них есть точка пересечения — искомый центр O. Тогда искомый радиус R — это отрезки OA, OB, OK и OF. Но из какого треугольника его искать? "Хороших" треугольников, где было бы достаточно данных что-то не видать.

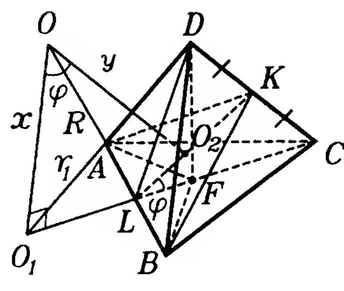


Рис.Р3.53

На помощь приходит алгебра. Введем переменные: $x = OO_1$, $y = OO_2$ и R. Если удастся найти систему с тремя этими неизвестными и тремя независимыми уравнениями, то возможно и повезет (то есть, система решается). Итак пишем:

(1) $OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2$, иначе

$$R^2 = x^2 + r_1^2,$$

где r_1 — радиус окружности, описанной около ΔABF. Радиус r_1 можно найти из ΔABF (?).

(2) $OA^2 = OO_2^2 + O_2A^2$, иначе

$$R^2 = y^2 + r_2^2,$$

где r_2 — радиус окружности, описанной около ΔABK. Радиус r_2 можно найти из ΔABK (?).

(3) $O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 \cdot \cos\varphi$, иначе

$$O_1O_2^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\varphi,$$

где $\varphi = \angle O_1OO_2$ — это угол между нормалями (перпендикулярами) к плоскостям ABC и ABK. Этот угол можно найти(?).

Немного "повозившись", можно найти и O_1O_2 (в конце концов — это планиметрия, ибо все нужное нам происходит в плоскости DLC).

Решается ли система уравнений (1), (2), (3)? Решается, и вы можете, набравшись терпения, убедиться в этом сами.

Если вы доберетесь, в конце концов, до результата, то, наверное, зададите вопрос: "А нельзя ли короче?". Оказывается, можно. Но только при условии, что вы знакомы с методом координат в пространстве (см. §18). В этом случае решите задачу еще и так. Проверять себя всегда полезно, особенно если выкладки были длиннющими. ▲

3.14. Найдите ребро куба, вписанного в конус, образующие которого равны 1 и наклонены к плоскости основания под углом α.

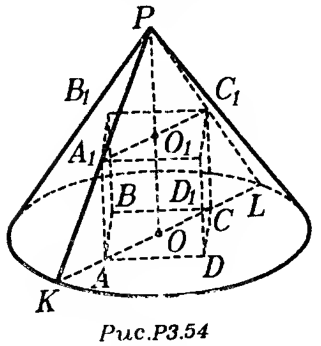


Рис.Р3.54

△ Куб вписан в конус в том случае, если все его вершины лежат на поверхности конуса: четыре — на основании, четыре — на боковой поверхности конуса. Основная идея во многих задачах — свести ее к несложной планиметрии.

Исходный рисунок таков (рис.Р3.54.). Здесь P — вершина конуса, O — центр его основания, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб, O_1 — центр верхнего основания куба, PKL — осевое сечение конуса.

Все необходимое для решения содержится в треугольнике PKL, а еще точнее — в треугольнике PKO. Основной аппарат для решения — подобие треугольников. Итак, треугольники PKO и PA_1O_1 подобны(?), а потому

$$\frac{A_1O_1}{KO}=\frac{PO_1}{PO}=\frac{PO-OO_1}{PO}=1-\frac{OO_1}{PO}.$$

Пусть ребро куба равно x, радиус основания конуса — R, а высота его — H. Тогда

$$\frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{R}=1-\frac{x}{H},$$

откуда

$$x\left(\frac{1}{R\sqrt{2}}+\frac{1}{H}\right)=1\text{, т.е. } x=\left(\frac{1}{R\sqrt{2}}+\frac{1}{H}\right)^{-1}.$$

Так как

$$R=PK\cdot\cos\alpha=\cos\alpha,\quad H=PK\cdot\sin\alpha=\sin\alpha,$$

то

$$x=\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\right)^{-1}=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha+2\cos\alpha}. \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧИ К §10

Рисуем

3.1. Нарисуйте неплоскую фигуру, имеющую внутренние точки, у которой границей является: а) конечное число точек; б) конечное число треугольников; в) пять квадратов; г) объединение двух сфер.

3.2. Нарисуйте выпуклую фигуру, являющуюся объединением: а) двух тетраэдров; б) двух шаров; в) двух кубов; г) шара и куба; д) двух невыпуклых фигур.

3.3. Нарисуйте тело, которое при проектировании на три попарно перпендикулярные плоскости, дают такие фигуры: а) равные квадраты; б) равные равносторонние треугольники; в) равные круги.

3.4. а) Нарисуйте тело, которое можно одной плоскостью разбить на два тела меньшего диаметра. б) Нарисуйте такое тело, для которого это сделать нельзя. (Диаметр — это наибольшее расстояние между двумя точками фигуры).

3.5. Нарисуйте тело, отличное от шара, каждое сечение которого плоскостью, проходящей через некоторую прямую, является кругом или точкой.

3.6. Нарисуйте фигуру, которая получается в результате вращения: а) отрезка вокруг прямой, не лежащей с ним в одной плоскости; б) круга вокруг прямой, лежащей в его плоскости; в) квадрата вокруг прямой, не лежащей с ним в одной плоскости и проходящей через его вершину; г) шара вокруг прямой, не имеющей с ним общих точек; д) куба вокруг диагонали. Какая из этих фигур будет телом? Выпуклым телом?

Планируем

Для выпуклых тел выделим такие характеристики: диаметр, ширину (наименьшее расстояние между параллельными опорными плоскостями), радиус наименьшего шара, содержащего данное тело ("габаритность") и радиус наибольшего шара, который умещается в данном теле ("пузатость").

3.7. Как найти эти характеристики для: а) цилиндра с радиусом 2 и образующей 1; б) конуса с радиусом 1 и образующей 3; в) усеченного конуса, у которого радиусы оснований равны 3 и 1, а образующая равна 4; в) объединения цилиндра и полушара, имеющих общее основание, причем радиус полушара равен образующей цилиндра и равен 2.

Представляем

3.8. Приведите пример неплоской фигуры, которая: а) вся состоит только из граничных точек; б) содержит только внутренние точки.

3.9. Дан куб. Некоторая точка удалена от каждой его вершины на расстояние, меньше длины его ребра. Лежит ли она в кубе? Если нет, то сколько вершин надо оставить, чтобы точка оказалась внутри куба?

3.10. а) Останется ли фигура выпуклой, если из нее удалить точку? б) А если добавить к ней точку? в) Из выпуклого тела удалили точку. Будет ли оставшаяся фигура выпуклым телом?

3.11. Может ли невыпуклая фигура: а) иметь выпуклое сечение; б) иметь бесконечно много невыпуклых параллельных сечений; в) иметь только выпуклые сечения?

3.12. Может ли невыпуклая фигура иметь выпуклую проекцию при проектировании на: а) одну плоскость; б) три попарно перпендикулярные плоскость? в) каждую плоскость?

3.13. Всегда ли выпуклые фигуры имеют ближайшие точки?

3.14. Является ли выпуклым телом: а) пересечение двух шаров; б) объединение двух шаров; в) пересечение двух полупространств; г) объединение двух полупространств; д) пересечение шара и полупространства; е) объединение шара и полупространства?

Сделаем

3.15. Выпуклая фигура содержит три точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что она содержит треугольник с вершинами в этих точках.

3.16. Докажите, что окружность, имеющая три общие точки со сферой, лежит на ней.

Исследуем

3.17. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Какой по отношению к кубу является точка X такая, что: а) $XB=XD=XB_1=XK$, где точка K — середина ребра AB; б) $XA=XA_1$, $XC=XD$, $XB_1=$ $=2{,}4$, если ребро куба равно 2?

3.18. Какое положение по отношению к шару занимает точка X такая, из которой диаметр этого шара виден под: а) прямым углом; б) острым углом; в) тупым углом?

Поступаем в ВУЗ

3.19. Тело состоит из двух конусов, имеющих общее основание и расположенных по разные стороны от плоскости основания. Найдите радиус шара, вписанного в тело, если радиусы оснований конусов равны 1, а высоты 1 и 2.

Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{4\pi}}$.

Переключаемся

3.20. Можно ли из куска сыра, делая только плоские разрезы, получить невыпуклый его кусок?

ЗАДАЧИ К §11

Дополняем теорию

3.21. Докажите, что каждая грань многогранника, вписанного в сферу, вписывается в окружность.

Рисуем

3.22. Нарисуйте два выпуклых многогранника так, чтобы было выпуклым многогранником: а) их объединение; б) их пересечение; в) их объединение и их пересечение.

3.23. Нарисуйте многогранник, который является пересечением такого числа полупространств: а) 4; б) 5; в) 6; г) 7; д) 8.

3.24. Нарисуйте многогранник, у которого: а) 6 ребер; б) 8 ребер; в) 12 ребер и все грани — треугольники; г) 15 ребер и все грани — треугольники; д) 12 ребер и из каждой вершины выходит три ребра; е) 15 ребер и из каждой вершины выходит три ребра; ж) 12 ребер и все грани — четырехугольники; з) 15 ребер и все грани — четырехугольники.

3.25. Нарисуйте многогранник: а) все грани которого треугольники, но не тетраэдр; б) все грани которого квадраты, но не куб; в) все грани которого прямоугольники, но не прямоугольный параллелепипед; г) все грани которого неравные четырехугольники; д) все грани которого пятиугольники; е) четыре грани которого — правильные треугольники, а еще четыре — правильные шестиугольники.

3.26. Нарисуйте выпуклый многогранник, у которого: а) вершин столько же, сколько граней; б) вершин в два раза больше, чем граней; в) вершин в два раза больше, чем ребер; г) граней столько же, сколько ребер; д) вершин столько же,

сколько ребер; е) треугольных граней столько же, сколько четырехугольных, а других граней нет.

3.27. Нарисуйте куб. Нарисуйте на его поверхности вершины: а) правильного тетраэдра; б) другого куба.

3.28. Нарисуйте тетраэдр. Нарисуйте такой многогранник, у которого: а) все вершины лежат на ребрах тетраэдра, причем на каждом ребре ровно одна вершина; б) все вершины лежат на гранях тетраэдра, причем на каждой грани ровно одна вершина; в) все вершины лежат на гранях тетраэдра, причем на каждой грани ровно две вершины.

3.29. Нарисуйте многогранник, у которого могут быть такие сечения: а) квадрат, прямоугольник и правильный шестиугольник; б) равносторонний треугольник, квадрат и трапеция; в) ромб, равнобедренный треугольник и прямоугольник; г) объединение двух треугольников без общих точек.

3.30. Вращаясь вокруг одного из ребер многогранника, плоскость дает такие сечения: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм; г) равнобокую трапецию. Нарисуйте такой многогранник.

3.31. а) Нарисуйте тераэдр. Нарисуйте плоскость, проходящую через его ребро параллельно противоположному ребру. Нарисуйте все такие плоскости. б) Нарисуйте куб. Нарисуйте плоскость, проходящую через его ребро и параллельную диагональной плоскости куба, параллельной данному ребру. Нарисуйте все такие плоскости. в) Нарисуйте параллелепипед. Нарисуйте плоскость, проходящую через его вершину и параллельную плоскости, проходящей через три его вершины, соседние с взятой. Нарисуйте все такие плоскости. В каждом случае нарисуйте многогранник, ограниченный проведенными плоскостями.

3.32. Нарисуйте многогранник, который при освещении параллельным пучком света дает тень в виде: а) квадрата; б) равнобедренного треугольника; в) равностороннего треугольника; г) правильного шестиугольника; д) равнобокой трапеции; е) прямоугольника; ж) ромба. Попробуйте нарисовать такой многогранник, который дает тени нескольких указанных видов.

3.33. Нарисуйте разбиение на тетраэдры таких многогранников: а) четырехугольной пирамиды; б) усеченной треугольной пирамиды; в) треугольной призмы; г) прямоугольного параллелепипеда. При этом найдите наименьшее число плоскостей разбиения.

3.34. Нарисуйте такие многогранники: а) $ABCDKL$, в котором грань $ABCD$ — квадрат со стороной 2, грани AKB и CLD — равносторонние треугольники, ребра KL и AD параллельны между собой, $KL=1$; б) $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $ABCD$

квадрат со стороной 2, грани AA_1B_1B и CC_1D_1D — равнобокие трапеции, плоскости которых перпендикулярны плоскости ABC, причем $A_1B_1 = C_1D_1 = 1$, грань $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник, плоскость которого параллельна плоскости ABC и удалена от нее на 3; в) $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором грань $ABCD$ — квадрат со стороной 2, грань $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат со стороной 1, AA_1 перпендикулярна плоскости ABC, BB_1 перпендикулярна плоскости ABC, плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, $AA_1 = 1$. Каждый из этих многогранников разбейте на тетраэдры наименьшим числом плоскостей.

3.35. Нарисуйте всевозможные развертки: а) правильного тетраэдра; б) куба; в) правильной треугольной призмы.

3.36. Нарисуйте многогранник, имеющий центр симметрии и: а) одну плоскость симметрии; б) две плоскости симметрии; в) три плоскости симметрии.

Планируем

3.37. Пусть ABC — правильный треугольник со стороной 1. На этом основании построены две пирамиды: P_1ABC и P_2ABC, причем $P_1B \perp ABC$, $P_2C \perp ABC$, $P_1B = P_2C = 2$, P_1 и P_2 находятся по одну сторону от основания. Рассматриваются сечения многогранника, являющегося объединением этих пирамид, плоскостью, параллельной основанию. Пусть x — расстояние от плоскости сечения до P_1. Как найти зависимость от x площади сечения?

3.38. В тетраэдре $PABC$ сумма плоских углов при каждой из вершин A, B, C равна $180°$. Площадь треугольника ABC равна 1. Как узнать площади остальных граней ?

Представляем

3.39. Сколько вершин, ребер и граней у многогранника, который является объединением таких двух многогранников, имеющих только общую грань: а) двух прямоугольных параллелепипедов; б) четырехугольной пирамиды и куба; в) двух тетраэдров?

3.40. Многогранник разделили на части одной плоскостью. а) Сколько при этом может получиться частей? б) Является ли каждая полученная часть многогранником? в) Как изменятся полученные вами результаты, если исходный многогранник был выпуклым?

3.41. Приведите пример многогранника, около которого: а) можно описать сферу; б) нельзя описать сферу.

3.42. Пусть каждая грань многогранника может быть вписана в окружность. Значит ли это, что его можно вписать в сферу?

3.43. Приведите пример многогранника, в который: а) можно вписать сферу; б) нельзя вписать сферу.

3.44. Приведите пример многогранника, для которого существует: а) и вписанная, и описанная сфера; б) только описанная сфера; в) только вписанная сфера. Приведите пример многогранника, для которого не существует ни вписанной, ни описанной сферы.

3.45. Какие плоскости симметрии имеют многогранники, составленные из двух равных: а) кубов; б) треугольных призм с общей гранью; в) прямоугольных тетраэдров с общей гранью; г) правильных четырехугольных пирамид?

Оцениваем

3.46. Нарисуйте кратчайший путь по поверхности из центра одной грани в центр соседней грани: а) правильного тетраэдра; б) куба.

Сделаем

3.47. Докажите, что существует многогранник с любым числом ребер, большим 7.

Исследуем

3.48. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 13 граней, а в каждой по 13 сторон? Обобщите полученный результат.

3.49. Всякий ли треугольник может быть разверткой тетраэдра?

3.50. Существует ли многогранник, имеющий любое наперед заданное число плоскостей симметрии?

Переключаемся

3.51. Пролезет ли правильный тетраэдр с высотой 1 в щель меньшей ширины?

ЗАДАЧИ К §12

Дополняем теорию

3.52. Докажите, что в любом правильном многограннике есть точка, равноудаленная от его: а) вершин; б) граней; в) ребер. Докажите, что эта точка — одна и та же. (Такую точку естественно назвать центром правильного многогранника).

Рисуем

3.53. Нарисуйте правильный тетраэдр. а) Нарисуйте тетраэдр, центрально симметричный данному относительно середины высоты. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного тетраэдров. б) Нарисуйте тетраэдр, зеркально симметричный данному относительно плоскости, проходящей через середину высоты перпендикулярно ей. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного тетраэдров. в) Пусть каждая его вершина отражается в плоскости противоположной ей грани. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного тетраэдров. г) Нарисуйте тетраэдр, полученный из данного поворотом вокруг высоты на 60°. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного тетраэдров. д) Нарисуйте тетраэдр, полученный из данного поворотом вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, на 90°. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного тетраэдров.

3.54. Нарисуйте куб. а) Нарисуйте куб, который получается из данного центральной симметрией относительно точки, делящей его диагональ в отношении 1:2, считая от вершины. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кубов; б) Нарисуйте куб, который получается из данного зеркальной симметрией относительно плоскости, проходящей через три его вершины, являющиеся концами ребер, выходящими из одной вершины куба. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кубов; в) Нарисуйте куб, который получается из данного поворотом на 90° относительно прямой, проходящей через середины двух его параллельных ребер, не лежащих на одной грани куба. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кубов.

3.55. Нарисуйте вершины правильного: а) тетраэдра на поверхности куба; б) октаэдра на поверхности куба; в) октаэдра на поверхности правильного тетраэдра; г) октаэдра на поверхности икосаэдра; д) куба на поверхности додекаэдра; е) икосаэдра на поверхности куба.

Планируем

3.56. Пусть $PABCDQ$ — октаэдр с ребром 1 ($ABCD$ — квадрат). Как вычислить расстояния между: а) A и плоскостью PDC; б) прямыми AP и CQ; в) прямыми PD и AQ; г) плоскостями ADQ и BCP?

Представляем

3.57. Какие элементы симметрии имеет объединение двух правильных тетраэдров с общей гранью?

3.58. Какие элементы симметрии имеет объединение двух кубов с общей гранью?

Оцениваем

3.59. В правильном тетраэдре $SABC$ длина каждого ребра равна a. На ребре SA взята точка M так, что $SM=\frac{1}{4}a$, на ребре SB взята точка N, а на плоскости ABC взята точка P. Когда имеет наименьшую величину сумма длин отрезков MN и NP?

Сделаем

3.60. В правильном тетраэдре $PABC$ на его ребрах отложены равные отрезки PK и PL (точка K на ребре PA, точка L на ребре PC), а также CM и CN (точка M на ребре AC, точка N на ребре CB). Докажите, что $ML = KN$.

Исследуем

3.61. а) Существует ли в правильном тетраэдре точка, из которой каждое ребро основания видно под прямым углом? б) А такая, из которой каждое ребро видно под прямым углом?

Поступаем в ВУЗ

3.62. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точка M — середина ребра AD, точка O — центр треугольника ABC, точка N — середина ребра AB, точка K — середина ребра CD. Найдите величину угла между прямыми MO и KN.

Ответ: $arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

3.63. Точки M и N — соответственно середины ребер AC и SB правильного тетраэдра $SABC$. Ребра тетраэдра имеют длину 1. На прямых AS и CN выбраны точки P и Q так, что прямая PQ параллельна прямой BM. Найдите длину отрезка PQ.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.64. Длина каждого ребра треугольной пирамиды $PABC$ равна 1. BD — высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки P и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками P и E.

Ответ: $0{,}5\sqrt{5-2\sqrt{6}sin\varphi}$.

3.65. В правильном тетраэдре $SABC$ плоскость α проходит через вершины S, C и середину M ребра AB, плоскость β проходит через вершину B и точки K и L — середины ребер SA и SC соответственно. Плоскости α и β пересекаются по прямой p. Найдите величину угла между прямой p и плоскостью грани ABC.

Ответ: $arctg\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

3.66. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведены два сечения, каждое из которых параллельно ребрам AB и CD. Площадь части грани ABC, заключенной между секущими плоскостями, на s больше площади грани ACD, заключенной между этими же плоскостями. На сколько площадь одного сечения больше площади другого?

Ответ: $\dfrac{2s}{\sqrt{3}}$.

3.67. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найти радиус сферы, вписанной в трехгранный угол, образованный гранями тетраэдра с вершиной в точке A, и касающейся плоскости, проведенной через середины ребер AB, AD, BC.

Ответ: $\dfrac{a}{4\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$.

3.68. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребрах AB и CD расположены соответственно точки E и F. Прямая EF пересекает описанную около тетраэдра сферу в точках M и N так, что $ME{:}EF{:}FN=3{:}12{:}4$. Найти EF.

Ответ: $\dfrac{2a}{\sqrt{7}}$.

3.69. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребре BD расположена точка M так, что $3DM=a$. Прямой круговой конус расположен так, что его вершина находится на середине ребра AC, а окружность основания проходит через точку M и пересекает ребра AB и BC. Найдите радиус основания этого конуса.

Ответ: $\dfrac{13a}{6\sqrt{51}}$.

3.70. Найти площадь проекции куба со стороной a на плоскость, перпендикулярную его диагонали.

Ответ: $a^2\sqrt{3}$.

3.71. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через диагональ A_1C_1 и середину ребра AD проходит плоскость. Найдите расстояние от середины ребра AB до этой плоскости, если длина ребра куба равна 3.

Ответ: 2.

3.72. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину B и середины M и N ребер AD и CC_1 проведена плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости грани $ABCD$.

Ответ: $arctg\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

3.73. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину 12. Точка K лежит на продолжении ребра BC на расстоянии 9 от вершины C. Точка L ребра AB удалена от A на 5. Точка M делит отрезок A_1C_1 в отношении 1:3, считая от A_1. Найдите площадь сечения куба плоскостью KLM.

Ответ: 156.

3.74. Каждое ребро куба разделено на три отрезка равной длины. Докажите, что полученные 24 точки деления принадлежат одной сфере.

Переключаемся

3.75. Внутри грани реального правильного тетраэдра взяли точку. Как найти расстояние от нее до противоположной этой грани вершины, делая измерения только на его поверхности?

ГЛАВА 4

ОБЪЕМЫ ТЕЛ И ПЛОЩАДИ ИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Если первые три главы мы назвали "строительной геометрией", то главу 4 можно было бы назвать "измерительной геометрией". В этой главе мы измерим объемы тех тел, которые были рассмотрены в главе 2, а также вычислим площади их поверхностей.

Вообще, вопрос об объемах тел трудный, и он не может быть изложен в школьном курсе вполне строго. То же относится и к площади поверхности. Все эти вопросы принадлежат, по существу, к трудным разделам современной математики. Поэтому, излагая их, мы часто будем прибегать к соображениям наглядности.

*§13. ПОНЯТИЕ ОБЪЕМА

13.1. **Простые тела.** Два основных свойства объемов известны всем: во-первых, объемы равных тел равны и, во-вторых, при "сложении" тел их объемы складываются. Однако любые мыслимые в геометрии тела могут быть настолько сложно устроены, что приписать им всем объем с указанными свойствами нельзя. Поэтому приходится выделить класс тел (мы называем их простыми), для которых это возможно.

Тело будем называть **простым**, если каждая прямая, имеющая с телом общие точки, пересекает его поверхность по конечному числу отрезков и отдельных точек.

Каждое реальное тело можно считать простым, пересечение поверхности тела с прямой по бесконечному числу отдельных точек и отрезков мыслимо лишь для идеального тела. Очевидно, что простыми телами являются все многогранники и все выпуклые тела. Мы будем вычислять объемы лишь для простых тел, а потому, говоря "тело", мы будем подразумевать, что оно является простым телом.

13.2. **Определение объема**. Теперь можно дать определение объема, включив в него те два свойства, о которых говорилось в п.13.1.

Объемом тела называется положительная величина, определенная для тел так, что: 1) равные тела имеют равные объемы; 2) если тело составлено из конечного числа тел, то его объем равен сумме их объемов.

Говоря, что тело составлено из нескольких тел, мы имеем в виду, что оно является их объединением и любые два данных тела не имеют общих внутренних точек.

Обратите внимание на то, что такими же свойствами характеризуются и площади плоских фигур, и длины отрезков.

Сравнивая свойства объема, площади и длины, видим полное их сходство, хотя это разные величины, так как относятся к разным объектам: длины — к отрезкам, площади — к плоским фигурам, объемы — к телам.

Длины, площади и объемы измеряются в разных единицах. Эти единицы согласуются друг с другом следующим образом. Пусть выбрана единица длины — единичный отрезок, т.е. такой, длина которого считается равной единице. Тогда за единицу измерения площади принимают площадь единичного квадрата, т.е. квадрата, стороной которого служит единичный отрезок. За единицу объема принимается объем единичного куба, т.е. куба, ребром которого служит единичный отрезок.

Так принято в геометрии и в физике. На практике же применяют разные единицы: длину измеряют метрами, миллиметрами, дюймами, футами и т.д., для измерения больших расстояний в астрономии применяют следующие единицы длины: световой год и парсек; площади измеряют квадратными метрами, гектарами, акрами; объемы — кубическими метрами, литрами, галлонами, баррелями, бушелями, и т.д[1].

Для самих понятий площади и объема выбор единицы не играет роли, и совершенно необязательно, например, считать за единицу объема, скажем, объем единичного куба. Можно было бы принять за единицу объе-

---

[1] Это единицы объема, применяемые в США и Англии. Бушелями измеряют объем зерна, баррелями — объем нефти, галлонами — объем бензина.

ма объем любого другого многогранника. Только это было бы не так удобно.

Ради простоты мы выберем раз и навсегда единичный отрезок, а вместе с ним единичный квадрат и единичный куб. Тогда под длинами, площадями и объемами будем понимать их численные значения в этих единицах.

В определениях площади и объема не говорится о том, что такие величины в самом деле существуют. Их существование нужно еще доказать. Так, для объема справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а. **При выбранном единичном кубе каждому телу соответствует, и притом единственное, положительное число — численное значение объема при данной единице.**

При изменении единицы это число изменяется так: если берется в k раз меньший (больший) единичный отрезок, то численное значение объема увеличивается (уменьшается) в k^3 раз.

Аналогичная теорема выполняется для площади, но с коэффициентом изменения k^2.

Доказывать эти теоремы не будем.

Доказательства теорем о существовании и единственности площади и объема можно найти в книгах [5] и [6].

13.3. **Геометрические величины.** В определении объема сказано, что объем тела — это величина (точнее было бы сказать, **скалярная величиина**, так как бывают и векторные величины — о них пойдет речь в главе 5). Что же такое величина? На этот вопрос кратко можно ответить так: *величина — это то, что можно измерить.* Или более подробно: *величина — это такое свойство предмета или явления, которое может быть в каком-то смысле больше или меньше и которое можно точно оценить.*

Точная оценка величины называется ее **измерением**. Измерение происходит в результате процесса сравнения величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу. Процесс сравнения зависит от рода рассматриваемых величин: для расстояний он один, для объемов — другой, для масс — третий и т.д. В результате измере-

ния величина получает определенное численное значение при данной единице измерения.

Величины играют большую роль в науке, особенно в физике. Почти все законы физики выражают связи между теми или иными величинами. Сила, масса, скорость, температура и т.д. — вот примеры физических величин.

Геометрические величины — это свойства геометрических фигур, характеризующие их форму и размеры; это длина, площадь, объем, величина угла.

Длины, площади, объемы — все это примеры неотрицательных скалярных величин. Скалярные величины вполне определяются своими численными значениями при данной единице измерения. Для скалярных величин определяются отношения сравнения ("равно", "больше", "меньше"), сложение и умножение на действительные числа. При этом действия со скалярными величинами и их отношения равносильны таким же действиям и отношениям с их численными значениями. Никаких других свойств у скалярных величин не предполагается.

При этом надо иметь в виду следующее: так как для величин данного рода определены действия сложения и умножения на число, то определить можно не отдельную величину, а множество всех величин (любого) данного рода. Так приходим к следующему определению.

Множеством неотрицательных скалярных величин (некоторого рода) называется множество, для элементов которого выполняются следующие условия (аксиомы величины):

1. Любые два элемента (две величины) этого множества **сравнимы** (либо они равны, либо одна из них больше другой), т.е. в этом множестве введены отношения "равно" — "=", "больше" — ">" и "меньше" — "<" и для любых двух величин a и b либо $a=b$, либо $a>b$, либо $a<b$.

2. Величины можно складывать, т.е. каждым двум величинам a и b однозначно сопоставляется некоторая величина $c=a+b$, называемая их **суммой**.

3. Величины можно умножать на неотрицательные числа, т.е. каждой величине a и каждому числу $\alpha \geq 0$ однозначно сопоставляется некоторая величина $b=\alpha \cdot a$ — **произведение** a **на** α.

4. Каждую величину a можно измерить некоторой величиной e, т.е. существует такое число $\lambda_e(a) \geq 0$, что $a = \lambda_e(a) \cdot e$. При этом $1 \cdot e = e$, т.е. $\lambda_e(e) = 1$. Число $\lambda_e(a)$ называется численным значением величины a при единице e.

5. Действия над величинами и их отношения равносильны аналогичным действиям и отношениям с их численными значениями, т.е. во-первых, $a = b$, $a > b$ или $a < b$ тогда и только тогда, когда соответственно $\lambda_e(a) = \lambda_e(b)$, $\lambda_e(a) > \lambda_e(b)$ или $\lambda_e(a) < \lambda_e(b)$; во-вторых, равенство $c = a + b$ равносильно равенству $\lambda_e(c) =$ $= \lambda_e(a) + \lambda_e(b)$; наконец, в-третьих, равенство $b = \alpha \cdot a$ равносильно равенству $\lambda_e(b) = \alpha\lambda_e(a)$.

§14. ОБЪЕМ ПРЯМОГО ЦИЛИНДРА

Из всех рассмотренных нами тел проще всего устроен прямой цилиндр. Чтобы задать такой цилиндр C надо задать его основание Q и его высоту H (рис. 14.1). И, по-видимому, всем ясно, что его объем V тогда будет равен произведению площади S его основания на высоту H, т.е.

$$V = SH. \tag{1}$$

Убедимся в справедливости этой формулы.

14.1. **Объем прямоугольного параллелепипеда.** Формулу (1) для простейших прямых цилиндров — прямоугольных параллелепипедов и кубов — вы знаете с первых классов. И там вы выводили ее, например, для прямоугольного параллелепипеда, длина основания которого была a, ширина основания была b, а высота параллелепипеда была c. Ко-

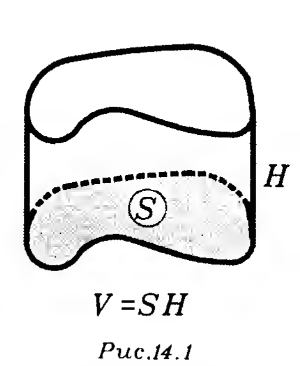


Рис.14.1

нечно, там эти a, b, c были конкретными натуральными числами, например, $a=5$, $b=3$, $c=4$ (рис.14.2). И вывод формулы (1) состоял в том, что вы из единичных кубиков (т.е. из кубиков с ребром, равным единице длины) складывали этот параллелепипед: он составлялся из c слоев, в каждом слое было ab кубиков. Объем единичного куба принимался за единицу. А тогда объем V параллелепипеда будет равен abc, т.е. $V = SH$, поскольку $S=ab$ и $H=c$.

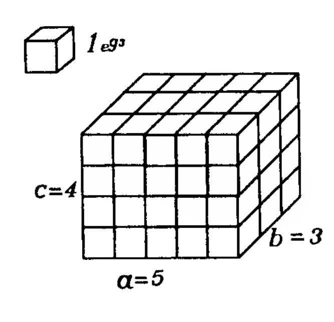


Рис.14.2

Итак, формула (1) для параллелепипеда, у которого ребра измеряются натуральными числами, верна.

Для рациональных чисел a, b, c всегда можно выбрать такие натуральные числа m, n, p, q, что $a=\frac{m}{q}$, $b=\frac{n}{q}$, $c=\frac{p}{q}$, и измерять его объем кубиками, длины ребер которых равны $\frac{1}{q}$. Единичный куб можно сложить из q^3 таких кубиков (рис.14.3), т.е. объем каждого из них равен $\frac{1}{q^3}$. Данный же параллелепипед можно сложить из mnp таких кубиков, т.е. его объем

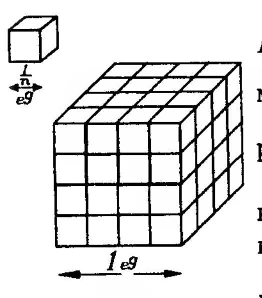


Рис.14.3

$$V = mnp\cdot\frac{1}{q^3}=\frac{m}{q}\cdot\frac{n}{q}\cdot\frac{p}{q}=abc=SH.$$

Итак, формула (1) верна и в этом случае.

Наконец, если среди чисел a, b, c есть иррациональные числа, то приближаем такие числа последовательностями рациональных чисел a_n, b_n, c_n (выбирая

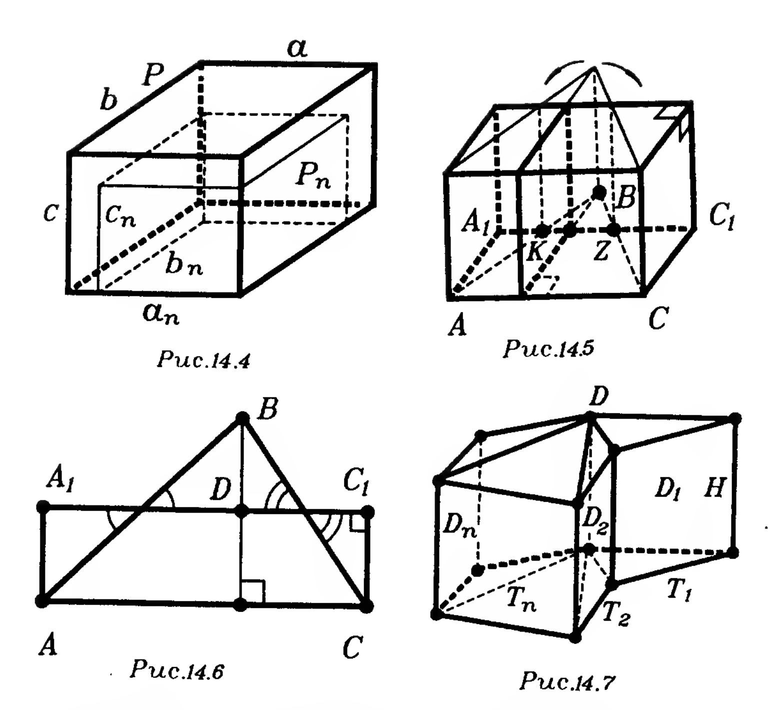


Рис.14.4

Рис.14.5

Рис.14.6

Рис.14.7

приближения с недостатком) и "исчерпываем" данный параллелепипед P параллелепипедами P_n со сторонами a_n, b_n, c_n (рис.14.4). В итоге снова приходим к равенству (1).

14.2. **Объем прямой призмы.** Теперь от прямоугольного параллелепипеда можно перейти к любой прямой призме. Сначала любую прямую треугольную призму D перестроим в равновеликий ей прямоугольный параллелепипед P (рис.14.5), подобно тому, как любой треугольник T может быть перестроен в равновеликий ему прямоугольник (рис.14.6). А затем уже любую прямую призму D разбиваем диагональными сечениями на прямые треугольные призмы D_1, ... , D_n, разбивая вначале ее основание Q на треугольники T_1, ..., T_n (рис.14.7). Тогда

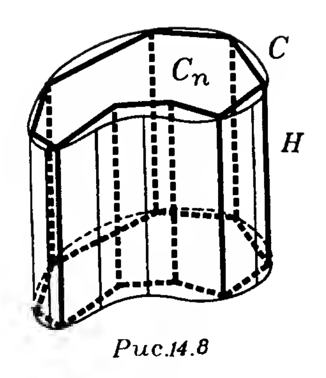


Рис.14.8

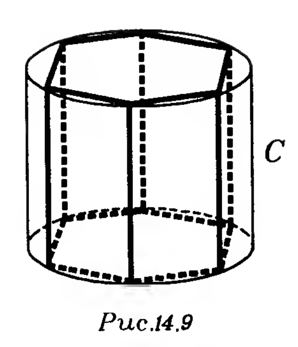


Рис.14.9

$$V(D) = V(D_1) + \ldots + V(D_n) = S(T_1)H + \ldots + S(T_n)H =$$
$$= (S(T_1) + \ldots + S(T_n))H = SH.$$

14.3. **Общий случай.** Тот же метод исчерпывания, о котором шла речь для прямоугольного параллелепипеда с иррациональными длинами ребер, применяется, по существу, и для вычисления объема любого прямого цилиндра C с основанием Q, имеющим площадь S, и высотой H. Цилиндр C "исчерпывается" прямыми призмами C_n, у которых высоты равны H, а основания которых Q_n "исчерпывают" основание Q цилиндра C (рис.14.8). Например, прямой круговой цилиндр C обычно "исчерпывают" вписанными в него правильными n-угольными призмами, неограниченно увеличивая число n (рис.14.9).

§15. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЪЕМА ИНТЕГРАЛОМ

15.1. **О методах измерения объемов.** Метод исчерпывания, о котором шла уже речь в предыдущем параграфе, был введен в Древней Греции в IV в. до н.э. одним из величайших геометров — Евдоксом, а самые сложные задачи об объемах этим методом в древности были решены в III в. до н.э. Архимедом. Можно даже сказать, что в решении этих задач Архимед был предшественником современного интегрального исчисления. Если следовать за Евдоксом и Архимедом, то теперь мы должны были бы

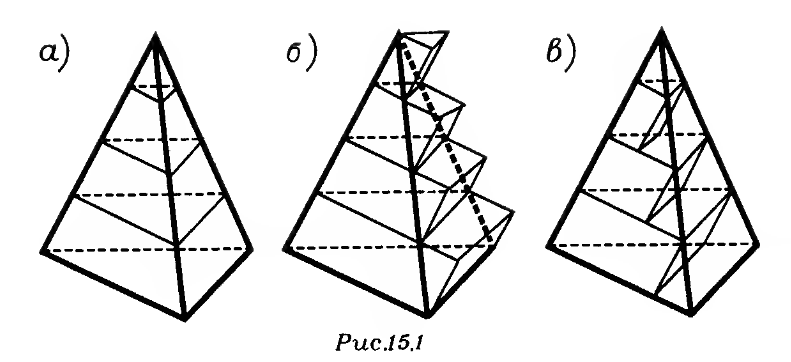


Рис.15.1

найти методом исчерпывания объем пирамиды, строя для нее "чертову лестницу" (рис.15.1) и получив (в результате очень непростых доказательств) формулу, согласно которой объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту. Затем можно было бы перейти к объему конуса и объему шара.

Но ведь вы уже знакомы сейчас с такими фундаментальными понятиями современной математики как производная и интеграл. Эти понятия появились в конце XVII века в работах И.Ньютона и Г.Лейбница, в частности, при решении геометрических задач, в том числе и задачи об объеме тел. Воспользуемся этими современными средствами.

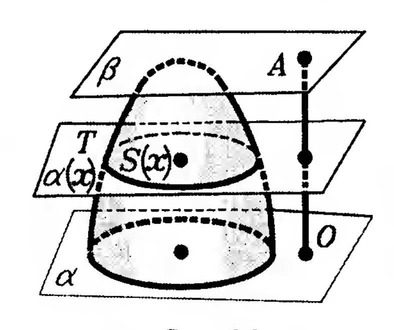


Рис.15.2

15.2. **Выражение объема через площади сечений.**

Т е о р е м а. **Пусть тело T лежит между параллельными опорными плоскостями α и β и $\alpha(x)$— плоскость, лежащая между ними и удаленная от α на расстояние x** (рис.15.2). **Пусть сечение тела T плоскостью $\alpha(x)$ имеет площадь $S(x)$ и функция $S(x)$ непрерывна. Тогда объем $V(T)$ тела T выражается равенством**

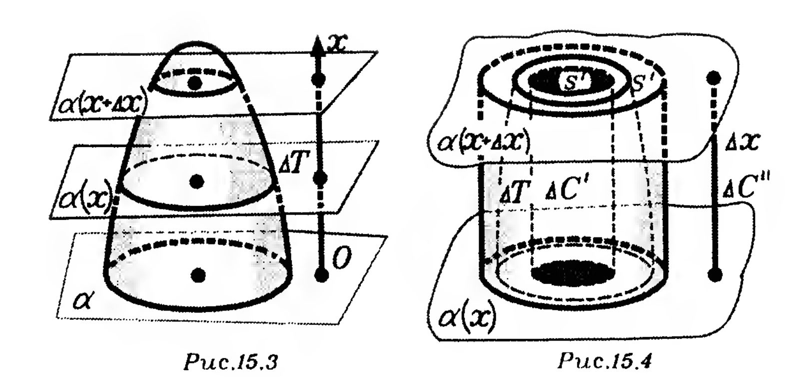


Рис.15.3 Рис.15.4

$$V(T) = \int_0^H S(x)\,dx, \tag{1}$$

где H — расстояние между α и β.

□ Обозначим через $V(x)$ объем части тела T, лежащей между плоскостями α и $\alpha(x)$, где $O<x<H$. Очевидно, $V(T)=V(H)$. Кроме того, положим $V(O)=$ $=0$. Покажем, что $V(x)$ имеет своей производной $S(x)$. Фиксируем некоторое значение x из интервала $(0,H)$, выберем $\Delta x>0$ и рассмотрим слой ΔT тела T между плоскостями $\alpha(x)$ и $\alpha(x+\Delta x)$ (рис.15.3). Если Δx достаточно мало, то слой ΔT можно рассматривать приближенно как прямой цилиндр с высотой Δx. Это означает следующее. Для выбранного Δx можно построить прямые цилиндры $\Delta C'$ и $\Delta C''$ с основаниями в плоскостях $\alpha(x)$ и $\alpha(x+\Delta x)$ такие, что цилиндр $\Delta C'$ содержится в ΔT, цилиндр $\Delta C''$ содержит ΔT (рис.15.4) и площади их оснований $S'(\Delta x)$ и $S''(\Delta x)$ стремятся к $S(x)$, когда $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} S'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} S''(x) = S(x). \tag{2}$$

(Последнее утверждение, верное в общем случае, можно проверить для каждого из конкретных тел, которые будут рассмотрены далее.)

Объемы прямых цилиндров $\Delta C'$ и $\Delta C''$ выражаются равенствами

$$V(\Delta C') = S'(\Delta x)\cdot \Delta x\,, \quad V(\Delta C'') = S''(\Delta x)\cdot \Delta x\,. \quad (3)$$

Объем слоя ΔT обозначим через ΔV. Так как цилиндр $\Delta C'$ содержится в слое ΔT, а цилиндр $\Delta C''$ содержит слой ΔT, то

$$V(\Delta C') \le \Delta V \le (\Delta C''). \quad (4)$$

Разделим все выражения в (4) на $\Delta x > 0$ и, использовав (3), получим:

$$S'(\Delta x) \le \frac{\Delta V}{\Delta x} \le S''(\Delta x). \quad (5)$$

Переходя к пределу в (5) при $\Delta x \to 0$ и учитывая (2), получим, что существует

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = S(x), \quad (6)$$

т.е., производная функция $V(x)$ равна $S(x)$.

Следовательно, функция $V(x)$ является первообразной функции $S(x)$. При этом $V(0)=0$ и $V(H)=V(T)$. Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница, доказанной в курсе алгебры и начал анализа, имеем:

$$V(T) = V(H) - V(0) = \int_0^H S(x)\,dx\,,$$

что и требовалось доказать. ■

§16. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА, КОНУСА, ШАРА

Применим теорему предыдущего параграфа к вычислению объемов некоторых тел.

16.1. **Объем цилиндра.** В §14 мы нашли объем прямого цилиндра. Тот же результат верен и для любого цилиндра.

Т е о р е м а (об объеме цилиндра). **Объем цилиндра (в частности, призмы) равен произведению площади основания на высоту:**

$$V = SH.$$

□ Пусть $Q(x)$ — сечение данного цилиндра плоскостью, параллельной плоскости основания и проведенной на расстоянии x от нее.

Расстояние x меняется от 0 до H. Площади $S(x)$ всех сечений $Q(x)$ равны площади основания S: $S(x) = S$. По формуле (1) §15

$$V = \int_0^H S(x)\,dx = \int_0^H S\,dx = S\int_0^H dx = SH. \blacksquare$$

16.2. **Объем конуса**

Теорема (об объеме конуса). **Объем конуса (в частности, пирамиды) равен одной трети произведения площади основания на высоту:**

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

□ Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию, подобно основанию. Если плоскость проходит на расстоянии x от вершины, то коэффициент подобия равен $\frac{x}{H}$ (рис.16.1). Поэтому площадь сечения $S(x)$ такой плоскостью равна:

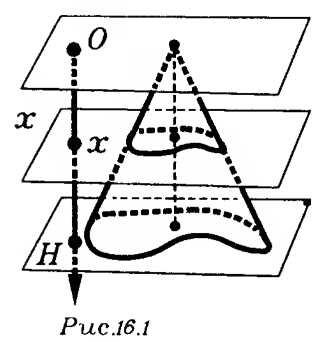


Рис.16.1

$$S(x) = \left(\frac{x}{H}\right)^2 S,$$

где S — площадь основания.

По формуле (1) §15 объем конуса K будет:

$$V(K) = \int_0^H S(x)\,dx = \int_0^H S\frac{x^2}{H^2}\,dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2 dx =$$

$$= \frac{S}{H^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^H = \frac{1}{3}SH.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{3}SH$. ■

16.3. **Объем шара.**

Т е о р е м а (об объеме шара). **Объем шара радиусом R выражается формулой**

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}.$$

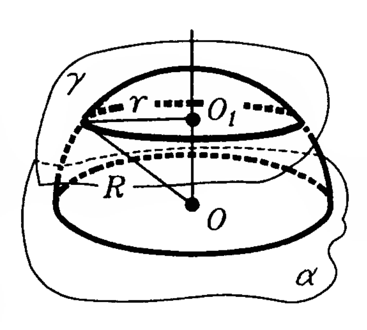


Рис.16.2

□ Рассмотрим шар радиусом R. Удобнее взять полушар — часть шара, ограниченную плоскостью, проходящей через центр (рис.16.2).

Плоскость γ, параллельная плоскости α и проходящая от нее на расстоянии x, пересекает шар по кругу радиусом $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Площадь $S(x)$ этого круга равна $\pi \cdot (R^2 - x^2)$. Объем полушара равен, очевидно, половине объема шара V, а расстояние H в формуле (1) §15 равно R. Поэтому эта формула дает:

$$\frac{1}{2}V = \pi \int_0^R (R^2 - x^2)\, dx.$$

Вычисляем:

$$\int_0^R (R^2 - x^2)\, dx = \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}R^3.$$

Следовательно, $\frac{1}{2}V = \frac{2}{3}\pi R^3$ и $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. ■

*16.4. **Объем тел вращения.** Шар есть частный случай тела вращения, состоящего из кругов (плюс, конечно, полюсы — концы оси вращения тела). Рассмотрим какое-нибудь такое тело. Введем на его оси вращения координату x, отсчитываемую от одного конца оси до другого. Через концы оси проходят перпендикулярные ей опорные плоскости. Пусть H— расстояние между ними.

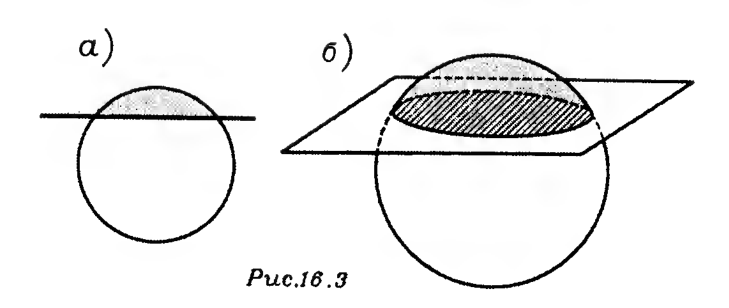


Рис.16.3

Пусть $r(x)$ — радиус круга, по которому тело вращения пересекается плоскостью, перпендикулярной оси и проходящей через точку с координатой x. Площадь этого круга равна $\pi \cdot r^2(x)$. Поэтому, применяя формулу (1) §15, получаем для объема тела выражение

$$V = \pi \int_0^H r^2(x)\, dx .$$

*16.5. **Объем шарового сегмента и шарового сектора.** Аналогом сегмента круга (рис.16.3*а*) является **шаровой сегмент** — часть шара, отсекаемая от него плоскостью (рис.16.3*б*). **Основанием шарового сегмента** назовем тот круг, который получен в сечении шара плоскостью, отсекающей сегмент. Найдем объем шарового сегмента U, отсекаемого от шара радиуса R плоскостью α (рис.16.4). Проведем диаметр AB шара T, перпендикулярный плоскости α, и обозначим через H длину отрезка AC диаметра AB, лежащего в сегменте U. Величина H называется **высотой сегмента** U. Обозначим через α_x секущую плоскость шара T, удаленную от точки A на расстояние x, где $x \in [0, H]$, и перпендику-

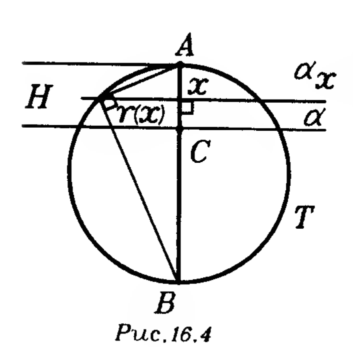


Рис.16.4

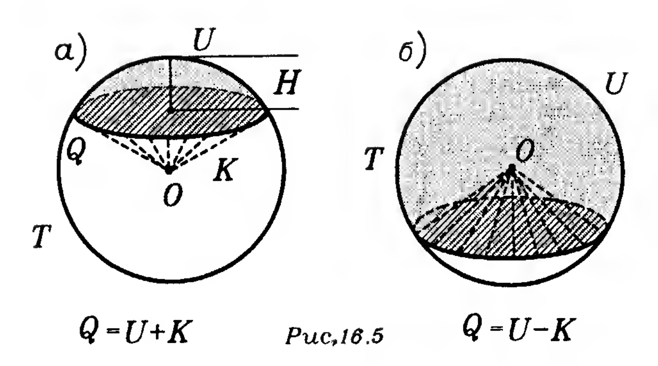


Рис.16.5

лярную диаметру AB. Плоскость α_x пересекает сегмент U по кругу радиуса $r(x)$, причем

$$r^2(x) = x(2R - x).$$

Интегрируя площади этих кругов от 0 до H, получаем

$$V(U) = \pi\int_0^H (2Rx - x^2)\ dx = \pi \cdot \left(RH^2 - \frac{H^3}{3}\right). \qquad (1)$$

Шаровой сектор получают из шарового сегмента U, добавляя или удаляя конус вращения. Если высота H сегмента U меньше радиуса R исходного шара T, то шаровой сектор Q получают, добавляя к сегменту U конус K с вершиной в центре шара T и с основанием, совпадающим с основанием сегмента U(рис.16.5*а*). Если же $H > R$, то шаровой сектор Q получают, удаляя такой конус K из сегмента U(рис.16.5*б*). В первом случае, складывая объемы U и K, получаем

$$V(Q) = \pi\left(RH^2 - \frac{H^3}{3}\right) + \frac{\pi}{3}H(2R - H)(R - H) = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Проверьте, что и во втором случае приходим к тому же результату, т.е. имеет место формула

$$V(Q) = \frac{2}{3}\pi R^2 H. \qquad (2)$$

§17. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

17.1. **Площади многогранных и развертывающихся поверхностей.** Площадь поверхности многогранника, естественно, равна сумме площадей его граней. Для боковых поверхностей цилиндров и конусов интуитивно ясно, что их можно развернуть на плоскость и затем подсчитать площадь полученной плоской области. При этом боковая поверхность прямого цилиндра перейдет в прямоугольник (рис.17.1), длина одной стороны которого равна длине границы основания цилиндра, а длина другой его стороны равна высоте прямого цилиндра, или, что то же самое, равна длине его образующей.

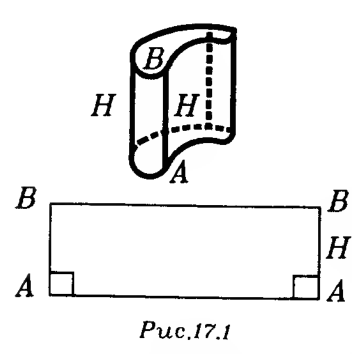
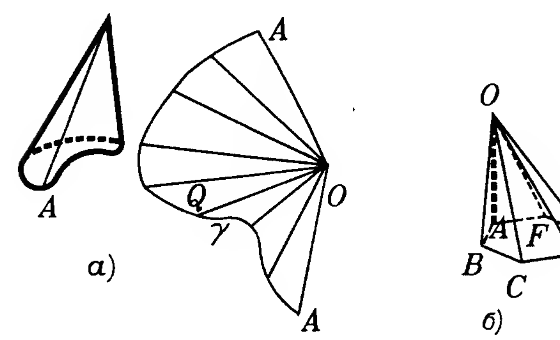


Рис.17.1

Например, если цилиндр был цилиндром вращения радиуса R и высоты H, то разверткой его боковой поверхности будет прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и H, а потому площадь такого прямоугольника равна $2\pi RH$. Итак, *площадь боковой поверхности цилиндра вращения радиуса R и высоты H равна $2\pi RH$*. Добавив к этой площади площади оснований цилиндра, получим для площади поверхности цилиндра $S_ц$ формулу:



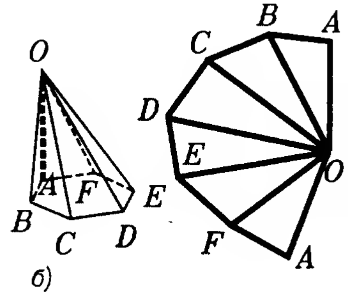


Рис.17.2

$$S_{ц} = 2\pi RH + 2\pi R^2. \quad (1)$$

В результате развертки боковой поверхности конуса в общем случае получим некоторую область Q, похожую на сектор (рис.17.2*a*). Такая область Q отсечена от некоторого плоского угла кривой линией γ. Например, если развернуть боковую поверхность пирамиды, то кривой линией γ будет ломаная (рис.17.2*б*). В том случае, когда конус был конусом вращения с радиусом основания R и образующей L, кривая γ будет дугой окружности, радиус которой равен L, а длина этой дуги равна $2\pi R$ (рис.17.2*в*). Подсчитаем площадь этого сектора Q.

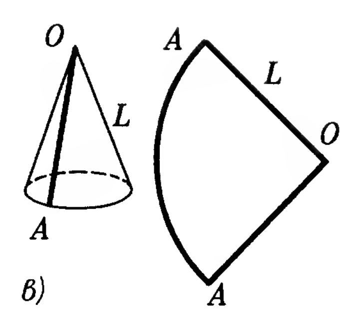


Рис.17.2

Площадь круга D радиуса L равна πL^2, а длина его окружности равна $2\pi L$. Площадь $S(Q)$ сектора Q составляет от площади D такую же часть, какую составляет длина дуги γ от длины $2\pi L$ всей окружности. Поэтому имеем:

$$S(Q) = \frac{2\pi R}{2\pi L} \cdot \pi L^2 = \pi LR .$$

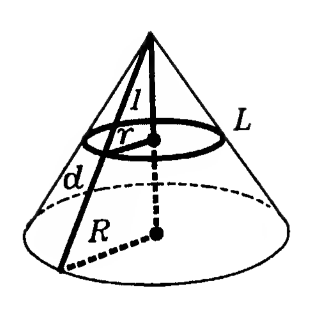
Итак, площадь $S_{б.к.}$ боковой поверхности конуса вращения с образующей L и радиусом R выражается формулой

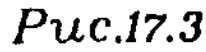
$$S_{б.к.} = \pi LR . \quad (2)$$

Добавив к $S_{б.к.}$ площадь основания конуса вращения, получим для площади его поверхности $S_к$ формулу:

$$S_к = \pi LR + \pi R^2.$$

Площадь боковой поверхности $S_{б.у.}$ усеченного конуса вращения с радиусами оснований R и r и длиной образующей d (рис.17.3) легко найти вычитанием площадей боковых поверхностей конусов вращения, из кото-




Рис.17.3

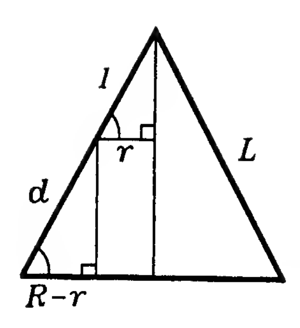


Рис.17.4

рых получен рассматриваемый усеченный конус. Их основания имеют радиусы R и r, а их образующие обозначим L и l. Тогда $L - l = d$ и

$$S_{\text{б. у.}} = \pi RL - \pi rl = \pi R(l + d) - \pi rl =$$

$$= \pi Rd + \pi l(R - r). \qquad (3)$$

Так как (см. рис.17.4) $\dfrac{l}{r} = \dfrac{d}{R - r}$, то

$$l(R - r) = rd.$$

Подставляя это в равенство (3), получаем формулу для боковой поверхности усеченного конуса вращения:

$$S_{\text{б. у.}} = \pi(R + r)d. \qquad (4)$$


Рис.17.5

17.2. **Площадь сферы.** Площадь искривленной поверхности, которую нельзя развернуть на плоскость, вычисляют так. Разбивают поверхность на такие куски, которые уже достаточно мало отличаются от плоских. Потом находят площади этих кусков, как если бы они были плоскими (например, заменяя их проекциями на плоскости, от которых поверхность мало отклоняется). Сумма их площадей и даст приближенно площадь поверхности. Так поступают на практике: площадь поверхности купола получается как сумма площадей покрывающих его кусков листового металла (рис.17.5). Еще

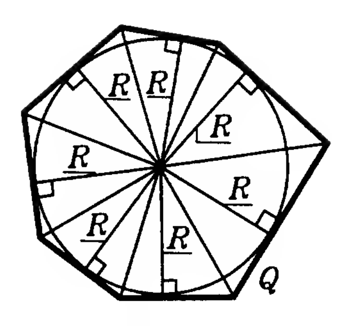


Рис.17.6

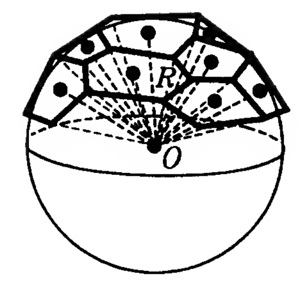


Рис.17.7

лучше это видно на примере земной поверхности. Она искривлена — примерно сферическая. Но участки, небольшие в сравнении с размерами всей Земли, измеряют как плоские.

Вычисляя плоскость сферы, описывают вокруг нее близкую к ней многогранную поверхность. Ее грани будут приближенно представлять куски сферы, а ее площадь дает приближенно площадь самой сферы. Ее дальнейшее вычисление основано на следующей лемме.

Л е м м а. **Объем $V(P)$ многогранника P, описанного вокруг сферы радиуса R, и площадь $S(P)$ его поверхности связаны соотношением**

$$V(P)=\frac{1}{3}S(P)\cdot R. \qquad (5)$$

З а м е ч а н и е: Аналогичным соотношением связаны площадь $S(Q)$ многоугольника Q, описанного вокруг круга радиуса R, и его периметр $L(Q)$ (рис.17.6):

$$S(Q)=\frac{1}{2}L(Q)\cdot R.$$

□ Опишем вокруг сферы какой-либо многогранник P. Пусть у него n граней $Q_1, \dots, Q_n$. Разобьем P на пирамиды $T_1, \dots, T_n$ с общей вершиной в центре O и с гранями $Q_1, \dots, Q_n$ в основаниях (рис.17.7).

Каждая такая грань Q_i лежит в касательной плоскости сферы и, значит, перпендикулярна радиусу сферы в точке касания. Значит, этот радиус есть высота пирамиды T_i. Поэтому ее объем будет:

$$V(T_i) = \frac{1}{3}S(Q_i)R\,,$$

где $S(Q_i)$ — площадь грани Q_i. Сумма этих площадей дает площадь $S(P)$ поверхности многогранника P, а сумма объемов пирамид T_i — его объем $V(P)$. Поэтому

$$V(P) = \frac{1}{3}S(P)R. \blacksquare$$

Т е о р е м а (о площади сферы). **Площадь сферы радиуса R выражается формулой:**

$$\mathbf{S = 4\pi R^2}\,. \tag{6}$$

□ Пусть дана сфера радиуса R. Возьмем на ней n точек, не лежащих в одной полусфере, и проведем через них касательные плоскости к сфере. Эти плоскости ограничат многогранник P_n, описанный вокруг сферы. Пусть V_n— объем многогранника P_n, S_n — площадь его поверхности, V— объем шара, ограниченного рассматриваемой сферой, и S — ее площадь.

Будем увеличивать число n выбранных точек и брать их на S все гуще. Например, возьмем достаточно густую сеть параллелей и меридианов и выберем точки их пересечения. Тогда выполняются приближенные равенства: $V_n \approx V$ и $S_n \approx S$. Поэтому величина $\frac{V_n}{S_n}$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $\frac{V}{S}$. С другой стороны, согласно лемме $\frac{V_n}{S_n} = \frac{1}{3}R$ при всех n. Поэтому два

числа $\dfrac{V}{S}$ и $\dfrac{1}{3}R$ отличаются сколь угодно мало. Это возможно только в случае равенства эти чисел. Следовательно, $\dfrac{V}{S}=\dfrac{1}{3}R$. Отсюда

$$S=\frac{3V}{R}=\frac{3\cdot 4\pi R^3}{3R}=4\pi R^2. \blacksquare$$

*17.3. **Площадь сферических многоугольников.** Мы уже говорили в п.4.2, что роль отрезков в сферической геометрии играют дуги больших окружностей сферы (не больше полуокружности). Поэтому **ломаной на сфере** естественно назвать фигуру, составленную из таких дуг, подобно тому, как составлена ломаная на плоскости из отрезков (рис.17.8). Как и на плоскости, замкнутая ломаная на сфере называется **простой**, если она не имеет самопересечений.

Каждая простая замкнутая ломаная на сфере разбивает ее на две области, которые называются **сферическими многоугольниками** (рис.17.9). Сама ломаная при этом называется границей этих многоугольников, а ее звенья и вершины соответственно сторонами и вершинами ограниченных ею многоугольников.

Измеряется **угол сферического многоугольника** в его вершине углом между лучами, идущими из этой вершины и касательными к его сторонам, если соответствующий угол многоугольника выпуклый, или его дополнением до 2π, если угол многоугольника не выпуклый (рис.17.10).

На плоскости многоугольник с наименьшим числом сторон и вершин — это треугольник. На сфере имеются **двуугольники** (рис.17.11), две вершины которых диаметрально противоположны, а сторонами которых являются две полуокружности больших окружностей.

Выразим *площадь двуугольника через его углы и радиус сферы*. Пусть Q — двуугольник с вершинами A и A' на сфере S радиусом R, и α — угол двуугольника Q, причем $\alpha<\pi$ (рис.17.12). Тогда α равен величине двугранного угла, ребром которого является прямая AA'

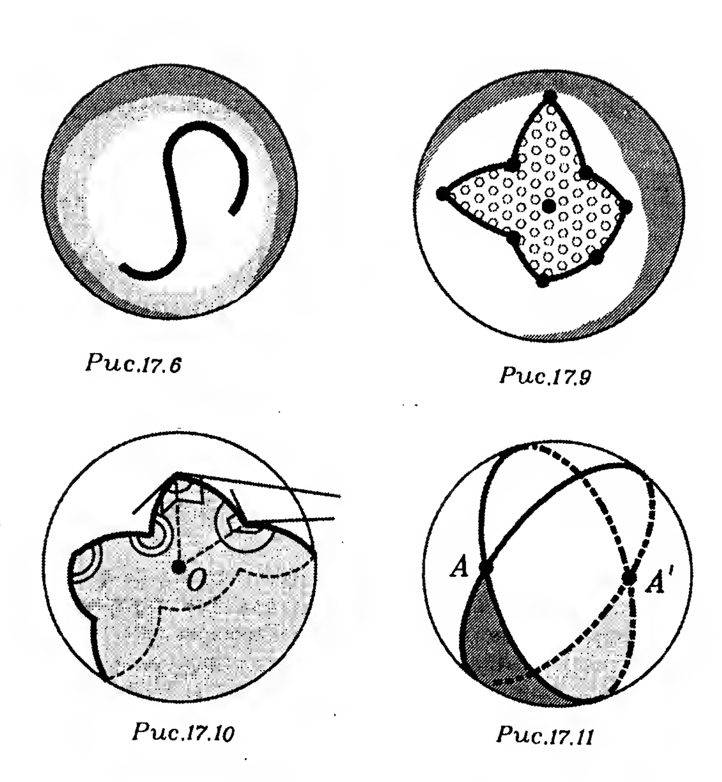


Рис.17.6

Рис.17.9

Рис.17.10

Рис.17.11

и в гранях которого лежат стороны двуугольника Q. Ясно, что площадь $S(Q)$ двуугольника Q составляет ту часть от площади всей сферы S, которую составляет его угол от 2π, т.е.

$$\frac{S(Q)}{4\pi R^2} = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Поэтому

$$S(Q) = 2\alpha R^2 \tag{7}$$

(угол α измеряется в радианах). ■

Оказывается, что площадь $S(T)$ сферического треугольника T, лежащего на сфере S радиусом R, выражается через углы α, β, γ этого треугольника по формуле:

$$S(T) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2. \qquad (8)$$

Действительно, проведем большие окружности, на которых лежат стороны треугольника T. Эти большие окружности образуют на сфере три пары двуугольников с углами α, β, γ. Эти шесть двуугольников покрывают всю сферу. При этом треугольник T и диаметрально противоположный ему треугольник T' покрываются трехкратно (двуугольником из каждой пары), а остальную часть сферы двуугольники покрывают без перекрытий (рис.17.13). Поэтому сумма площадей всех шести двуугольников больше площади сферы S на $2S(T)$ и $2S(T')$, т.е. на $4S(T)$, так как $S(T) = S(T')$. Итак, используя (7), имеем:

$$4\pi R^2 = 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 + 4S(T), \qquad (9)$$

откуда и вытекает (8). ■

Разность $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ называется **избытком треугольника** T и обозначается $\delta(T)$.

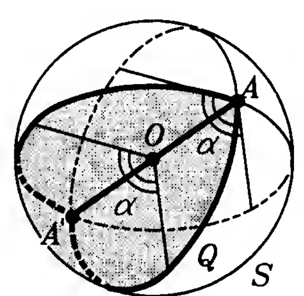


Рис.17.12

Доказанная формула (8) теперь может быть выражена так: *площадь сферического треугольника пропорциональна его избытку.*

Зная формулу для площади сферического треугольника, теперь легко найти выражение для площади любого простого сферического многоугольника P.

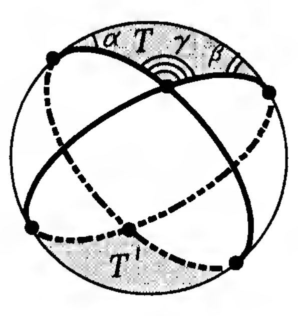


Рис.17.13

Назовем **поворотом многоугольника** P в его вершине A, имеющей угол $\alpha(A)$, разность $\tau_P(A) = \pi - \alpha(A)$. Границу многоугольника P обозначим символом ∂P и ее поворотом $\tau(\partial P)$ назовем сумму поворотов $\tau_P(A)$ во всех вершинах $A \in P$.

Если число вершин P равно n, то

$$\tau(\partial P) = \pi n - \sum_{A \in P} \alpha(A), \qquad (10)$$

т.е. поворот границы n-угольника показывает, насколько величина $(n-2)\pi$ отличается от суммы его углов. Для простых многоугольников на евклидовой плоскости их поворот всегда равен 2π, так как сумма углов любого плоского n-угольника равна $(n-2)\pi$. Для сферического простого многоугольника имеет место слудующая теорема:

Т е о р е м а (о площади сферического многоугольника). **Площадь простого многоугольника P на сфере S радиусом R и поворот его границы связаны равенством**

$$\boldsymbol{S(P) = \left(2\pi - \tau(\partial P)\right)R^2}. \qquad (11)$$

□ Докажем равенство (11) индукцией по числу вершин n-угольника P. Для $n = 2$ и $n = 3$ оно имеет своими частными случаями уже доказанные равенства.

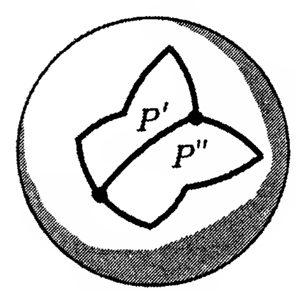


Рис.17.14

Предположим, что (11) верно для всех многоугольников, число вершин которых меньше n, и установим его для n-угольника P.

Разобьем произвольный n-угольник P какой-нибудь диагональю на многоугольники P' и P'' с меньшим числом вершин (рис.17.14). Тогда легко подсчитать, что

$$2\pi + \tau(\partial P) = \tau(\partial P') + \tau(\partial P''). \qquad (12)$$

Так как

$$S(P') = (2\pi - \tau(\partial P'))R^2$$

и

$$S(P'') = (2\pi - \tau(\partial P''))R^2,$$

то

$$S(P) = S(P') + S(P'') = (4\pi - \tau(\partial P') - \tau(\partial P''))R^2 =$$
$$= (2\pi - \tau(\partial P))R^2. \blacksquare$$

***17.4. Площадь сферического сегмента и сферического пояса.** Сначала заметим, что соотношение (5), доказанное в лемме п.17.2, имеет гораздо большую общность. Рассмотрим некоторую сферу радиуса R и на ней фигуру F (рис.17.15). Назовем **шаровым сектором с основанием** F фигуру, образованную радиусами, проведенными во все точки фигуры F.

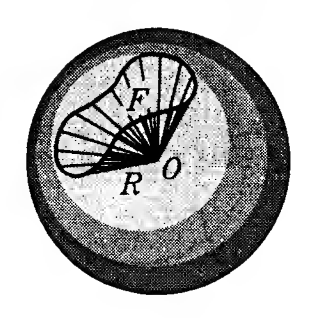


Рис.17.15

Частные случаи шаровых сегментов уже были рассмотрены в п.16.5. Обобщением леммы п.17.2 является следующее:

Л е м м а. **Площадь S области на сфере радиуса R и объем шарового сектора, основанием которого служит данная область, связаны формулой**

$$V = \frac{1}{3} SR. \tag{13}$$

□ Пусть на сфере дана фигура F и пусть Q — шаровой сектор с основанием F. Опишем вокруг шара многогранник и вырежем из него "сектор" пирамидой с вершиной в центре шара, заключающей шаровой сектор Q. Если S_P — площадь поверхности, вырезанной из поверхности многогранника, а V_P — объем, то, как и в лемме п. 17.2, $V_P = \frac{1}{3} S_P R$. Поэтому в пределе, когда $V_P \to V$ и $S_P \to S$, получаем формулу (13). ■

Зная формулу (13), можно находить площади некоторых частей сферы.

Сферическим сегментом назовем часть сферы, отсеченную от нее любой плоскостью (рис.17.16*а*). **Сферическим поясом** назовем часть сферы, лежащую между двумя параллельными плоскостями (рис.17.16*б*). **Высотой сферического** пояса называется расстояние между этими плоскостями. На сферический сегмент можно смотреть как на частный случай сферического пояса, когда одна

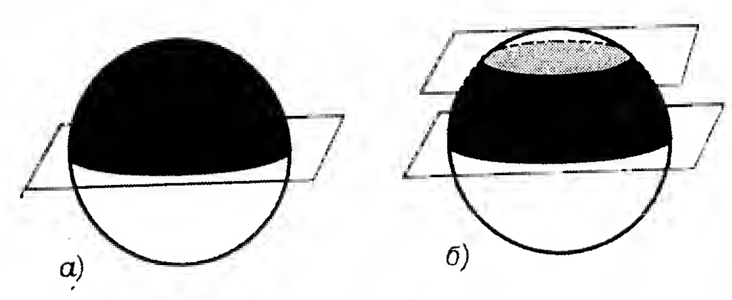


Рис.17.16

из секущих плоскостей стала касательной. Ясно, что **высота сферического сегмента** — это высота соответствующего ему шарового сегмента.

Согласно (13) и результатам п.16.5 для площади S_D сферического сегмента D и объема V соответствующего ему шарового сектора Q имеет место равенство:

$$\frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3} S_D R.$$

Иэ этого равенства получаем, что

$$S_D = 2\pi RH, \qquad (14)$$

где H — высота сегмента D.

Убедитесь, что такая же формула справедлива и для площади сферического пояса, так как пояс является разностью двух сегментов.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

ЗАДАЧИ К §14

4.1. **В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грани $ABCD$ и AA_1B_1B — квадраты со стороной d. $\angle A_1AD = \varphi$. Найдите объем параллелепипеда** (рис.Р3.55).

△ Если $\varphi = 90^\circ$, то объем равен d^3 (?). Если $\varphi \neq 90^\circ$, то данный параллелепипед не является прямым. А формула объе-

ма известна пока только для прямого цилиндра и, значит, для прямого параллелепипеда. Как же быть?

Внимательно рассматривая рисунок Р3.55, можно заметить, что так как $(AB)\perp(AA_1)$ и $(AB)\perp(AD)$, то $(AB)\perp(A_1AD)$. Но ведь нам ничто не мешает считать основанием параллелепипеда грань AA_1D_1D. А тогда параллелепипед становится прямым!

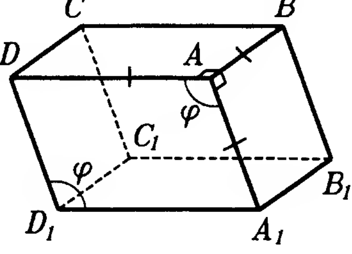


Рис.Р3.55

Найдем его объем:

$$V = S \cdot H = d^2 \cdot \sin\varphi \cdot d =$$

$$= d^3 \sin\varphi .$$

Заметим, что ответ $V = d^3$ для случая, когда $\varphi = 90^\circ$, входит частным случаем в полученный результат. Поэтому, окончательно, имеем:

$$V = d^3 \sin\varphi .$$ ▲

4.2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1 и составляет с двумя ребрами основания углы α и β. Чему равен объем параллелепипеда?

△ Как правило, при решении таких задач идет работа с формулой объема. В этой формуле какие-то величины оказываются неизвестными и задача сводится к тому, чтобы эти неизвестные величины выразить через известные.

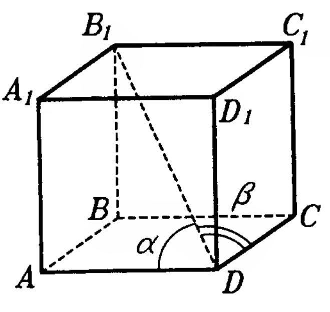


Рис.Р3.56

Сделаем рисунок (рис.Р3.56): он вряд ли требует разъяснений. Пожалуй, стоит заметить, что так как все диагонали в прямоугольном параллелепипеде равны, то можно рисовать любую из них.

Итак, пишем формулу объема $V = S \cdot H$ (V — объем, S — площадь основания, H — высота). Но $S = AD \cdot DC$, $H = DD_1$. Обозначим для удобств — $AD = x$, $DC = y$, $DD_1 = z$. Тогда

$$x = \cos\alpha \text{ (?)}, \quad y = \cos\beta \text{ (?)},$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} \text{ (?)}.$$

Окончательно,

$$V = \cos\alpha \cdot \cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\,.$$

Вроде бы ответ получен, но одно обстоятельство настораживает: под знаком радикала стоит выражение — откуда мы знаем, что оно положительное? И вот еще, в окончательном выражении для объема находятся косинусы, но ведь они тоже не обязаны, вообще говоря, быть больше нуля. А объем — всегда положителен.

Вот с этим-то мы сейчас и будем разбираться.

Сначала — косинусы. Они положительны потому, что являются косинусами острых углов в прямоугольных треугольниках(?).

Выражение $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta$ сначала упростим,

$$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta = \sin^2\alpha-\cos^2\beta\,.$$

Нам надо, чтобы $\sin^2\alpha-\cos^2\beta$ было больше 0. Имеем:

$$\sin^2\alpha-\cos^2\beta>0 \Leftrightarrow \sin^2\alpha>\cos^2\beta \Leftrightarrow \sin\alpha>\cos\beta$$

(т.к. углы α и β — острые). Но

$$\sin\alpha = \frac{AB_1}{B_1D} = AB_1, \qquad \beta = \cos\frac{CD}{B_1D} = CD\,.$$

Так как $AB_1 > CD$ (?), то понимаем, что подкоренное выражение положительно.

К этому же итогу мы придем, выясняя, при каких α и β существует наш параллелепипед. Таковой существует тогда и только тогда, когда $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta>90^\circ$ (?). Первые два ограничения подразумеваются, а далее имеем

$$\alpha+\beta>90^\circ \Leftrightarrow \alpha>90^\circ-\beta \Leftrightarrow \sin\alpha>\sin(90^\circ-\beta)\ (?) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin\alpha>\cos\beta\,.$$

Вот теперь можно поставить точку. ▲

4.3. **Диагональ осевого сечения цилиндра равна 2. Какой из таких цилиндров имеет наибольший объем? В каких границах находится объем такого цилиндра, если радиус цилиндра изменяется в промежутке $\left(0;\frac{1}{3}\right)$?**

△ Эта задача — стандартная, но именно в ее решении все должно быть четко.

Рисунок к ней достаточно сделать планиметрическим (рис.Р3.57). Здесь прямоугольник $ABCD$ — осевое сечение цилиндра, $AC = 2$, AD — диаметр основания цилиндра, CD — его высота. Тогда

$$V = S \cdot H = \pi \cdot OD^2 \cdot CD.$$

Обозначим $OD = x$, $CD = y$. Получаем

$$V = \pi \cdot x^2 \cdot y.$$

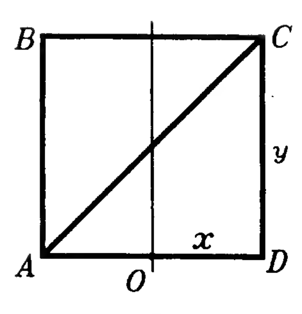


Рис.Р3.57

Нам нужно придти к объему как функции от одной переменной. Поэтому нужна какая-то связь между переменными x и y. Она находится из ΔACD. $AC^2 = AD^2 + CD^2$, отсюда $4x^2 + y^2 = 4$.

Проще будет (без радикалов!), если из последнего равенства выразить x^2 и полученное для него выражение подставить в выражение для объема.

Имеем

$$x^2 = 1 - \frac{y^2}{4}.$$

Тогда

$$V = \pi \cdot \left(1 - \frac{y^2}{4}\right) y = \frac{\pi}{4}(4 - y^2) y.$$

Дробь $\frac{\pi}{4}$ можно пока убрать из рассмотрения — не в ней (константе) дело. Поэтому будем рассматривать вместо объема V другую более простую функцию $\tilde{V} = (4 - y^2)y = 4y - y^3$. Именно ее будем исследовать и начнем с границ для переменной y.

По смыслу задачи $0 < y < 2$, но исследование удобнее вести на $[0;2]$. Теперь $\tilde{V}' = 4 - 3y^2$,

$$\tilde{V}' = 0 \Leftrightarrow 3y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Найденное значение y попадает в промежуток $[0;2]$.

Считаем: $\tilde{V}(0) = 0$, $\tilde{V}(2) = 0$, $\tilde{V}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$. Значит при $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$ функция $\tilde{V}$, а тогда и V достигает наибольшего значения.

Подсчитав соответствующее значение $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, мы можем ответить на вопрос задачи. Наибольший объем имеет такой цилиндр, в котором отношение высоты к радиусу равно $\sqrt{2}$. (Такой результат получится при любом значении диагонали осевого сечения).

А теперь перейдем ко второму вопросу задачи.

Если $0 < x \le \frac{1}{3}$, то $\frac{4}{3}\sqrt{2} \le y < 2$ (?). Удобнее взять $\frac{4}{3}\sqrt{2} \le$ $\le y \le 2$. Критическое значение переменной y, равное $\frac{2}{\sqrt{3}}$, не лежит в этом промежутке(?).

$\tilde{V}'$ на этом промежутке отрицательна(?). Но тогда $\tilde{V}$ на этом промежутке убывает. Поэтому наибольшее значение $\tilde{V}(V)$ достигается при $y = \frac{4}{3}\sqrt{2}$, а наименьшее — при $y = 2$. Учитывая, что $y < 2$, окончательно получаем

$$0 < V \le \frac{4\sqrt{2}}{27}\pi . \blacktriangle$$

4.4. В кубе расположен цилиндр так, что его ось лежит на диагонали куба. В каком положении он имеет наибольший объем?

$\triangle$ Особенностью этой задачи является нестандартная конфигурация куба и цилиндра. Ее надо хорошо "увидеть", прежде, чем решать задачу и даже прежде, чем делать рисунок.

Надо увидеть, что основания в цилиндре наибольшего объема "упираются" в грани куба, каждое основание — в три соседних грани куба; надо увидеть симметричность его положения относительно диагональной плоскости куба.

После этого делаем рисунок, причем сам цилиндр рисовать не будем (рис.Р3.58). Здесь $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. O и O_1 — центры оснований цилиндра, K и L — точки, в которых

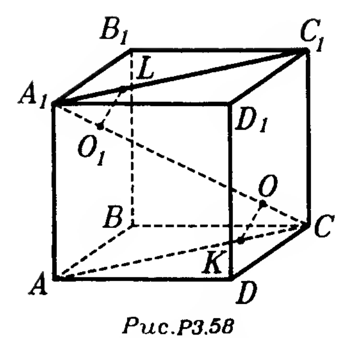


Рис.Р3.58

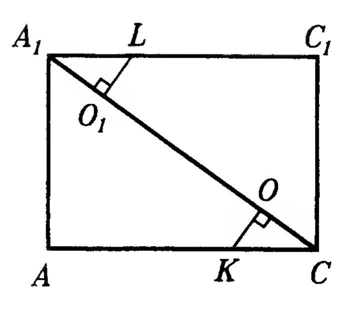


Рис.Р3.59

основания цилиндра "упираются" в грани куба. Теперь ясно, что вся информация для решения задачи содержится в сечении куба AA_1C_1C. Вынесем его отдельно (рис.Р3.59). Пусть ребро куба равно 1. Тогда в прямоугольнике AA_1C_1C $AA_1 = 1$, $AC = \sqrt{2}$, $A_1C = \sqrt{3}$. OO_1— высота цилиндра, обозначим ее H. O_1L и OK — радиусы оснований цилиндра, обозначим их r.

Для объема V цилиндра имеем $V = \pi \cdot r^2 H$. Уберем одну из переменных. Можно заметить, что

$$A_1O_1 = OC = \frac{1}{2}(A_1C - OO_1) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - H) \qquad (?).$$

Из ΔA_1AC имеем

$$tg\angle A_1CA = \frac{AA_1}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из ΔKOC имеем

$$OK = OC \cdot tg\angle A_1CA,$$

значит

$$r = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - H)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - H).$$

Тогда

$$V = \pi \cdot \frac{1}{8}(\sqrt{3} - H)^2 H.$$

$$\tilde{V} = (\sqrt{3} - H)^2 H, \text{ где } 0 < H < \sqrt{3}.$$

Дальше — выкладки на $[0;\sqrt{3}]$

$$\tilde{V}' = 3 - 2\sqrt{3}H^2 + H^3,$$

$$\tilde{V}' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} H = \sqrt{3} \\ H = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

$\tilde{V}(\sqrt{3}) = 0$, поэтому при $H = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tilde{V}$, а значит и V достигает наибольшего значения (?).

Осталось заметить — найденное значение для H показывает, что оно равно $\frac{1}{3}$ диагонали куба, а центры оснований цилиндра делят диагональ куба на 3 равные части. ▲

4.5. **Площадь боковой грани правильной треугольной призмы равна 1. Какая из таких призм имеет наибольший объем?**

△ Задача проста, но ответ не типичен. На рисунке Р3.60 ребро основания правильной треугольной призмы обозначено через x, а ее высота через y.

По формуле объема

$$V = SH.$$

Имеем

$$S = \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \qquad (?).$$

Тогда

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 y.$$

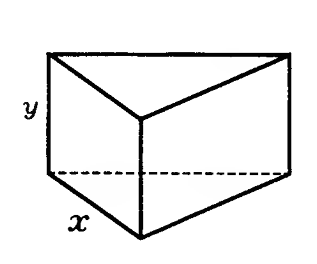


Рис.Р3.60

По условию площадь боковой грани равна 1, поэтому $x \cdot y = 1$, откуда $y = \frac{1}{x}$. Тогда

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x.$$

При этом $0 < x < +\infty$ (?).

Как видим, функция $V(x)$ — линейная. На указанном промежутке она не имеет наибольшего значения.

Поэтому ответ на вопрос задачи буквально такой — никакая. ▲

4.6. **При каком условии достигает граничных значений объем прямоугольного параллелепипеда, у которого сумма трех измерений равна 1?**

△ Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда x, y, z. Тогда, согласно условию $x+y+z=1$. Объем V параллелепипеда в нашей задаче равен произведению его измерений, т.е.,

$$V = xyz.$$

Из этой формулы, использовав условие, можно исключить одну из переменных, например z:

$$z = 1 - x - y.$$

Тогда

$$V = x \cdot y \cdot (1 - x - y).$$

Попытки убрать из этого выражения еще одну переменную бесплодны, ибо никакой связи, кроме данной в условии, между ними нет. А находить экстремальные значения для функции от двух переменных в общем случае в школе не учат.

Что же делать?

Может быть вам известно неравенство Коши для неотрицательных переменных? Оно выглядит так

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Здесь n — число переменных, слева записано их среднее геометрическое, а справа — их среднее арифметическое.

Для двух переменных оно выглядит так

$$\sqrt{x_1 x_2} \le \frac{x_1 + x_2}{2}$$ или, более привычно, $$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}.$$

В нашей задаче переменных три — x, y, z. Так как они положительны, то запишем для него неравенство Коши:

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}.$$

Так как по условию $x+y+z=1$, то

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{1}{3},$$

откуда

$$xyz \le \frac{1}{27},$$

то есть,

$$V \le \frac{1}{27}.$$

А когда $V = \frac{1}{27}$? Дело в том, что равенство между средним геометрическим положительных чисел и их средним арифметическим достигается, и происходит это тогда, когда все числа равны.

Итак, наибольшее значение объема равно $\frac{1}{27}$ и достигается оно при $x = y = z$, то есть в кубе.

Доказательство неравенства Коши можно найти во многих задачниках по алгебре. ▲

4.7. **Дан полушар. В каком положении находится в нем цилиндр, имеющий наибольший объем?**

△ Поначалу задача немного пугает — во-первых, полушар вместо шара, во-вторых, цилиндр может располагаться в нем множеством способов. Какой же выбрать?

Выберем два наиболее определенных положения цилиндра в полушаре.

Первое — когда центр одного его основания совпадает с центром полушара (то есть с центром того шара, от которого остался полушар). Ясно, что такой цилиндр будет иметь наибольший объем, когда второе его основание будет находиться на поверхности полушара.

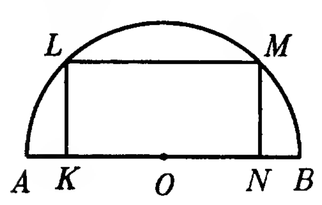


Рис.Р3.61

Второе — когда одна из образующих его поверхности лежит в плоскости большого круга данного полушара и проходит через его центр. Ясно, что такой цилиндр будет иметь наибольший объем, когда его основания будут "упираться" в полусферу.

Рисунок будем делать сразу же планиметрическим, проведя самое "информативное" сечение данной конфигурации (рис.Р3.61).

В первом случае на рисунке Р3.61 AB — диаметр полушара, O — центр полушара и одного основания цилиндра, $KLMN$ — осевое сечение. Обозначим $AB = 2R$, $KN = 2x$, $KL = y$. Тогда

$$V = \pi \cdot KO^2 \cdot KL = \pi \cdot x^2 y.$$

Из треугольника OMN имеем $ON^2 + NM^2 = OM^2$, то есть,

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = R^2 - y^2,$$

поэтому

$$V = \pi \cdot (R^2 - y^2) y.$$

Дальнейшие вычисления приводят к такому наибольшему значению объема

$$V_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} R^3 \qquad (?).$$

Во втором случае на рисунке Р3.61 AB — диаметр полушара, KN — образующая цилиндра, $KLMN$ — его осевое сечение. Обозначим $AB = 2R$, $KL = 2x$, $KN = y$. Тогда

$$V = \pi \cdot \left(\frac{KL}{2}\right)^2 KN = \pi\, x^2 \cdot y.$$

Из треугольника OMN имеем $ON^2 + NM^2 = OM^2$, то есть

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + (2x)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4R^2 - y^2}{16},$$

поэтому

$$V = \frac{\pi}{16}(4R^2 - y^2) y.$$

Дальнейшие вычисления приводят к такому наибольшему значению объема

$$V_2 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} R^3. \qquad (?)$$

Осталось сравнить V_1 и V_2 и получить ответ. ▲

4.8. **Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоиалями двух граней, проведенных из одной вершины, равеи α. Найдите сторону основания призмы.**

△ Задача как бы обратная: обычно находят объем, зная линейные элементы, а здесь предлагается сделать наоборот. Ничего страшного.

На рисунке Р3.62 введены все необходимые обозначения:

$$AB = BC = AC = x,$$

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = y.$$

Рис.Р3.62

Согласно условию имеем такие зависимости:

$$V = \frac{1}{4}\sqrt{3}x^2y;$$

$$\cos\alpha = \frac{(x^2+y^2)2-x^2}{2(x^2+y^2)} \quad (\text{из } \Delta A_1B_1C).$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} x^2y = \dfrac{4V}{\sqrt{3}} \\ 1+\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{1}{2(1-\cos\alpha)}. \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем x^2, подставляем полученное выражение во второе уравнение и получаем уравнение, из которого находим y:

$$y^3 = \frac{4V}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2(1-\cos\alpha)}-1\right).$$

А тогда

$$x = \frac{2\sqrt{V}}{\sqrt[4]{3}\sqrt{y}}. \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ К §15

4.9. **Через диаметр основания цилиндра проведена плоскость под углом φ к основанию. Радиус цилиндра равен R. Найдите объем отсеченной части цилиндра.**

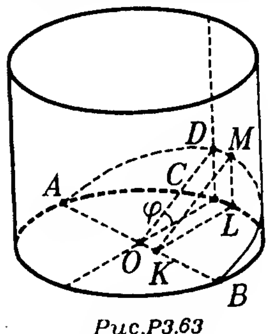


Рис.Р3.63

△ Заметим, что отсеченных от цилиндра частей две. Условимся искать объем той части цилиндра, которая имеет меньший объем.

Вид этих частей существенно зависит от величины угла φ. Будем считать, что величина угла φ такова, что отсеченные части цилиндра имеют вид, изображенный на рисунке Р3.63.

На этом рисунке видны две симметричные относительно (OCD) части. Найдем объем одной из них, а потом удвоим полученный результат(?).

Запишем формулу объема через интеграл

$$V = \int_0^R S(x)\,dx .$$

Здесь $x = |KB|$, $S(x)$ — площадь прямоугольного треугольника KLM с катетами KL и LM и острым углом $\varphi = \angle LKM$. Поэтому

$$V = \frac{1}{2} tg\varphi \cdot \int_0^R |KL|^2 dx \text{, но } |KL|^2 = -x^2 + 2Rx \qquad (?).$$

Тогда

$$V = \frac{1}{2} tg\varphi \int_0^R (-x^2 + 2Rx)\,dx = \frac{1}{3} R^3 tg\varphi ,$$

а объем отсеченной части равен $\frac{2}{3} R^3 tg\varphi$.

Тот же результат можно получить, проводя сечения перпендикулярно (OC).

Теперь рассмотрите величину угла φ, при которой плоскость сечения пересечет и другое основание цилиндра, причем не по его диаметру. ▲

ЗАДАЧИ К §16

4.10. **Как найти объем усеченного конуса, зная радиусы его основания и высоту?**

△ Эту задачу можно решить несколькими способами.

1. Объем усеченного конуса V вычислим как разность объемов двух конусов: $V = V_2 - V_1$, где V_2 — объем большего конуса, а V_1— объем меньшего конуса. Введем следующие обозначения:

R — радиус большего основания усеченного конуса,

r — радиус меньшего основания усеченного конуса,

H — высота усеченного конуса,

h— высота меньшего конуса.

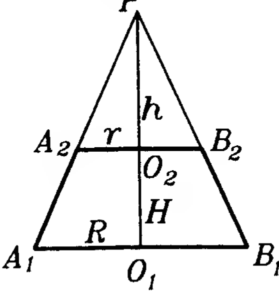


Рис.Р3.64

На рисунке Р3.64, показано осевое сечение двух конусов — большего и меньшего, а также осевое сечение усеченного конуса. Согласно принятым обозначениям,

$$O_1A_1 = R,\ O_2A_2 = r,\ O_1O_2 = H,\ PO_2 = h.$$

Запишем формулы для объемов:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi\ r^2h, \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2(H+h).$$

Тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2(H+h) - r^2h).$$

В этом равенстве нам известна величина H. Выразим ее через данные величины. Из подобия треугольников PO_1A_1 и PO_2A_2 имеем:

$$\frac{H+h}{h} = \frac{R}{r} \quad \text{или} \quad \frac{H}{h} + 1 = \frac{R}{r},$$

откуда

$$h = H : \left(\frac{R}{r} - 1\right) = \frac{Hr}{R-r}.$$

Тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot(R^2H + h\cdot(R^2 - r^2)) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\cdot\left(R^2H + \frac{Hr}{R-r}(R^2 - r^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\cdot(R^2H + Hr\cdot(R+r)) = \frac{1}{3}\pi\cdot H\cdot(R^2 + Rr + r^2).$$

2. Этот же результат можно получить иначе. Так как меньший и больший конусы подобны, то $\frac{V_1}{V_2} = k^3$, где k — коэффициент подобия. Тогда

$$V = V_2 - V_1 = V_2 - k^3V_2 = (1 - k^3)\cdot V_2.$$

Но $k = \frac{r}{R}$, значит,

$$V = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right)V_2.$$

Далее, $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot R^3(H+h)$, $\frac{h}{H+h} = k$ откуда получаем

$$h = \frac{rH}{R-r},$$

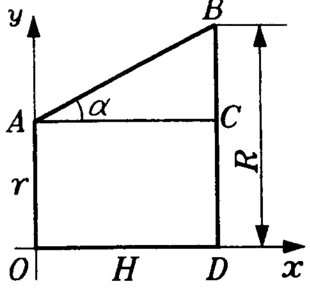


Рис.Р3.65

после чего приходим к той же формуле.

3. Наконец, можно вычислить объем усеченного конуса как объем тела вращения, используя интеграл.

Рассмотрим в системе координат трапецию $OABD$, вращением которой вокруг оси x получаем усеченный конус (рис.Р3.65). Тогда OA — радиус меньшего основания, обозначим его r, DB — радиус большего основания, обозначим его R, OD — высота конуса, которую обозначнм H .

Формула объема через интеграл для тела вращения выглядит так:

$$V = \pi \cdot \int_0^H f^2(x)\, dx\ .$$

Здесь $y = f(x)$ — выражение для функции, график которой вращается вокруг оси x , 0 и H — границы интегрирования. В нашем случае уравнение отрезка AB запишем в виде

$$y = f(x) = kx + l\,.$$

Из рисунка видно, что

$$k = tg\alpha = \frac{R-r}{H},\ l = r.$$

Тогда

$$y = \frac{R-r}{H}x + r \quad \text{и} \quad V = \pi \cdot \int_0^H \left(\frac{R-r}{H}x + r\right)^2 dx\ .$$

После соответствующих преобразований придем к той же формуле.

В заключении заметим, что цилиндр и конус можно рассматривать как частные (точнее, предельные) случаи усеченного конуса (в дальнейшем при вычислении площадей их поверхностей так и делать). Цилиндр получится, если взять $R = r$; конус получится, если взять $r = 0$. Но тогда объем цилиндра и объем конуса можно найти по формуле объема усеченного конуса.

В самом деле, для цилиндра получим:

$$V = \frac{\pi \cdot H}{3}(R^2 + R^2 + R^2) = \frac{\pi \cdot H}{3} \cdot 3R^2 = \pi \cdot R^2 H,$$

а для конуса получим:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot H(R^2 + 0 + 0) = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 H,$$

что соответствует действительности.

Однако все это рассуждение справедливо только для конуса, а для цилиндра нет. Подумайте почему. ▲

4.11. **Пусть $PABCD$ — пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной 1. $(PB) \perp (ABC)$** (рис.P3.66). **Двугранный угол при ребре PD равен 120°. Вычислить объем пирамиды.**

△ Поиск тех или иных геометрических величин, как правило, начинается с того, что выписывается нужная формула. Затем из анализа условия задачи выясняется, что в этой формуле легко найти, а что неизвестно. После этого сосредотачивают усилия на поиск неизвестной величины.

Поэтому запишем формулу для объема пирамиды $V = \frac{1}{3}SH$. S, исходя из условия, находится моментально: $S = 1$, поэтому осталось вычислить высоту пирамиды, т.е. $|PB|$ (рис.P3.66). Это вычисление можно выполнить несколькими способами, попробуйте найти их самостоятельно.

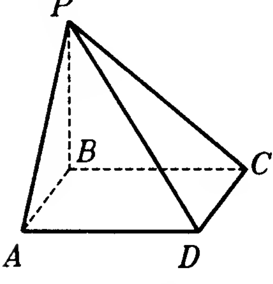


Рис.P3.66

Вспомним, что мы уже видели пирамиду, похожую на данную.

В самом деле, возьмем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 и соединим вершину B_1 с вершинами основания A, B, C, D. Полученная пирамида B_1ABCD и будет данной в условии задачи, ибо двугранный угол при ребре B_1D равен 120° (?). Но если данная пирамида — часть куба с ребром 1, то $|PB| = 1$ и ее объем равен $\frac{1}{3}$.

Ответ получен, но решения пока нет(?).

Нам нужно еще доказать, что данная пирамида действительно часть куба с ребром 1, т.е. утверждение, обратное тому, которое мы вспомнили.

Для этого воспользуемся такими соображениями:

1.Во всяком кубе двугранный угол при диагонали B_1D равен 120°.

2. Зависимость величины двугранного угла при диагонали B_1D от $|B_1B|$ строго монотонная(?). (Какая именно монотонность?)

3. Но тогда и обратная зависимость $|B_1B|$ от величины этого двугранного угла строго монотонная. Отсюда следует, что в пирамиде $PABCD$ двугранному углу при ребре PD, равному 120°, соответствует $|PB| = 1$. Что и требовалось доказать.

Эта идея реализовалась именно потому, что был дан угол 120°. При угле 119°, а тем более в общем случае, пришлось бы искать другие пути для решения задачи. ▲

4.12. **На ребрах трехграниого угла с вершиной O отложены точки A и K на одном ребре, B и L на другом ребре, C и M иа третьем ребре. Докажите, что отношеине объемов тетраэдров $OABC$ и $OKLM$ равно**

$$(OA \cdot OB \cdot OC) : (OK \cdot OL \cdot OM).$$

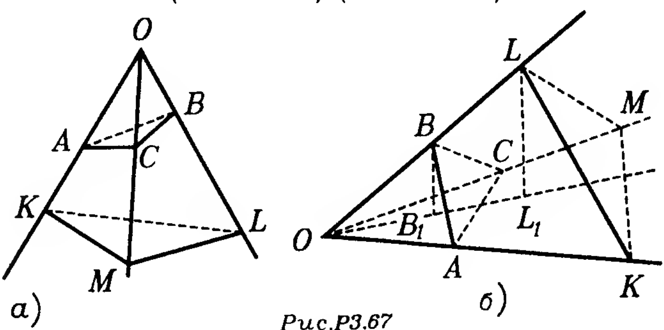


Рис.Р3.67

△ Нарисуем картинку так, чтобы основания тетраэдров не "налезали" друг на друга — это не скажется на достоверности полученного результата (рис.Р3.67*а*). Теперь можно долго смотреть на этот рисунок, но так ничего и не увидеть.

Секрет задачи в том, чтобы его "перевернуть", именно сделать основаниями тетраэдров треугольники OAC и OKM. Вот так, как на втором рисунке (рис.Р3.67*б*). На нем проведены еще высоты BB_1 и LL_1. Теперь перейдем к формулам.

$$V_{OACB} = \frac{1}{3} S_{OAC} \cdot BB_1, \quad V_{OKLM} = \frac{1}{3} S_{OKM} \cdot LL_1.$$

Далее,

$$S_{OAC} = \frac{1}{2} OA \cdot OC \cdot \sin\angle AOC,$$

$$S_{OKM} = \frac{1}{2} OK \cdot OM \cdot \sin\angle KOM,$$

$$\frac{BB_1}{LL_1} = \frac{OB}{OL}.$$

Поэтому

$$\frac{V_{OACB}}{V_{OKLM}} = \frac{OA \cdot OC}{OK \cdot OM} \cdot \frac{OB}{OL} = \frac{OA \cdot OC \cdot OB}{OK \cdot OM \cdot OL},$$

что и требовалось. ▲

4.13. **Как найти объем тетраэдра, если известно, что его основанием является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом d, боковые ребра у него равны, а угол между боковыми гранями, проходящими через катеты, равен φ?**

Рис.Р3.66

△ Найти объем тетраэдра в большинстве случаев — это найти площадь его основания и высоту. С площадью основания здесь проблем нет. Она равна $\frac{1}{2}d^2$. Чтобы найти высоту сделаем рисунок, но не торопясь, а вникнув в условие задачи. Так как боковые ребра тетраэдра равны, то равны их проекции на плоскость основания. Значит, проекция вершины тетраэдра равноудалена от вершины основания, то есть является центром окружности, описанной около основания — прямоугольного треугольника. Известно, что такой точкой является середина гипотенузы. Вот теперь можно делать рисунок (рис.Р3.68). На нем $\angle C = 90^\circ$, $AC = CB = d$. $PA = PB = PC$, Q — середина гипотенузы.

Проблема в том, чтобы найти PQ, а дан у нас еще двугранный угол между гранями PCA и PCB.

Но тогда, зная его величину φ, мы сможем найти величину угла PCA (и угла PCB, так как они равны — по теореме косинусов для трехгранного угла). Зная угол PCA при ос-

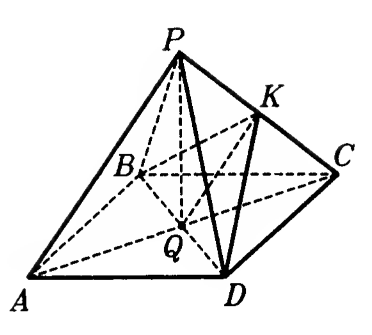


Рис.Р3.69

новании равнобедренного треугольника PAC и $AC = d$, найдем PA. Зная PA и $AQ = \frac{1}{2}AB$, найдем PQ — высоту тетраэдра. ▲

4.14. Все ребра четырехугольной пирамиды равны 1, PQ — ее высота. В каком отношении делит ее объем сечение, проходящее через: а) отрезок BD параллельно PA; б) AC перпендикулярно PD; в) Q параллельно боковой грани.

△ а) Начнем с рисунка (рис.Р3.69). Здесь BDK — данное сечение, при этом $QK \parallel AP$ (?) Задачу можно решить и "в лоб", но любопытно применить здесь результаты задачи 4.12. Тогда

$$\frac{V_{CBDK}}{V_{CBDP}} = \frac{CK \cdot CB \cdot CD}{CP \cdot CB \cdot CD} = \frac{CK}{CP} = \frac{1}{2}.$$

А так как $V_{CBDP} = \frac{1}{2}V_{PABCD}$, то $\frac{V_{CBPK}}{V_{PABCD}} = \frac{1}{4}$ и плоскость сечения делит объем данной пирамиды в отношении 1:3.

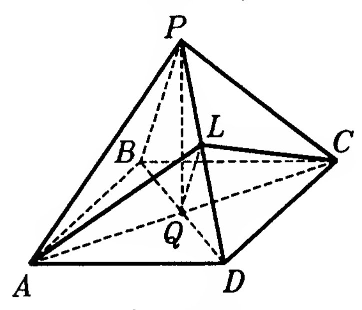


Рис.Р3.70

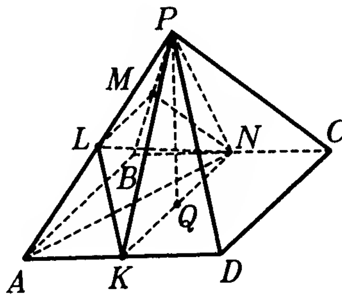


Рис.Р3.71

б) Теперь рисунок Р3.70 чуть иной. Здесь $QL \perp PD$ (?). Решение остается тем же.

$$\frac{V_{DACL}}{V_{DACP}} = \frac{DA \cdot DC \cdot DL}{DA \cdot DC \cdot DP} = \frac{DL}{DP}.$$

Из прямоугольного треугольника PQD можем записать пропорцию(?)

$$\frac{QD^2}{QP^2} = \frac{DL}{PL},$$

а так как $QD = QP$, то $DL = LP$ (разумеется, это можно получить иначе, но хотелось напомнить вам полезное соотношение в прямоугольном треугольнике), так как L — середина PD, то результат тот же, что и в пункте а).

в) Рисунок в этом случае таков (рис.Р3.71). На этом рисунке $KL \parallel PD$, $MN \parallel PC$, $LM \parallel AB$ (?). Но подключив отрезки KN, LN, AN, PN можно осуществить ту же идею

$$\frac{V_{PLMN}}{V_{PABN}} = \frac{PL \cdot PM \cdot PN}{PA \cdot PB \cdot PN} = \frac{PL}{PA} \cdot \frac{PM}{PB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

А так как

$$V_{PABN} = \frac{1}{4} V_{PABCD}, \text{ то } V_{PLMN} = \frac{1}{16} V_{PABCD}.$$

Далее,

$$\frac{V_{PLKN}}{V_{PAKN}} = \frac{PL \cdot PN \cdot PK}{PA \cdot PN \cdot PK} = \frac{PL}{PA} = \frac{1}{2}.$$

А так как

$$V_{PAKN} = \frac{1}{4} V_{PABCD},$$

то

$$V_{PLKN} = \frac{1}{8} V_{PABCD}.$$

Но тогда

$$V_{PKLMN} = \frac{3}{16} V_{PABCD},$$

а поэтому

$$V_{ABNKLM} = \frac{5}{16} V_{PABCD} \text{ (?)},$$

$$V_{PCDKNLM} = \frac{11}{16} V_{PABCD} \text{ (?)},$$

а потому отношение объемов полученных частей пирамиды равно $5:11$. ▲

4.15. Какой из тетраэдров $PABC$ имеет наибольший объем среди тетраэдров, у которых все ребра, кроме одного, равны 1?

△ Пусть в тетраэдре $PABC$ ребро PC отлично от 1, а все прочие ребра равны 1. Сделав нужный рисунок мы видим, что для нахождения высоты тетраэдра данных не хватает (рис.P3.72). В самом деле, мы можем вращать треугольник ABP вокруг AB. При этом все данные из условия не изменятся, однако положение вершины P, а затем и величина PQ будут как-то меняться. Но как — неясно.

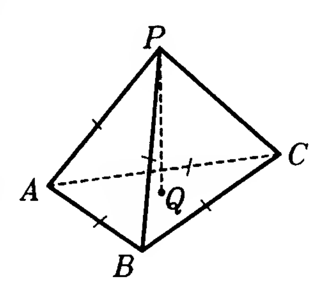


Рис.P3.72

С другой стороны, "видно", что точка P при этом вращении будет дальше всего от основания ABC тогда, когда грань PAB будет ему перпендикулярна. Вот тогда тетраэдр и будет иметь наибольший объем.

Для пущей важности можно написать такое равенство

$$PQ = PK \cdot \sin\angle PKC,$$

где PK — апофема тетраэдра в грани PAB, и так как $\sin\angle PKC \le 1$, то наибольшее значение для PQ мы получим, когда $\angle PKC = 90^\circ$.

Но результат уже и так ясен. ▲

4.16. **В правильной четырехугольной пирамиде расположены два одинаковых шара радиуса r, центры которых находятся на оси симметрии пирамиды. Один из шаров касается всех боковых граней пирамиды, а другой — основания пирамиды и первого шара. В каком положении пирамида имеет наименьший объем?**

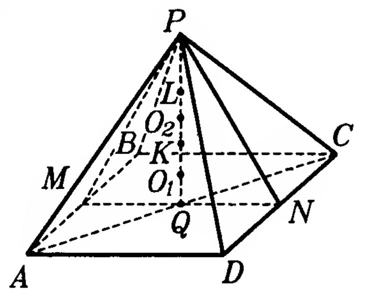


Рис.P3.73

△ Начнем с рисунка (рис.P3.73).

На нем нет шаров, а есть их центры O_1 и O_2, их точка касания K, PM и PN — апофемы пирамиды, точка L — точка сферы с центром O_2, лежащая на PQ. Поскольку точки касания шара с центром O_2 и граней PAB и PCD находятся на апофемах PM и PN (?), постольку для решения задачи важно сечение всей конфигурации плоскостью PMN. Перейдем к этому сечению (рис.P3.74).

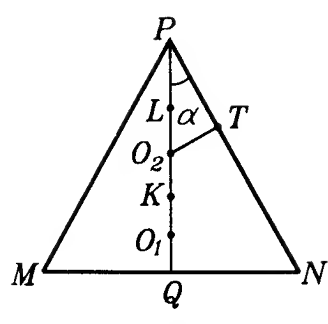


Рис.Р3.74

Точка T на этом рисунке — точка касания шара с центром O_2 с гранью PCD. Согласно условию,

$$QO_1 = O_1K = KO_2 = O_2L = \\ = O_2T = r.$$

По формуле объема пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{3}MN^2 \cdot PQ.$$

Теперь нужно ввести переменные. Одной из них выберем $PL = x$, а другой $\angle NPQ = \alpha$. (Можно было бы обойтись только алгеброй, но и с тригонометрией надо уметь работать.)

Теперь имеем

$$PQ = 4r + x,$$

$$MN = 2QN = 2PQ \cdot tg\,\alpha = 2(4r + x) \cdot tg\,\alpha. \qquad (?)$$

Тогда

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (4r + x)^2 \cdot tg^2\alpha \cdot (4r + x) = \frac{4}{3}(4r + x)^3 tg^2\alpha.$$

Переменную x "уберем" из ΔPO_2T, в котором

$$O_2T = PO_2 \cdot \sin\alpha,$$

то есть,

$$r = (r + x) \cdot \sin\alpha,$$

откуда

$$x = r\frac{1 - \sin\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тогда

$$V = \frac{4}{3}\left(4r + r\frac{1 - \sin\alpha}{\sin\alpha}\right)^3 tg^2\alpha = \frac{4}{3}r^3\left(\frac{3\sin\alpha + 1}{\sin\alpha}\right)^3 tg^2\alpha.$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{V} = \frac{(3\sin\alpha + 1)^3}{\sin^3\alpha} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{(3\sin\alpha + 1)^3}{\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha},$$

где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Ее производная

$$\tilde{V}\,' = \frac{(3sin\alpha + 1)^2}{sin^2\alpha \cdot cos^3\alpha}(3sin^2\alpha + 6sin\,\alpha - 1)\,. \qquad (?)$$

Далее,

$$\tilde{V}\,' = 0 \Leftrightarrow 3sin^2\alpha + 6sin\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow sin\,\alpha = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\,. \qquad (?)$$

Проверьте, что при таком значении α объем является, во-первых, минимальным, а, во-вторых, наименьшим.

Искомое положение нашей пирамиды должно задаваться двумя независимыми и определяющими ее параметрами. Один из них был дан — это r, а другой — α — мы указали. ▲

4.17. **В шаре радиуса R провели два параллельных сечения. Как найти объем части шара, заключенной между этими сечениями? (Часть шара, заключенная между параллельными плоскостями, называется шаровым слоем.)**

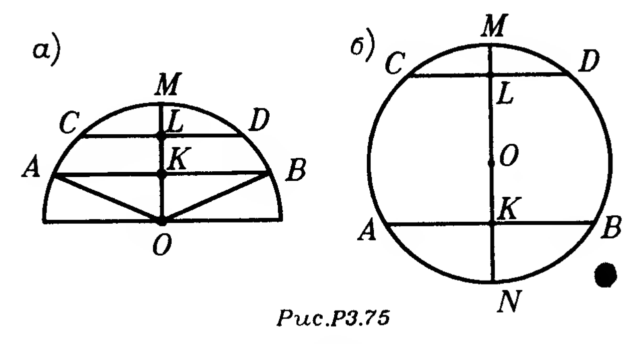


Рис.Р3.75

△ Сначала нужно увидеть возможность двух случаев расположения сечений. Первый случай — когда сечения находятся в одном полушаре, второй случай — когда нет полушара, в котором они находятся. Затем надо понять, что не нужно рисовать сам шар вместе с его сечениями. Достаточно нарисовать круг, а в нем две параллельные хорды(?).

В первом случае рассмотрим рисунок Р3.75*а*. Шаровой слой получается от вращения этой конфигурации вокруг вертикального радиуса OM. Его объем получится, если от объема шарового сектора, образованного вращением кругового сектора OAM, отнять объем шарового сегмента, образованного вращением кругового сегмента CMD, а затем еще отнять объем конуса, образованного вращением треугольника OAK.

Во втором случае рассмотрим рисунок Р3.75*б*. Ясно, что искомый объем получится, если от объема шара отнять объем

двух шаровых сегментов, полученных вращением круговых сегментов CMD и ANB вокруг диаметра MN.

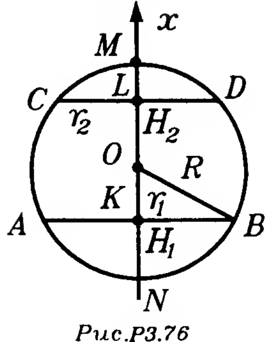


Рис.Р3.76

Но можно объем V шарового слоя получить с помощью интегральной формулы (1) п.15.2 так же, как была получена формула для объема шара в п.16.3. Как и в п.16.3 введем координату x на прямой OM, считая центр O началом координат, а координаты точек K и L полагая, соответственно, H_1 и H_2 $(H_1 < H_2)$ (рис.Р3.76). Тогда

$$V = \pi \cdot \int_{H_1}^{H_2} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \cdot R^2 (H_2 - H_1) - \frac{\pi}{3}(H_2^3 - H_1^3) =$$

$$= \frac{\pi}{6}(H_2 - H_1)(6R^2 - 2H_2^2 - 2H_1H_2 - 2H_1^2) =$$

$$= \frac{\pi}{6}(H_2 - H_1)\,(H_2^2 - 2H_1H_2 + H_1^2 + 3R^2 - 3H_2^2 +$$

$$+ 3R^2 - 3H_1^2). \qquad (1)$$

Величины r_1 и r_2, определяемые равенствами $r_1^2 = R^2 - H_1^2$ и $r_2^2 = R^2 - H_2^2$, являются радиусами "оснований" шарового слоя, а разность $H = H_2 - H_1$ является "толщиной" шарового слоя.

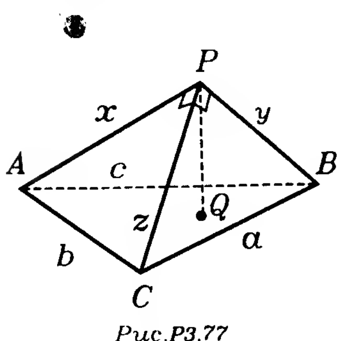


Рис.Р3.77

Преобразуя правую часть равенства (1), получим:

$$V = \frac{\pi}{6}H^3 + \frac{\pi}{2}H(r_1^2 + r_2^2).$$

Объемы каких тел выражают слагаемые в этой сумме?

▲

4.18. **Ребра основания прямоугольного тетраэдра известны. Как найти его высоту?**

△ В прямоугольном тетраэдре все плоские углы при его вершине прямые. Сделав рисунок (рис.Р3.77), мы видим, что

найти высоту PQ тетраэдра к основанию ABC, действуя "в лоб", не просто. Найти боковые ребра мы сможем, а потом что?

Надо искать другие пути, и здесь нам поможет объем. В самом деле, пусть $PA = x$, $PB = y$, $PC = z$. Тогда, с одной стороны,

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot PQ.$$

Но за основание тетраэдра можно взять любую грань, например PAC. Тогда его высотой будет BP (?), поэтому

$$V = \frac{1}{3} S_{PAC} \cdot BP = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} xzy = \frac{1}{6} xyz.$$

Из этих двух выражений для объема имеем равенство

$$\frac{1}{3} S_{ABC} \cdot PQ = \frac{1}{6} xyz.$$

Но площадь треугольника ABC по трем его сторонам a, b, c находится(?); x, y, z находятся из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \\ z^2 + x^2 = b^2. \end{cases}$$

А затем найдем и PQ. ▲

4.19. **Как найти расстояние между прямыми, проходящими через скрещивающиеся диагонали соседних граней прямоугольного параллелепипеда, в котором известны его ребра?**

△ Находить расстояние между скрещивающимися прямыми всегда непросто. И тут может помочь объем.

Пусть требуется найти расстояние между прямыми CD_1 и A_1D (рис.Р3.78). Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра, но где он — этот перпендикуляр? Поэтому вспомним, что это же расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат данные прямые (такими плоскостями у нас являются плоскости CD_1B_1 и A_1BD ?). А расстояние между параллельными плоскостями измеряется длиной

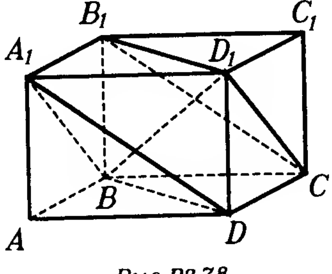


Рис.Р3.78

любого перпендикуляра, проведениого из точки одной из этих плоскостей на другую плоскость. Но этот, последний перпендикуляр можно искать как высоту некоторого тетраэдра.

Итак, будем искать расстояние от D_1 до плоскости A_1BD как высоту в тетраэдре DA_1BD_1 из вершины D_1. Тоже непросто, но мы знаем обходной маневр. Рассмотрим тот же тетраэдр, но будем считать его основанием грань A_1D_1D. Его объем находится моментально(?). А так как находится и площадь треугольника A_1BD (?), то зная объем тетраэдра D_1A_1BD, находим и нужное нам расстояние. ▲

4.20. **Как определить объем пирамиды с равными боковыми ребрами, если в основании ее лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине, равиым α, боковой стороной a, и вершина пирамиды удалена от неравной стороны основания на расстояние d?**

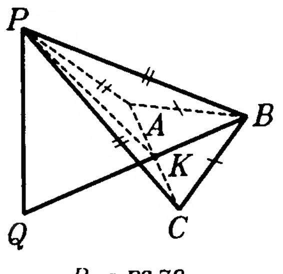


Рис.Р3.79

△ Задача кажется простой. В самом деле, площадь основания пирамиды находится прямо по формуле (?), осталось найти высоту. Тут и начинаются "маленькие тонкости". Согласно условию, вершина пирамиды равноудалена от вершин основания, значит, она проектируется в центр окружности, описанной около основания. Известно, однако, что центр такой окружности может лежать внутри треугольника, на его стороне или вне его — все зависит от величины угла α, соответственно, является он острым, прямым или тупым. Так что же — делать рисунок на каждый из этих случаев? Отнюдь! Хватит и одного рисунка, пусть это будет для случая тупоугольного треугольника (рис.Р3.79). Здесь $AB = BC = a$, $PK = d$, $\angle ABC = \alpha > \frac{\pi}{2}$, PQ — высота, $PA = PB = PC$.

Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2 \sin\alpha$. Затем находим AC (?), потом KC (?), потом PC (?). $QA = QB = QC$ как радиус R описанной около ΔABC окружности. Находим его по формуле $2R = \frac{AC}{\sin\alpha}$ (?), а потом и PQ из треугольника PQC (?).

И все эти выкладки проходят при любом положении точки Q относительно треугольника ABC. ▲

4.21. **Найдите объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и плоским углом при вершине, равным углу наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.**

△ Задача проста, но любопытна тем, что ее не сделать без тригонометрии. Рисуем пирамиду $PABC$ и ее высоту PQ (рис.Р3.80). Согласно условию $PA = PB = PC = a$ и $\angle APC = \angle PAQ$. Обозначим его через x. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad AQ = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$PQ = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot tg\, x.$$

Тогда

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} tg\, x = \frac{a^3}{12} tg\, x.$$

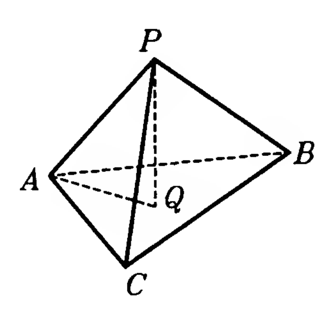


Рис.Р3.80

Для нахождения x, воспользуемся теоремой косинусов для трехгранного угла с вершиной A и ребрами AP, AQ, AC. Имеем:

$$\cos \angle PAC = \cos \angle PAQ = \cos \angle QAC,$$

то есть,

$$\cos\frac{180^\circ - x}{2} = \cos x \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{-1+\sqrt{7}}{2} \quad (?).$$

Здесь надо обязательно проверить, что найденное значение синуса меньше 1.

Дальше, зная $\sin\frac{x}{2}$, надо найти tgx. Один из путей таков: находим $\cos\frac{x}{2}$, затем $\sin x$, потом $\cos x$ и, наконец, tgx.

Можно иначе: найти $sin^2 \frac{x}{2}$, потом $cos^2 \frac{x}{2}$, потом $cos\, x$, затем $sin\, x$ и, наконец, $tg\, x$. В тригонометрии много путей...

Не всегда задачки с применением тригонометрии решаются так просто. Например, если бы было дано, что плоскому углу при вершине равен угол боковой грани с основанием, тогда как? ▲

ЗАДАЧИ К §17

4.22. **Два цилиндра имеют одинаковые объемы и площади поверхностей. Равны ли эти цилиндры?**

△ Задачи, в которых предлагается найти (вычислить) площадь поверхности, как и объем, не всегда имеют вполне самостоятельное значение. Чаще всего они сводятся к нахождению величин тех элементов фигуры, которые определяют данную в задаче фигуру однозначно — например, радиус для шара, радиус и образующую для цилиндра и т.д. Более или менее самостоятельное значение имеют задачи, где используется какая-либо "экзотическая" формула для площади поверхности. Например: 1) $S = \frac{3V}{R}$ для фигуры объемом V, описанной вокруг шара радиуса R; 2) $S = \frac{S_1}{cos\, \varphi}$ для площади боковой поверхности конуса (правильной пирамиды), у которого S_1 — площадь основания, а φ — угол между образующей (для пирамиды — боковой гранью) и основанием; 3) $S = S_{\perp} L$ для площади боковой поверхности призмы, где $S_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения призмы, а L — боковое ребро.

Интересно, однако, "повозиться" с самими формулами площадей. Такая "возня" и ожидает нас в предлагаемой задаче.

Сначала проверьте свое геометрическое воображение — какой ответ оно подсказывает вам?

А теперь перейдем к выкладкам. Цилиндр однозначно определяется радиусом основания и образующей, поэтому равенство цилиндров равносильно соответственному равенству этих его основных элементов. Итак, пусть есть два цилиндра. У первого из них обозначим радиус основания как R_1, образующую — L_1, объем — V_1 и площадь поверхности — S_1. У второго, со-

ответственно, R_2, L_2, V_2, S_2. Нам дано, что $V_1 = V_2$ и $S_1 = S_2$. Требуется выяснить, выполняется ли совместное равенство $R_1 = R_2$ и $L_1 = L_2$. Иначе говоря, следуют ли из равенств

$$\pi R_1^2 L_1 = \pi R_2^2 L_2$$

и

$$2\pi R_1 L_1 + 2\pi R_1^2 = 2\pi R_2 L_2 + 2\pi R_2^2$$

равенства $R_1 = R_2$ и $L_1 = L_2$.

Сразу ясно, число π тут не при чем, и потому уберем его из исходных равенств.

Задачу можно несколько упростить таким образом. Если мы докажем, что система уравнений

$$R^2 L = V_0 \qquad (1)$$

и

$$RL + R^2 = S_0 \qquad (2)$$

$$\left(V_0 = \frac{V}{\pi} \text{ и } S_0 = \frac{S}{2\pi}\right)$$

имеет единственное решение, то получим, что не может быть двух разных наборов значений величнн R и L, которые дадут нам нужные равенства объемов и площадей, а тогда цилиндры и получаются равными.

С системой из двух переменных (1) и (2) работаем так. Выразим из (1) L и подставим его значение в (2). Получим в итоге упрощений кубическое уравнение относительно R (?). Оно имеет такой вид: $x^3 - px + q = 0$ (при условии $p > 0$ и $q > 0$).

Можно показать(?), что такое уравнение может иметь два положительных корня, но таковые нам и нужны! (В конкретном примере можно это увидеть, взяв $V = \pi$, $S = 6\pi$ (?)).

Для нашей задачи получается, что однозначно величины R и L из системы уравнений (1) и (2) находятся не всегда, а потому цилиндры с равными объемами и площадями поверхностей не обязательно равны.

Ваше геометрическое воображение показало вам именно такой ответ? ▲

4.23. **Как вычислить площадь поверхности, полученной при вращении равнобокой трапеции с основаниями 1 и 2 и боковой стороной, равной 1, вокруг боковой стороны?**

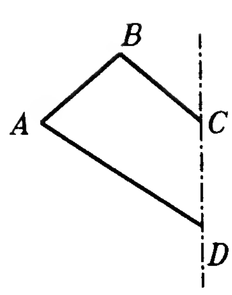


Рис.Р3.81

△ В задачах этого вида очень важен хороший рисунок. Прежде всего, для удобства, ту сторону, через которую проходит ось вращения, изобразим вертикальной.

Начинать работу надо с планиметрического рисунка и только потом, в случае необходимости, переходить к пространственному. Вот и мы начнем рисовать ту трапецию, которая, согласно условию, вращается (рис.Р3.81).

Прежде всего надо увидеть получающиеся поверхности вращения. От вращения отрезка BC, как и от вращения отрезка AD, получаются боковые поверхности конусов; отрезок CD не даст поверхности вращения, а вот что будет от вращения отрезка AB? Боковая поверхность усеченного конуса (если AB не перпендикулярно CD) или кольцо (если $AB \perp CD$)?

Вычисления показывают, что угол между AB и CD равен 60° (?). Значит, стоит рисунок сделать получше. Вот так (рис.Р3.82).

Полезно будет заметить, что $AC \perp CD$ (?). Проведем также $BK \perp CD$.

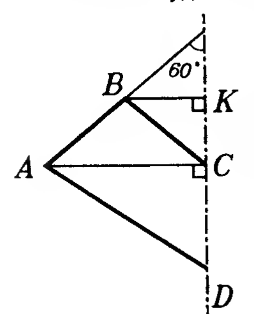


Рис.Р3.82

Теперь переходим к выкладкам. Обозначим S_{BC}, S_{AD}, S_{AB} — площади поверхностей вращения, полученных в результате вращения BC, AD, AB соответственно.

Теперь:

$$S_{AD} = \pi \cdot AC \cdot AD,$$

$$S_{BC} = \pi \cdot BK \cdot BC,$$

$$S_{AB} = \pi \cdot (AC + BK) \cdot AB.$$

AD, BC и AB известны по условию, AC и BK найти совсем несложно(?), после чего остается только арифметика. ▲

4.24. Как вычислить радиус сферы, вписанной в четырехугольную пирамиду, у которой основанием является квадрат со стороной 1, высота равна 1, а вершина проектируется в точку B?

△ Используя объем и площадь поверхности, эту задачу можно решить, не рисуя ни вписанного шара, ни даже его

центр и радиус. Нарисуем лишь пирамиду $PABCD$, у которой вершина P проектируется в точку B (рис.Р3.83). Для объема V многогранника, описанного около шара радиуса R, имеющего площадь поверхности S, есть формула, связывающая эти величины, именно

$$S = \frac{3V}{R}.$$

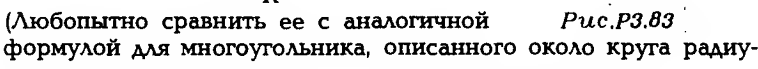


Рис.Р3.83

(Любопытно сравнить ее с аналогичной формулой для многоугольника, описанного около круга радиуса R, имеющего площадь S и периметр P: $P = \frac{2S}{R}$.)

Отсюда получим: $R = \frac{3V}{S}$.

А найти V и S в этой задаче несложно:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot PB = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3};$$

$$S = 2S_{PAB} + 2S_{PAD} + S_{ABCD} \ (?) =$$

$$= 2S_{PAB} + 2\frac{S_{ABD}}{\cos \angle PAB} + S_{ABCD} \ (?) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 1 = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}.$$

Тогда

$$R = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.$$

Но хотя вычисления и закончены, задача, увы, еще не решена. Дело в том, что формула, по которой мы нашли R, "работает" только тогда, когда в данный многогранник можно вписать шар. Вписать шар, как мы знаем, можно в любой тетраэдр и в любую правильную пирамиду — если говорить о пирамидах. А наша пирамида — ни та, ни другая. Поэтому существование вписанного шара еще надо доказать. Оно сведется к доказательству существования точки, равноудаленной от всех граней этой пирамиды, на нашу удачу несложного.

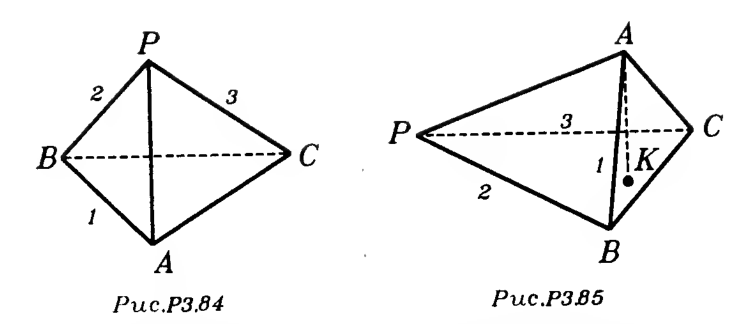


Рис.Р3.84 Рис.Р3.85

Можно, к примеру, построить биссектора двугранных углов при ребрах PB, AD и AB и увидеть нужную нам точку в их пересечении(?).

Можно построить ту же точку, взяв перпендикуляры к плоскостям PBC и PAB из центров окружностей, вписанных в эти грани, и доказав, что они пересекаются(?).

И только теперь мы можем считать задачу решенной. ▲

4.25. **В тетраэдре $PABC$ $AB=1$, $PB=2$, $PC=3$. Объем этого тетраэдра равен 1. Как найти площадь его поверхности?**

△ Сделаем рисунок (рис.Р3.84).

На первый взгляд задача кажется "не решаемой", ибо слишком мало данных. В самом деле, для нахождения площади поверхности надо бы знать площади всех граней тетраэдра, но в двух гранях известно всего по 2 элемента, а в оставшихся двух — вообще по одному. (А для площади треугольника необходимо, в общем случае, как мы знаем, три определяющих его элемента.)

Однако дан объем. Зачем? Зачем-то он ведь дан! Бывают в геометрии такие задачи, в которых численные данные позволяют уточнить форму данной фигуры. (Например, в планиметрии — треугольник со сторонами 3, 4, 5 — прямоугольный.) И здесь будет нечто похожее.

Для начала "перевернем" тетраэдр и будем считать его основанием грань PBC, а высотой — AK (рис.Р3.85).

Запишем формулу его объема

$$V = \frac{1}{3}S_{PBC}\cdot H = \frac{1}{3}S_{PBC}\cdot AK.$$

Сделаем оценки для величины в правой части

$$S_{PBC} = \frac{1}{2}PB\cdot PC\cdot \sin\angle BPC \le \frac{1}{2}PB\cdot PC = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 3.$$

$$AK = AB \cdot sin\ \varphi \leq AB = 1$$

(φ — угол между AB и плоскостью PBC, если AB не перпендикулярна этой плоскости).

Но тогда

$$V = \frac{1}{3} S_{PBC} \cdot AK \leq \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1 = 1.$$

Итак, объем не превосходит 1 и равен ей только при наибольших значениях площади основания и высоты. То есть, $S_{PBC} = 3$, значит, $\angle BPC = 90^\circ$ и $AK = AB$, значит, ребро AB перпендикулярно плоскости PBC.

После этого вычисление площади поверхности уже не геометрия, а арифметика. ▲

4.26. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найти полную поверхность пирамиды.

△ На рисунке Р3.86 $ABCD$ — ромб, PQ — высота пирамиды. Надо пояснить, однако, откуда следует, что вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей ромба (пирамида, хотя и похожа на правильную, все же таковой не является!). Получается это так. Нарисуйте сами данную пирамиду, а точку Q в ней — где угодно. В силу равенства двугранных углов при основании окажется, что точка Q равноудалена от всех сторон основания(?). Но такой точкой в ромбе является только точка пересечения диагоналей(?) или, что все равно — центр вписанной в него окружности. (Этот факт имеет место для произвольной пирамиды, у которой равны углы между плоскостями боковых граней и плоскостью основания — кроме тетраэдра. Подумайте, почему тетраэдр является исключением.)

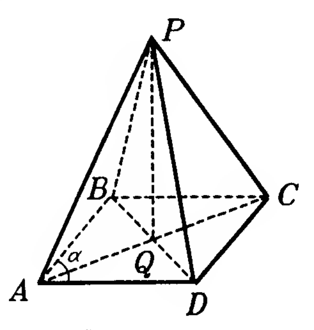


Рис.Р3.86

Дальнейшее просто:

$$S_{ABP} = \frac{S_{ABQ}}{cos\ \beta}, \quad S_{BCP} = \frac{S_{BCQ}}{cos\ \beta},$$

$$S_{CDP} = \frac{S_{CDQ}}{\cos \beta}, \; S_{DAP} = \frac{S_{DAQ}}{\cos \beta} \qquad (?).$$

Сложив эти четыре равенства, получим, что площадь боковой поверхности пирамиды S_1 вычисляется по формуле

$$S_1 = \frac{S_{ABCD}}{\cos \beta} \qquad (?).$$

А площадь ромба $ABCD$ равна $a^2 \sin \alpha$ (?). Тогда площадь поверхности пирамиды S равна

$$S_1 + S_{ABCD} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \beta} + S_{ABCD} = S_{ABCD}\left(\frac{1}{\cos \beta} + 1\right) =$$

$$= a^2 \sin \alpha \cdot \left(\frac{1}{\cos \beta} + 1\right). \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧИ К §14

Рисуем

4.1. Нарисуйте цилиндр. Нарисуйте такое его сечение, которое делит его на: а) два равновеликих цилиндра вращения; б) два равновеликих произвольных цилиндра; в) две равновеликие части, не являющиеся цилиндрами.

4.2. Нарисуйте цилиндр. Нарисуйте такое его сечение, которое отсекает от него треть объема.

4.3. Нарисуйте цилиндр. Нарисуйте цилиндр, объем которого в два раза больше объема данного цилиндра.

Планируем

4.4. На плоскости стоит цилиндрический сосуд известных размеров. В сосуд доверху налита вода. Как узнать, на какой высоте над плоскостью будет находиться ее верхний край, если сосуд укрепить на плоскости так, что диагональ его осевого сечения будет перпендикулярна плоскости?

4.5. Прямоугольник со сторонами a и b вращают вокруг: а) каждой из неравных сторон; б) осей его симметрии; в) прямых, параллельных сторонам и удаленных от него на расстоя-

ние h. Как найти отношение объемов полученных тел в каждом случае?

4.6. В единичном кубе через ребро основания проводится сечение. Как вычислить объемы полученных частей куба, если плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол φ ?

Представляем

4.7. Как разделить на две равновеликие части: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) правильную треугольную призму?

4.8. Как разделить куб на равновеликие части, если их: а) три; б) четыре; в) пять? Постарайтесь предложить как можно больше разных способов.

Решите аналогичную задачу для правильной треугольной призмы.

Оцениваем

4.9. При каком условии достигает граничных значений объем цилиндра, вписанного в: а) сферу радиуса R; б) конус с радиусом R и образующей L?

4.10. Как из усеченного конуса сделать цилиндр наибольшего объема?

4.11. Из куска картона квадратной формы делают правильную четырехугольную призму без верхней крышки. Для этого по углам куска отрезают равные квадратики и оставшуюся фигуру склеивают по линиям разрезов. Как при этой операции добиться наибольшего объема у призмы?

4.12. Основанием прямой призмы является квадрат. Призма вписана в полушар радиуса R так, что ее нижнее основание лежит в плоскости большого круга полушара, а вершины верхнего основания лежат на шаровой поверхности. При каком положении призмы ее объем является наибольшим?

4.13. Диагональ прямоугольного параллелепипеда имеет длину d и образует с двумя смежными боковыми гранями равные углы, величина которых равна α. При каком условии объем параллелепипеда будет максимальным?

4.14. При каком условии достигает граничных значений объем: а) правильной четырехугольной призмы с диагональю, равной 1; б) прямоугольного параллелепипеда, у которого одно ребро в два раза больше другого, а диагональ равна 1; в) прямоугольного параллелепипеда, у которого сумма трех измерений равна 1?

4.15. Как из шара радиусом R вырезать правильную призму с наибольшим объемом, если эта призма: а) треугольная; б) четырехугольная?

4.16. Дан полушар. В каком положении находятся в нем имеющие наибольший объем: а) прямоугольный параллелепипед; б) правильная треугольная призма; в) цилиндр?

4.17. Дан конус. В каком положении находятся в нем имеющие наибольший объем: а) прямоугольный параллелепипед; б) правильная треугольная призма; в) цилиндр?

Сделаем

4.18. Через каждое ребро куба проведена плоскость, составляющая одинаковые углы с плоскостями граней, содержащих это ребро. При этом она не проходит через его внутренние точки. Во сколько раз объем полученного многогранника больше объема куба?

Составьте аналогичную задачу для плоскостей, проходящих через вершины куба.

Исследуем

4.19. Можно ли найти объем прямоугольного параллелепипеда, зная площади: а) двух его неравных граней; б) трех его граней?

Поступаем в ВУЗ

4.20. Сфера, касающаяся нижнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его верхнего основания и делит ось цилиндра в отношении 1:6:2, считая от центра одного из оснований. Найдите объем цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии 8 друг от друга.

Ответ: $98\pi\sqrt{6}$.

4.21. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой $AB=BC=1$, $AC=\sqrt{3}$. В каком отношении объем вписанного в призму цилиндра делится плоскостью AB_1C ?

Ответ: $\sqrt{3}:2$.

4.22. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ описана около шара радиусом r. Точка M — середина бокового ребра BB_1, точка N — середина бокового ребра CC_1. В шар вписан прямой круговой цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN. Найдите объем этого цилиндра.

Ответ: $\dfrac{9\pi}{5\sqrt{10}}r^3$.

4.23. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AC=6$, $AA_1=8$. Через вершину A проведена плоскость,

пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. Найдите, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $BM = MB_1$, а AN — биссектриса угла CAC_1.

Ответ: 7:17.

4.24. Основание прямой треугольной призмы — равнобедренный треугольник, у которого стороны, равные a, образуют угол α. Диагональ грани, противолежащей этому углу, образует с другой боковой гранью угол φ. Найдите объем призмы.

Ответ: $\frac{a^3 \cdot sin0{,}5\alpha \cdot sin\alpha}{sin\varphi}\sqrt{cos(0{,}5\alpha+\varphi)\cdot cos(0{,}5\alpha-\varphi)}$.

4.25. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, имеет длину h и составляет с одним из катетов угол α. Найдите объем призмы.

Ответ: $\frac{h^3}{\sqrt{2}sin2\alpha \cdot cos0{,}5\alpha \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}-0{,}5\alpha\right)}$.

4.26. Объем прямоугольного параллелепипеда равен V. Если все его ребра увеличить на a, то его объем станет V_1, а если их укоротить на a, то объем будет равен V_2. Найти длину диагонали параллелепипеда.

Ответ: $\sqrt{\left(\frac{V_1+V_2-2V}{2a^2}\right)^2-\frac{V_1-V_2-2a^3}{a}}$.

4.27. В прямоугольном параллелепипеде точка пересечения диагоналей нижнего основания соединена с серединой бокового ребра отрезком длины m. Этот отрезок образует с основанием параллелепипеда угол α, а с боковой гранью — угол 2α. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $8m^3 sin2\alpha \cdot sin\alpha\sqrt{cos3\alpha \cdot cos\alpha}$.

4.28. Объем бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда равен 150 с м³, площадь полной поверхности равна 280 с м², периметр основания равен 40 см. Найдите размеры бруска.

Ответ: $10\left(1+\sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{10}}\right)$; $10\left(1-\sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{10}}\right)$; $\frac{7+\sqrt{19}}{2}$.

4.29. В куб с ребром a вписана правильная шестиугольная призма так, что диагональ куба проходит через центры оснований призмы и на каждой грани куба лежат по две вершины призмы. Найдите объем призмы, если сторона ее основания в 3 раза меньше ребра куба.

Ответ: $\frac{a^3(3-\sqrt{2})}{6}$.

Переключаемся

4.30. Одно полено в два раза длинее другого, но зато в два раза тоньше его. Какое из этих поленьев имеет больший объем?

4.31. а) В цилиндрическом сосуде находится жидкость. Предложите различные способы узнать, больше или меньше половины объема налито. б) В цилиндрическом сосуде была налита доверху вода. Сосуд наклонили на некоторый угол. Как узнать, какая часть воды вылилась?

4.32. В цилиндрической бочке с водой есть сливной кран. Вода из него уже не выливается. Как узнать, какая часть воды осталась в бочке?

4.33. Как узнать длину намотанной в рулон бумаги?

4.34. В стеклянный кубический сосуд надо влить воды так, чтобы ее объем составлял $\frac{2}{3}$ объема сосуда. Как это сделать, ничего не измеряя?

ЗАДАЧИ К §16

Дополняем теорию

4.35. Для наклонной призмы рассмотрим такие величины: V — объем, $S_\perp$ — площадь перпендикулярного сечения, L — боковое ребро. Докажите, что $V = S_\perp L$.

Рисуем

4.36. Нарисуйте наклонную призму, имеющую плоскость симметрии. Нарисуйте ее сечение, которое делит ее на две равновеликие части и проходит: а) через боковое ребро; б) параллельно основанию; в) как-то иначе.

4.37. Нарисуйте параллелепипед. Нарисуйте такое его сечение, которое делит его на две равновеликие части и проходит: а) через боковое ребро; б) через ребро основания; в) через диагональ грани; г) через диагональ; д) как-то иначе.

4.38. а) Нарисуйте правильный тетраэдр. Нарисуйте сечение, которое делит его на две равновеликие части. б) Решите аналогичную задачу для правильной треугольной пирамиды; в) Решите аналогичную задачу для произвольного тетраэдра.

4.39. Нарисуйте правильную четырехугольную пирамиду. Нарисуйте ее сечение, которое делит ее на две равновеликие части.

Планируем

4.40. Как найти объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ с ребром основания 2 и боковым ребром 1, если: а) боковое ребро составляет с основанием угол 45°; б) грань BCC_1B_1 — прямоугольник, плоскость которого наклонена к плоскости основания под углом 30°; в) $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60^\circ$; г) две ее боковые грани перпендикулярны основанию; д) две ее боковые грани одинаково наклонены к основанию и составляют с ним угол 60°; е) две ее боковые грани одинаково наклонены к основанию и составляют между собой угол 60°?

4.41. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани ромбы с острым углом 60° и стороной 1. Как вычислить его объем, если в вершине сходятся: а) острые углы трех ромбов; б) острый угол одного ромба и тупые углы других ромбов?

4.42. Как вычислить объем конуса, у которого: а) образующая равна 1 и составляет с основанием угол φ; б) образующая равна 2, а высота равна 1; в) образующая равна диаметру основания и равна a?

4.43. Как найти объем усеченного конуса, у которого известны: а) радиусы обоих оснований и образующая; б) радиусы обоих оснований и угол наклона образующей к плоскости основания?

4.44. Как вычислить объем тела, полученного при вращении: а) равностороннего треугольника со стороной 2 вокруг его оси симметрии; б) равностороннего треугольника со стороной 1 вокруг прямой, параллельной его оси симметрии и проходящей через его вершину; в) равнобокой трапеции с основаниями 4 и 2, углом при основании 45° вокруг ее симметрии; г) ромба со стороной 1 и острым углом 60° вокруг меньшей

диагонали; д) ромба со стороной 1 и острым углом 60° вокруг прямой, параллельной меньшей диагонали и проходящей через его вершину?

4.45. Как найти объем правильной треугольной (четырехугольной) пирамиды, у которой известны: а) сторона основания и высота; б) сторона основания и боковое ребро; в) сторона основания и двугранный угол при основании; г) боковое ребро и его угол с основанием; д) боковое ребро и двугранный угол между соседними боковыми гранями; е) высота и плоский угол при вершине?

4.46. Как вычислить объем правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$, у которой основанием является квадрат $ABCD$ со стороной 1, $PA=2$ и: а) вершина P проектируется в точку B; б) вершина P проектируется в точку C ; в) угол между PA и плоскостью ABC равен 30°; г) $PD=PC=2$; д) плоскость основания перпендикулярна граням PAD и PAB?

4.47. Как найти объем правильной усеченной треугольной (четырехугольной) пирамиды, у которой известны: а) сторона оснований и высота; б) стороны оснований и боковое ребро; в) стороны оснований и угол бокового ребра с основанием; г) стороны оснований и угол между боковой гранью и основанием?

4.48. Как найти объем тетраэдра $PABC$, у которого $AB=BC=AC=2$, $PA=3$ и: а) вершина P проектируется в точку B; б) вершина P проектируется в середину ребра BC; в) вершина P проектируется в центр основания; г) угол между PA и плоскостью ABC равен 45°; д) $\angle PAC=\angle PAB=60^\circ$; е) $PB=PC=2$.

4.49. Как найти объем тетраэдра, если известно, что: а) его основанием является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом d, боковые ребра у него равны, а угол между боковыми гранями, проходящими через катеты, равен φ; б) стороны его основания равны 1, а все боковые ребра наклонены к основанию под углом φ; в) известны его боковые ребра и углы между ними?

4.50. Как найти объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной 1 и у которой: а) боковые ребра равны 2; б) одна боковая грань перпендикулярна основанию и является равносторонним треугольником; в) две боковые грани перпендикулярны основанию, а наибольшее боковое ребро равно 2; г) три боковые ребра равны 1?

Представляем

4.51. Может ли наклонная призма с очень длинными боковыми ребрами иметь весьма малый объем?

4.52. Как одной плоскостью разбить на две равновеликие части: а) правильный тетраэдр; б) правильную четырехугольную пирамиду?

4.53. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Точка K — середина AC, точка L — середина AP, точка M — середина BP, точка N — середина BC. В каком отношении делит объем тетраэдра его сечение, проходящее через: а) PB и точку K; б) AC и точку M; в) CL и точку M; г) LM и точку N; д) KN и LM; е) AB под углом 30° к основанию?

4.54. Как разбить параллелепипед на: а) 6 равновеликих пирамид; б) 3 равновеликие пирамиды?

4.55. Как разбить одной плоскостью на равновеликие части: а) цилиндр; б) конус; в) усеченный конус; г) шар; д) шаровой сегмент; е) шаровой сектор; ж) шаровой пояс?

4.56. На какие по объему части разбивается шар единичного радиуса, если в нем провести: а) два больших круга, плоскости которых перпендикулярны; б) два больших круга, плоскости которых образуют угол φ; в) три больших круга, плоскости которых попарно перпендикулярны?

Оцениваем

4.57. Образующая конуса равна 1. а) Какой из таких конусов имеет наибольший объем? б) В каких границах находится объем такого конуса, если его высота лежит в промежутке $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$? в) В каких границах находится объем такого конуса, если его высота лежит в промежутке $(0;5;1)$?

4.58. Какой из конусов имеет наибольший объем среди конусов: а) имеющих данную площадь осевого сечения; б) имеющих данный периметр осевого сечения?

4.59. Из данного конуса с радиусом основания 1 и высотой 1 делают конус. Вершина этого конуса находится в центре основания данного, оси этих конусов лежат на одной прямой. В каком положении этот конус имеет наибольший объем?

4.60. Объем какого конуса является наибольшим и наименьшим среди конусов: а) вписанных в сферу радиуса R; б) описанных около сферы радиуса R; в) описанных около цилиндра с радиусом R и высотой H?

4.61. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом φ. Одно основание правильной треугольной призмы принадлежит основанию пирамиды, а вершины другого лежат на боковых ребрах пирамиды. Все ребра призмы равны a. Когда такая пирамида имеет наименьший объем?

4.62. В конус заданного объема вписан тетраэдр, в основании которого лежит равнобедренный треугольник. В каком положении этот тетраэдр имеет наибольший объем?

4.63. Какая из четырехугольных пирамид имеет наибольший объем среди: а) правильных пирамид, у которых боковое ребро равно 1; б) пирамид, у которых основанием является прямоугольник, одна сторона которого в два раза больше другой стороны, а боковое ребро равно 1; в) пирамид, у которых основанием является прямоугольник, а все боковые ребра равны одной из сторон этого прямоугольника и равны 1; г) правильных пирамид, разверткой которых является квадрат со стороной 2, причем всем вершинам квадрата соответствует в развертке вершина пирамиды?

4.64. В основании пирамиды квадрат со стороной 2, ее высота равна 1. Какая из следующих пирамид содержит наибольший по объему шар: а) правильная четырехугольная; б) пирамида, у которой вершина проектируется в середину ребра основания; в) пирамида, у которой вершина проектируется в вершину основания?

4.65. В правильную четырехугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом φ, вписан цилиндр (одно основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность второго его основания имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью пирамиды). Радиус основания цилиндра и его высота равны r. В каком положении пирамида имеет наименьший объем?

4.66. В конусе расположены два шара единичного радиуса, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый из шаров касается боковой поверхности конуса и другого шара. При каком условии объем конуса будет наименьшим?

4.67. В шар радиуса R вписываются тела. В каждом случае найдите в каком положении имеют наибольший объем: а) параллелепипед; б) правильная треугольная пирамида; в) правильная четырехугольная пирамида; г) правильная треугольная призма; д) цилиндр; е) усеченный конус .

Сделаем

4.68. Два прямых двугранных угла, ребра которых перпендикулярны, пересекаются так, что ребро каждого из них образует равные углы с гранями другого двугранного угла. Расстояние между ребрами двугранных углов равно a. Как найти объем многогранника, являющегося их пересечением?

4.69. Найдите внутри тетраэдра $ABCD$ точку P такую, что объемы тетраэдров $PABC$, $PACD$, $PBCD$, $PBAD$ равны.

4.70. Дан выпуклый многогранник, у которого все грани равновелики. Внутри его берется точка. Докажите, что при любом положении точки сумма расстояний от нее до плоскостей его граней одна и та же.

Исследуем

4.71. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину a. Два плоских угла при вершине пирамиды равны α, а третий плоский угол равен β. Как найти объем пирамиды?

4.72. а) Правильный тетраэдр с объемом V срезан по углам плоскостями так, что на каждой грани образовался правильный многоугольник. Как найти объем оставшегося многогранника? б) Решите аналогичную задачу для куба.

4.73. Отрезок CD длиной 1 движется по прямой, перпендикулярной прямой AB. $AB=1$. Расстояние между прямыми AB и CD равно 1. а) Меняется ли при этом движении объем тетраэдра $ABCD$? б) Ответьте на тот же вопрос, если отрезок CD вращается вокруг общего перпендикуляра AC к прямым AB и CD ?

Поступаем в ВУЗ

4.74. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость пересекает ребра A_1B_1, B_1C_1 и BC соответственно в точках M, N и P. Найдите, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $B_1M : A_1B_1 = 1:2$, $B_1N : B_1C_1 = 2:3$ и $BP:CB = 1:3$.

Ответ: 7:29.

4.75. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, равны соответственно 2, 4 и 6. Углы между ребрами, взятыми попарно, равны $\frac{\pi}{3}$. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ: $24\sqrt{2}$.

4.76. В основание прямого кругового конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен α. Определите объем конуса.

Ответ: $\dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

4.77. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол α. Вычислите объем конуса.

Ответ: $\dfrac{2\pi R^3}{3}\sin^2 2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

4.78. В прямой круговой конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен r. Прямая, соединяющая центр шара с произвольной точкой окружности основания конуса, составляет с высотой конуса острый угол α. Найдите объем конуса.

Ответ: $\dfrac{\pi\cdot r^3 tg2\alpha}{24\cos^6\alpha}$.

4.79. Найдите объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании равен 60°.

Ответ: $\dfrac{\pi\cdot a^3\sqrt{3}}{12}$.

4.80. Высота конуса равна h. Плоские углы при вершине правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в этот конус, равны α. Определите объем конуса.

Ответ: $\dfrac{\pi\cdot h^3(1-\cos\alpha)}{3\cos\alpha}$.

4.81. Вершина A правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ совпадает с вершиной конуса, вершины B и C лежат на боковой поверхности этого конуса, а вершины B_1 и C_1 — на окружности его основания. Найдите отношение объемов конуса и призмы, если $AB_1 : AB = 5$.

Ответ: $\frac{125}{18}\pi$.

4.82. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{1}{24}a^3 tg\varphi$.

4.83. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противолежащей стороной основания равно a. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{a^3}{3\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

4.84. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка D — середина ребра A_1C_1. Правильная треугольная пирамида расположена так, что плоскость ее основания совпадает с плоскостью ABC, одно боковое ребро проходит через вершину B, другое — через точку D, а третье ребро пересекает ребро CC_1. Найдите отношение объема пирамиды к объему призмы.

Ответ: 16:21.

4.85. В цилиндр вписана правильная треугольная пирамида так, что одно из ее боковых ребер есть образующая цилиндра. Найдите объем пирамиды по радиусу R основания цилиндра и по величине двугранного угла α при боковом ребре пирамиды.

Ответ: $\frac{R^3\sin^4\alpha}{3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}}$.

4.86. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с периметром $2p$ и углом α при основании. Определите объем пирамиды, если боковые грани ее наклонены к плоскости основания под углом β.

Ответ: $\frac{p^3\cos^2\alpha\cdot tg^2 0{,}5\alpha\cdot tg\beta}{12\cos^4 0{,}5\alpha}$.

4.87. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α, боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{1}{24}c^3 sin2\alpha \cdot tg\varphi$.

4.88. Прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α служит основанием пирамиды. Ее боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна основанию, а две другие боковые грани наклонены к нему под углом β. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{c^3\sqrt{2}sin^2 2\alpha \cdot tg\beta}{48cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$.

4.89. В треугольной пирамиде $PABC$ все плоские углы трехгранных углов с вершинами в точках A и B равны α, $AB = a$. Определите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{a^3}{12}\frac{sin0,5\alpha}{cos^2\alpha}\sqrt{cos^2 0,5\alpha - cos^2\alpha}$.

4.90. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно $\frac{2}{3}$. Вычислите площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

Ответ: 3.

4.91. В тетраэдре $SABC$ площадь основания ABC равна 7. Углы ABC, ASB и двугранный угол при ребре AB являются прямыми. Рассматриваются проекции тетраэдра на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB. Наибольшая из площадей таких проекций равна 14, а наименьшая — $4\sqrt{3}$. Найдите объем тетраэдра.

Ответ: $\sqrt{10,5}$.

4.92. Объем конуса равен V. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом между боковыми сторонами, равным α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{2V}{\pi} sin\alpha \cdot cos^2\alpha$.

4.93. В треугольной пирамиде $PABC$ все ребра равны друг другу. На ребре PA взята точка M такая, что $PM=MA$, на ребре PB — точка N такая, что $PN=\frac{1}{3}PB$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная медиане AD основания ABC. Найдите отношение объема треугольной пирамиды, отсекаемой от исходной проведенной плоскостью, к объему пирамиды $PABC$.

Ответ: 1:6.

4.94. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что объем пирамиды $AMKP$ равен V, где M — точка пересечения диагоналей параллелепипеда, K — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$, и P — точка пересечения медиан треугольника BCC_1.

Ответ: $72V$.

4.95. Шар радиуса R касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{R^3\sqrt{6}}{4}$.

4.96. Найдите объем правильной усеченной треугольной пирамиды, если сторона ее большего основания равна a, двугранный угол, образованный боковой гранью и плоскостью основания, равен $\frac{\pi}{6}$, а высота пирамиды равна $\frac{a}{12}$.

Ответ: $\frac{7a^3\sqrt{3}}{576}$.

4.97. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен утроенному двугранному углу

при ее основании. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H.

Ответ: $\frac{12}{7}H^3$.

4.98. Куб с ребром a расположен в правильной четырехугольной пирамиде так, что четыре его вершины лежат на боковых ребрах, а другие четыре лежат на основании пирамиды. Боковая грань пирамиды образует с основанием угол α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\dfrac{16\sqrt{2}a^3 cos^3\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{3sin2\alpha\cdot sin\alpha}$.

4.99. Основанием пирамиды служит равнобокая трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания пирамиды один и тот же угол, равный β. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{1}{6}S\cdot tg\beta\sqrt{S\cdot sin\alpha}$.

4.100. В шар радиуса R вписана четырехугольная пирамида, все боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом α. В основании пирамиды лежит прямоугольник с углом β между диагоналями. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{2}{3}R^3 sin^3 2\alpha\cdot tg\alpha\cdot sin\beta$.

4.101. В пирамиду, основанием которой служит ромб с острым углом α, вписан шар радиуса R. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\frac{4}{3}R^3\dfrac{ctg^3\frac{\beta}{3}tg\beta}{sin\alpha}$.

4.102. Длина образующей конуса равна l, угол образующей с плоскостью основания равен α. Найдите объем описанной около конуса пирамиды, основанием которой служит ромб с острым углом β.

Ответ: $\dfrac{2l^3 sin2\alpha\cdot cos\alpha}{3sin\beta}$.

4.103. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ (S — вершина) точки K и L выбраны на ребрах ES и AF соответственно так, что $EK=0{,}2ES$, $FL=0{,}5FA$. Точки R и T расположены на прямых DK и SL так, что прямая RT перпендикулярна плоскости SAD. Высота пирамиды равна 18, $RT=4$. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $75\sqrt{3}$.

4.104. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведена плоскость. Определите площадь сечения и объемы частей пирамиды, на которые она разделена сечением, зная сторону основания a и угол α , образованный плоскостью сечения с основанием.

Ответ: Площадь сечения $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cos\alpha}$, один из объемов $\frac{a^3 tg\alpha}{192}$.

4.105. Дана правильная треугольная пирамида $PABC$. Ребро PC этой пирамиды совпадает с боковым ребром правильной треугольной призмы $A_1B_1CA_2B_2P$ (A_1A_2 , B_1B_2 и CP — боковые ребра; A_1B_1C — одно из оснований). Вершины призмы A_1 и B_1 лежат в плоскости грани PAB пирамиды. Какую долю от объема всей пирамиды составляет объем ее части, лежащей внутри призмы, если отношение длины бокового ребра пирамиды к длине стороны основания пирамиды равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$?

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.106. Многогранник имеет 6 граней: $ABCK$, $EMPH$, $ABME$, $BCPM$, $CKHP$, $AKHE$. Все его вершины лежат на сфере радиуса $\sqrt{34}$. Грани $ABCK$ и $EMPH$ лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми 2. Известно, что $AB{:}CK=EM{:}PH\neq 1$, площадь грани $EMPH$ равна 5, а объем многогранника равен $\frac{98}{15}$. Найдите длину ребра BM.

Ответ: $\sqrt{8}$.

4.107. Наклонная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет своими основаниями трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Сумма площадей параллельных боковых граней призмы равна S, а расстояние меж-

ду этими гранями равно d. Найдите объем многогранника $BDA_1B_1C_1D_1$.

Ответ: $\frac{Sd}{3}$.

4.108. Около правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и углом наклона бокового ребра к плоскости основания, равным α, описан шар. Найдите его объем.

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}\pi \cdot a^3}{27 sin^3 2\alpha}$.

4.109. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида, у которой боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Объем пирамиды равен V. Найдите объем шара.

Ответ: $\frac{2\pi \cdot V}{sin^3 2\alpha \cdot tg\alpha}$.

Переключаемся

4.110. Предложите какой-нибудь способ, чтобы узнать, сколько воды налито в коническом сосуде: больше или меньше половины?

4.111. Как вычислить радиус металлического шарика, используя линейку и цилиндрическую пробирку?

4.112. В ящике, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда, находятся металлические шарики. Ящик заполнен ими доверху, его размеры во много раз больше размеров шарика. Предложите способ для приближенного подсчета числа шариков

4.113. Известно, что спелый арбуз не тонет в воде. Какие вам понадобятся данные, если вы хотите выбрать хороший арбуз, не делая в нем выреза?

4.114. Из одной и той же массы мыльной жидкости можно делать пузыри разных размеров. Как меняется их толщина при увеличении их радиуса? Попробуйте произвести некие расчеты.

4.115. Попробуйте прикинуть, какую часть от объема шара — в процентах — составляет объем его части, заключенной между его сферой и сферой, радиус которой составляет 0,9 от радиуса шара. А потом проверьте предсказанный результат вычислением.

ЗАДАЧИ К §17

Дополняем теорию

4.116. Докажите, что: а) площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на образующую; б) площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на образующую; в) площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.

4.117. Докажите, что площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна среднему арифметическому периметров оснований, умноженному на апофему.

4.118. Докажите, что площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению среднего арифметического периметров оснований на образующую.

Рисуем

4.119. Нарисуйте сечение, которое делит на две равновеликие части поверхность: а) куба; б) прямоугольного параллелепипеда; в) произвольного параллелепипеда; г) правильной треугольной пирамиды.

4.120. Нарисуйте сечение, которое делит на две равновеликие части поверхность: а) правильного тетраэдра; б) правильной треугольной пирамиды; в) правильной четырехугольной пирамиды.

4.121. Нарисуйте сечение, которое делит на две равновеликие части поверхность: а) цилиндра; б) цилиндра без верхнего основания; в) конуса; г) усеченного конуса; д) усеченного конуса без одного из оснований.

4.122. Нарисуйте сечение, которое делит на две равновеликие части поверхность: а) сферы; б) полусферы; в) сферического сегмента; г) сферического пояса.

Планируем

4.123. В призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием является правильный треугольник со стороной 1, а боковое ребро равно 2. Как вычислить площадь ее поверхности, если: а) грань AA_1C_1C — прямоугольник, плоскость которого составляет с основанием угол 60°; б) вершина B_1 проектируется в центр нижнего основания?

4.124. Как вычилить площадь поверхности правильной треугольной (четырехугольной) пирамиды, у которой: а) сторона основания равна 2, а высота равна 1; б) боковое ребро равно 3, а высота равна 2; в) боковое ребро равно 1, а угол боко-

вого ребра с основанием равен 60°; г) ребро основания равно 2, а угол боковой грани с основанием равен 45°?

4.125. Как вычислить площадь боковой поверхности правильной треугольной (четырехугольной) усеченной пирамиды, у которой известны стороны оснований и: а) боковое ребро; б) угол бокового ребра с основанием; в) угол между боковой гранью и основанием; г) высота; д) угол между соседними боковыми гранями?

4.126. Как вычислить площадь поверхности цилиндра, у которого: а) осевым сечением является квадрат со стороной 2; б) разверткой боковой поверхности является прямоугольник со сторонами 1 и 2?

4.127. Как вычислить площадь поверхности конуса, у которого: а) осевое сечение является равносторонним треугольником со стороной 2; б) разверткой боковой поверхности является четверть круга радиусом 1; в) образующая равна 1 и составляет с основанием угол φ?

4.128. Как вычислить площадь поверхности, полученной при вращении равностороннего треугольника со стороной 1 вокруг: а) высоты; б) стороны; в) прямой, проходящей через вершину и параллельной его высоте; г) прямой, параллельной его стороне и удаленной от нее на расстояние 1; д) прямой, параллельной его высоте и удаленной от нее на расстояние a?

4.129. Как вычислить площадь поверхности, полученной при вращении квадрата со стороной 1 вокруг: а) диагонали; б) прямой, проходящей через его вершину и параллельной диагонали; в) прямой, параллельной диагонали и удаленной от центра квадрата на 1?

4.130. Как вычислить площадь поверхности, полученной при вращении: а) ромба со стороной 1 и углом в 60° вокруг меньшей диагонали; б) прямоугольника со сторонами 1 и 2 вокруг диагонали; в) прямоугольной трапеции с основаниями 1 и 2 и короткой боковой стороной, равной 1, вокруг длинной боковой стороны?

4.131. Как вычислить радиус сферы, вписанной в: а) правильный тетраэдр с ребром 1; б) правильный октаэдр с ребром 1; в) правильную n-угольную призму с известными ребрами; д) треугольную пирамиду, основанием которой является равнобедренный треугольник, две стороны которого равны 1, угол между ними равен φ, высота равна 1, а вершина проектируется в середину основания равнобедренного треугольника;

е) параллелепипед, все грани которого ромбы со стороной 1 и острым углом φ при одной из вершин?

Представляем

4.132. Куб с ребром 1 разрезали на 1000 равных между собой кубиков. Попробуйте оценить "на глаз", во сколько раз общая поверхность полученных кубиков больше поверхности исходного куба.

4.133. Поверхность тела разделили плоскостью на две равновеликие части. Значит ли это, что при этом разделили пополам и объем тела, если исходным телом является: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед; в) правильная треугольная призма; г) правильный тетраэдр; д) правильная четырехугольная пирамида с равными ребрами; е) цилиндр; ж) конус; з) усеченный конус; и) шар; к) полушар? В каком случае верны обратные утверждения?

Оцениваем

4.134. Какой из прямоугольных параллелепипедов с квадратным основанием имеет наибольший объем, если: а) площадь его поверхности равна 1; б) площадь его поверхности без одного из оснований равна S ?

4.135. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Объем параллелепипеда равен V. При каком условии поверхность параллелепипеда будет наименьшей?

4.136. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 1. Какая из таких призм имеет наибольшую площадь: а) боковой поверхности; б) поверхности?

4.137. Какая из правильных треугольных призм объемом 1 имеет наибольшую и наименьшую площадь поверхности?

4.138. Объем правильной треугольной пирамиды равен 1. Какая из таких пирамид имеет наибольшую и наименьшую: а) площадь боковой поверхности; б) площадь поверхности?

4.139. а) Объем цилиндра равен V. Какой из таких цилиндров имеет наибольшую и наименьшую площадь поверхности? б) Площадь поверхности цилиндра равна S. Какой из таких цилиндров нмеет наибольший и наименьший объем? в) Объем цилиндра равен V. Какой из таких цилиндров имеет наибольшую и наименьшую площадь боковой поверхности? г) Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Какой из таких цилиндров имеет наибольший и наименьший объем?

4.140. Образующая конуса равна 1. Какой из таких конусов имеет наибольшую площадь: а) поверхности; б) боковой поверхности?

4.141. Периметр осевого сечения конуса равен 2. Какой из таких конусов имеет наибольшую площадь: а) поверхности; б) боковой поверхности?

4.142. Объем конуса равен V. Какой из таких конусов имеет наибольшую площадь: а) поверхности; б) боковой поверхности?

4.143. Конус лежит на горизонтальной плоскости, касаясь ее боковой поверхностью. Площадь основания конуса равна S_1, площадь боковой поверхности — S_2. На какой высоте над плоскостью находится наивысшая точка конуса?

Сделаем

4.144. В правильной n-угольной пирамиде все грани, включая основание, равновелики. Ее высота равна h. Как найти ее площадь поверхности и объем?

4.145. Сфера касается всех ребер правильного тетраэдра. Как узнать, какая часть площади сферы находится внутри него?

Исследуем

4.146. Как найти площадь поверхности конуса, вписанного в сферу радиуса 2, если его основание удалено от центра сферы на 1?

Поступаем в ВУЗ

4.147. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной a. Вершина A проектируется в точку пересечения медиан треугольника ABC и боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: $a^2\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}$.

4.148. В правильной треугольной пирамиде задан F — угол между высотой и боковым ребром пирамиды. Найдите отношение квадрата высоты боковой грани к боковой поверхности пирамиды.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{4}{3sin^2F}-1}$.

4.149. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол при вершине равен α. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $\dfrac{S\sqrt{2\sqrt{2}S\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}}}{12\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

4.150. Основанием пирамиды служит квадрат, две боковые грани пирамиды перпендикулярны к ее основанию, две другие образуют с основанием угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, а четыре другие — на основании пирамиды. Зная, что боковое ребро куба равно a, найдите боковую поверхность пирамиды.

Ответ: $a^2\dfrac{(1+ctg\alpha)^2(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$.

4.151. В шар радиуса R вписана пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол α. Определите полную поверхность пирамиды.

Ответ: $2\sqrt{2}R^2\cos\alpha(\sin\alpha+\sqrt{\sin^2\alpha+0{,}5\cos^2\alpha})$.

4.152. Боковые грани четырехугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а в основании пирамиды лежит ромб, одна диагональ которого в два раза длиннее другой. Найдите объем пирамиды, если известно, что площадь боковой поверхности равна 6, а среди боковых ребер есть два ребра, составляющих тупой угол.

Ответ: $\dfrac{4}{3}$.

4.153. Квадрат $ABCD$, сторона которого равна 1, служит основанием пирамиды с вершиной S. Двугранные углы, образуемые гранями ASB, BSC, CSD и DSA с основанием, относятся как числа 1, 2, 7, 2. Найдите боковую поверхность пирамиды.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4.154. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две части равного объема. Найдите отношение площадей боковых поверхностей этих частей.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$.

4.155. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед. Одна из сторон его основания равна b. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью, проходящей через данную сторону, — угол β. Найдите боковую поверхность цилиндра.

Ответ: $\frac{1}{4}\pi b^2 \frac{sin2\alpha}{cos(\alpha+\beta)cos(\alpha-\beta)}$.

4.156. Поверхность шара, вписанного в конус, боковая поверхность конуса и полная поверхность конуса образуют геометрическую прогрессию. Найдите объем конуса, если радиус вписанного в него шара равен R.

Ответ: $3\pi R^3$.

4.157. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а высота конуса равна H. Найдите объем вписанного в этот конус шара, а также площадь полной поверхности конуса.

Ответ: $\frac{2\pi H^2 tg\alpha}{cos\alpha} cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; $\pi H^3 tg^3\alpha tg^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

4.158. В правильную треугольную усеченную пирамиду с двугранным углом α при основании вписан усеченный конус. Определите боковую поверхность конуса, если апофема боковой грани пирамиды равна сумме радиусов оснований конуса, а радиус меньшего основания конуса равен r.

Ответ: $\frac{\pi \cdot r^2}{sin^4 0,5\alpha}$.

4.159. Боковая поверхность конуса с образующей a развернута в сектор, центральный угол которого равен $1,2\pi$. Найдите объем конуса.

Ответ: $\frac{12\pi \cdot a^3}{125}$.

4.160. Высота цилиндра равна высоте конуса. Боковая поверхность цилиндра относится к боковой поверхности конуса как 3:2. Кроме того, угол, составленный образующей конуса с плоскостью основания, равен α. Найдите отношение объема цилиндра к объему конуса.

Ответ: $\frac{27}{16sin^2\alpha}$.

4.161. В усеченный конус можно вписать шар. Докажите, что объем этого конуса равен произведению площади его поверхности на $\frac{1}{6}$ высоты.

4.162. Усеченный конус и правильная шестиугольная призма расположены так, что верхнее основание усеченного конуса вписано в верхнее основание призмы, а нижнее основание усеченного конуса описано около нижнего основания призмы. Известно, что высота усеченного конуса равна сумме радиусов его оснований. Найдите отношение площадей боковых поверхностей этих тел.

Ответ: 3:1.

4.163. Сфера касается всех боковых ребер правильной четырехугольной призмы и ее оснований. Найдите отношение площади поверхности сферы, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы.

Ответ: $\frac{\pi\cdot(5\sqrt{2}-6)}{7}$.

4.164. Докажите, что $\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_1}{S_2}$, где V_1 и S_1 — объем и поверхность треугольной пирамиды; V_2 и S_2 — объем и поверхность вписанного в эту пирамиду шара.

4.165. Даны правильный тетраэдр и шар, площади поверхностей которых относятся как $S:1$. Можно ли шар поместить в тетраэдр, если: а) $S=2\sqrt{3}$; б) $S=3$?

Ответ: а) да; б) нет.

4.166. В усеченный конус вписан полушар, объем которого составляет $\frac{6}{7}$ объема усеченного конуса. Найдите отношение боковой поверхности конуса к сферической поверхности полушара.

Ответ: 1 или $\frac{20}{21}$.

Переключаемся

4.167. Как вы думаете, почему иные лекарства делают в виде порошка? А другие почему-то нет.

4.168. Вам требуется выяснить, какую часть солнечной энергии принимает на себя Земля. Какие данные вам для этого потребуются ?

4.169. Два полных сферических чайника, один большой, а другой маленький, одновременно закипели, а потом стали остывать. В каком из них вода быстрее остынет?

4.170. Два мыльных пузыря площадью S слиплись в сферический пузырь. Что вы можете сказать о площади поверхности нового сферического пузыря?

4.171. а) На высоте H над Землей висит спутник. Какая часть Земли видна с него? б) На какой высоте над Землей и сколько спутников достаточно иметь, чтобы с них можно было видеть всю Землю?

4.172. Известно, что если растают все льды Гренландии, то произойдет мировая катастрофа. Не можете ли вы оценить ее масштабы?

ГЛАВА 5

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

Содержание первых четырех глав было известно и геометрам Древней Греции, хотя некоторым теоремам (например, теореме о трех перпендикулярах) мы дали современные обобщения. И доказывали эти теоремы мы, чаще всего, методами классической элементарной геометрии, хотя иногда (например, в теории объемов) мы применяли и методы современной математики — дифференциальное и интегральное исчисление.

Начиная с этой главы, мы рассказываем о таких разделах геометрии и таких ее методах, которые появились значительно позднее — в XVII-XX в.в. В этой главе пойдет речь о координатном и векторном методах, а в следующей — о методе геометрических преобразований. Эти методы геометрии нашли применение в технике и в естественных науках, прежде всего в физике, да и появились они во многом благодаря решению задач физики и техники.

§18. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

18.1. **Определение прямоугольных координат. Координатами** вообще называют числа, определяющие положение точки. Впервые вы, вероятно, услышали слово "координаты" на уроке географии, когда вам рассказывали о широте и долготе, затем координаты появились и в математике — на плоскости (рис.18.1).

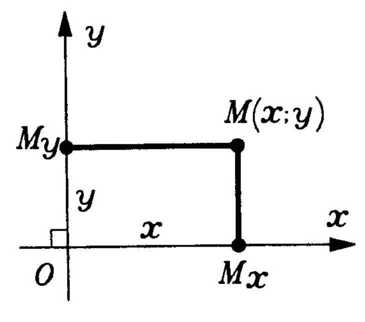


Рис.18.1

В науке и в практике пользуются разными координатами или, как говорят,

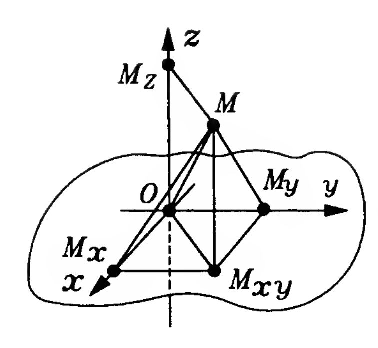


Рис.18.2

системами координат. Самые употребительные и на плоскости, и в пространстве — **прямоугольные координаты.** Их называют также **декартовыми координатами** по имени Р е н е Д е к а р т а (1596—1650) — французского ученого и философа, впервые введшего координаты в геометрии (на плоскости). Заметим, что географические координаты употреблялись раньше.

На плоскости и на других поверхностях положение точки определяется двумя координатами. В пространстве к двум координатам присоединяется третья. Декартовы координаты в пространстве определяются так.

Возьмем в пространстве три взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в одной точке O (рис.18.2). На каждой из этих прямых введем координату с началом в точке O. На одной из этих прямых координату обозначим x, на другой — y, на третьей — z. Эти прямые называют **осями координат:** ось x, ось y, ось z. Произвольной точке M пространства сопоставляются координаты следующим образом. Точка M проектируется на оси, и за ее координаты принимаются координаты ее проекций. Итак, **координата x точки M** — это координата ее проекции M_x на ось x на этой оси. Аналогично определяются координаты y и z.

Координаты точки записываются вслед за обозначением точки: $M(x;y;z)$. Нередко точку обозначают просто ее координатами: $(x;y;z)$.

18.2. **Другой способ нахождения координат точки.** Плоскости, проходящие через пары осей, называются **координатными плоскостями.** Плоскость, проходящая через оси x, y, называется плоскостью xy. Аналогично определяются плоскости xz, yz. Плоскость xy перпендикулярна оси z, и плоскости xz, yz перпендикулярны соответственно осям y, x (почему?). На каждой из этих плос-

костей определены координаты: на плоскости xy — координаты x,y; на плоскости xz — координаты x,z; на плоскости yz — координаты y,z.

Координаты x,y произвольной точки пространства являются координатами ее проекции на плоскость xy.

Действительно, пусть M — данная точка и M_{xy} — ее проекция на плоскость xy. Ее проекция на оси x по теореме о проекциях (или, что то же, о трех перпендикулярах) совпадает с проекцией M_x точки M. А это значит, что координата x точки M совпадает с координатой x ее проекции M_{xy} на плоскости xy.

То же заключение применимо к координате y.

А какой смысл здесь координаты z? По абсолютной величине она равна длине отрезка MM_{xy}, т.е. перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость xy. При этом она положительна, если M лежит с той же стороны от плоскости xy, где положительная полуось z, и отрицательна, если точка M лежит со стороны отрицательной полуоси z. (Здесь мы предполагаем, что точка M не лежит в плоскости xy; иначе, очевидно $z = 0$.)

Действительно, если M_z — проекция точки M на ось z, то отрезок MM_z перпендикулярен оси z. Точно так же отрезок $M_{xy}O$ перпендикулярен оси z, так как она перпендикулярна плоскости xy. Отрезок MM_{xy} перпендикулярен этой плоскости и, значит, параллелен оси z. Таким образом (если M не совпадает с M_z), мы имеем прямоугольник $OM_{xy}MM_z$. Поэтому $MM_{xy} = OM_z = |z|$. Точка M_z лежит с той же стороны от плоскости xy, что и точка M. Следовательно, знак, который надо приписать длине MM_{xy}, такой, как сказано.

Полученный вывод позволяет находить координаты произвольной точки M следующим образом. Находим проекцию M_{xy} точки M на плоскость xy, а затем про-

екцию M_x этой точки M_{xy} на ось x (рис.18.3). Тогда длины отрезков MM_{xy}, $M_{xy}M_x$, M_xO, взятые с должными знаками, дадут последовательно координаты z, y, x точки M. (Так же можно находить координаты, беря другие проекции, на другую координатную плоскость и на другую ось.)

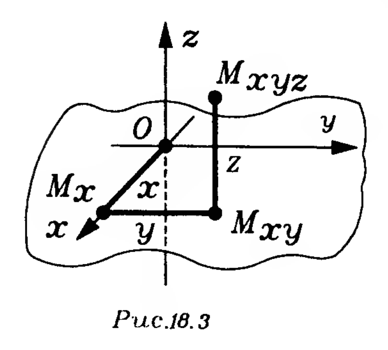


Рис.18.3

18.3. **Построение точки с данными координатами.** Проведя указанное построение в обратном порядке, можно найти точку с заранее заданными значениями координат:

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0.$$

Находим на оси x точку M_{x_0} с координатой $x = x_0$. Проводим из нее в плоскости xy перпендикуляр к оси x в сторону, соответствующую знаку y_0, на длину $|y_0|$. Из конца $M_{x_0y_0}$ этого перпендикуляра проводим перпендикуляр к плоскости xy в сторону, соответствующую знаку z_0, на длину $|z_0|$. Конец M этого перпендикуляра и будет иметь координаты x_0, y_0, z_0, как ясно из предыдущего построения.

Проведенное построение точки $M(x_0;y_0;z_0)$ показывает, что не только каждой точке отвечают определенные три координаты, но и обратно: каждой тройке чисел, взятых в определенном порядке, соответствует точка с такими координатами. (Другими словами, между точками пространства и упорядоченными тройками чисел устанавливается взаимнооднозначное соответствие.)

18.4. **Выражение расстояния между точками.**

Т е о р е м а. **В прямоугольных координатах расстояние между точками $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ выражается формулой:**

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \qquad (1)$$

Словами: **расстояние между точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей их координат.**

□ Пусть даны две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Прямая AB может быть параллельна только одной оси, так что она, допустим, не параллельна оси z. Проведем через точки A и B прямые a и b, параллельные оси z и, следовательно, перпендикулярные плоскости xy (рис.18.4). Они пересекут эту плоскость xy в точках A' и B' с координатами x_1, y_1 и x_2, y_2 (согласно п.18.2). Как известно из планиметрии, расстояние $A'B'$ равно:

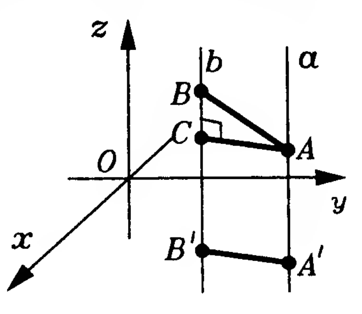


Рис.18.4

$$A'B' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad (2)$$

Если $z_1 = z_2$, то отрезки AB и $A'B'$ представляют противоположные стороны прямоугольника (или совпадают, когда точки A и B лежат на плоскости xy). В этом случае $z_1 - z_2 = 0$ и $AB = A'B'$. Таким образом, формула (2) для этого случая и дает формулу (1).

Допустим, $z_1 \neq z_2$. Параллельные прямые a и b лежат в одной плоскости. Проведем из точки A перпендикуляр AC на прямую b. Получаем прямоугольный треугольник ABC и прямоугольник $AA'B'C$. Тогда $AC = A'B'$ и $BC = |z_2 - z_1|$.

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{A'B'^2 + BC^2}.$$

Подставив сюда значение $A'B'$ из выражения (2), получим формулу (1). ■

З а м е ч а н и е. Как и равенство (2) является записью теоремы Пифагора в координатах, так и равенство (1) дает вы-

ражение пространственной теоремы Пифагора тоже в координатах.

§19. МЕТОД КООРДИНАТ

19.1. **Суть метода координат.** Через метод координат алгебра и геометрия, соединяясь и взаимодействуя, дают богатые плоды, которые они не могли бы дать, оставаясь разделенными. Применение координат и алгебраических методов к исследованию геометрических объектов и к решению геометрических задач составляет целый раздел геометрии, называемый **аналитической геометрией.**

Используя метод координат, можно решать задачи двух видов.

Во-первых, задавая фигуры уравнениями (неравенствами) и выражая в координатах различные геометрические соотношения, можно применять алгебру и математический анализ к решению геометрических задач. Так в §18 мы и начали с того, что введя прямоугольные координаты, выразили через них основную геометрическую величину — расстояние между точками. Это был первый шаг в применении метода координат.

Во-вторых, пользуясь координатами, можно истолковывать уравнения и неравенства геометрически и таким образом применять геометрию к алгебре и анализу. Графическое изображение функций — первый пример такого применения метода координат.

Метод координат уже применялся в планиметрии для задания уравнениями простейших фигур: там были выведены уравнения прямой и окружности. Напомним, *что фигура F задается на координатной плоскости xy уравнением $f(x;y)=0$, если точка $M(x_0;y_0)\in F$ тогда и только тогда, когда $f(x_0;y_0)=0$.* Например, точка $M(x;y)$ принадлежит окружности C радиуса R с центром в точке $A(a;b)$ тогда и только тогда, когда $MA = R$, т.е. тогда и только тогда, когда

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

Равенство (1) и является уравнением окружности C (рис.19.1). Заметим, что уравнение (1) является следствием формулы (2) для расстояния между точками на координатной плоскости xy.

Рис.19.1

В стереометрии также говорят, что *пространственная фигура* F *задается уравнением* $f(x;y;z)=0$, *если точка* $M(x_0;y_0;z_0)\in F$ *тогда и только тогда, когда* $f(x_0;y_0;z_0)=0$.

Аналогичные определения даются и в случае задания пространственных фигур неравенствами, а также системами уравнений и неравенств.

Например, точка $M(x;y;z)$ принадлежит сфере S с центром $A(a;b;c)$ и радиусом R тогда и только тогда, когда $MA=R$, т.е. тогда и только тогда, когда

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (2)$$

Равенство (2) является уравнением сферы S. Оно является следствием формулы (1) п.18.4 для расстояния между точками в пространстве, подобно тому, как уравнение окружности (1) было следствием формулы для расстояния между точками на плоскости.

Очевидно, что шар D, ограниченный сферой S, задается неравенством

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2, \qquad (3)$$

поскольку $M(x;y;z)\in D$ тогда и только тогда, когда $MA\le R$.

Отметим, что в частном случае, когда центром сферы S является начало координат, т.е. $a=b=c=0$, сфера S задается уравнением

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \qquad (4)$$

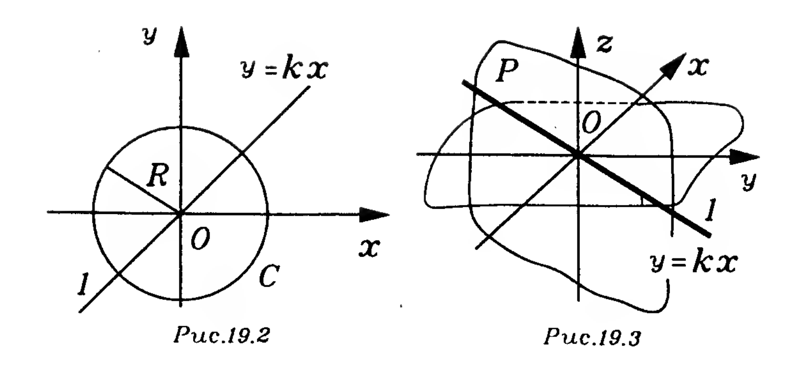


Рис.19.2 Рис.19.3

Еще один простой пример: плоскость xy задается уравнением $z = 0$. Действительно, точка $M(x; y; z)$ лежит в координатной плоскости xy тогда и только тогда, когда ее координата $z = 0$.

Аналогично, координатная плоскость xz задается уравнением $y = 0$, а координатная плоскость yz — уравнением $x = 0$.

*19.2. **Уравнения без одной или двух координат.** Последние примеры показывают, что иногда уравнение, задающее некоторую фигуру в пространстве, содержит не все переменные x, y, z. Например, плоскость xy задается уравнением $z = 0$. В этом уравнении отсутствуют переменные x и y. Наоборот, в уравнениях $y = kx$ и $x^2 + y^2 = R^2$ отсутствует переменная z. Вы знаете, что на координатной плоскости xy эти уравнения задают прямую l и окружность C (рис.19.2). А что эти уравнения задают в пространстве?

Уравнение $y = kx$ в пространстве задает плоскость P, проходящую через прямую l и перпендикулярную плоскости xy (а значит содержащую ось z, рис.19.3). А уравнение

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (5)$$

задает в пространстве бесконечный цилиндр вращения (рис.19.4). Он образован прямыми, перпендикулярными

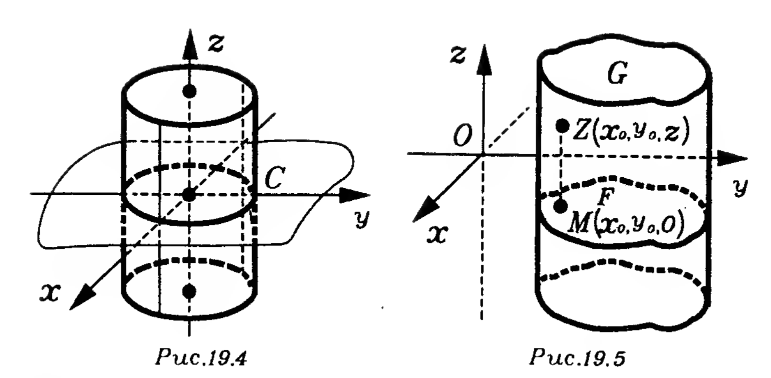


Рис.19.4 Рис.19.5

плоскости xy и пересекающими ее в точках окружности C.

Оба последних примера являются частными случаями следующего общего утверждения: *если уравнение вида $f(x;y)=0$ на координатной плоскости xy задает фигуру F, то в пространстве фигура G, заданная этим же уравнением, является бесконечным цилиндром, прямолинейные образующие которого проходят через все точки фигуры F и перпендикулярны плоскости xy.*

Действительно, точка Z с фиксированными координатами x_0, y_0 и переменной координатой z является точкой фигуры G тогда и только тогда, когда выполняется равенство $f(x_0;y_0)=0$ (рис.19.5). А это имеет место тогда и только тогда, когда точка $M(x_0;y_0;0)$ — проекция любой точки $Z(x_0;y_0;z)$ на плоскость xy — принадлежит фигуре F. Следовательно, прямая, проходящая через точку $M(x_0;y_0;0)$ перпендикулярно плоскости xy, принадлежит фигуре G, если M принадлежит F, т.е. фигура G состоит из таких прямых и, тем самым, является бесконечным цилиндром.

*19.3. **Некоторые применения метода координат.** Сначала еще раз рассмотрим задачу о взаимном расположении сферы и плоскости (см. п.4.2). Можно так выбрать систему координат, что данная плоскость станет координатной плоскостью xy, а центр рассматриваемой сфе-

ры будет расположен на оси z в точке $(0;0;d)$, $d \geq 0$ (рис.19.6). Тогда плоскость задается уравнением $z = 0$, сфера — уравнением

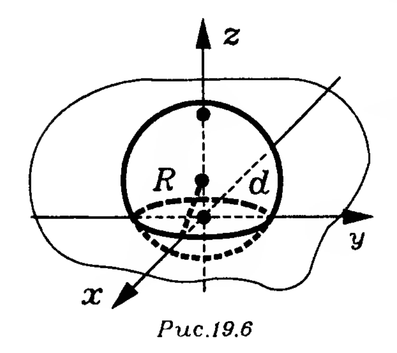


Рис.19.6

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R^2,$$

а их пересечение — системой этих уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

(поскольку координаты общих точек сферы и плоскости должны удовлетворять их обоим уравнениям). Подставляя $z = 0$ в первое уравнение системы, упрощаем ее и получаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - d^2 \\ z = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Ясно, что при $0 \leq d < R$, когда $R^2 - d^2 > 0$, эта система задает в плоскости xy окружность радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис.19.6). Если $d = R$, то $x^2 + y^2 = 0$, $z = 0$, и плоскость xy и сфера имеют единственную общую точку $(0;0;0)$, т.е. касаются в этой точке. Если же $d > R$,

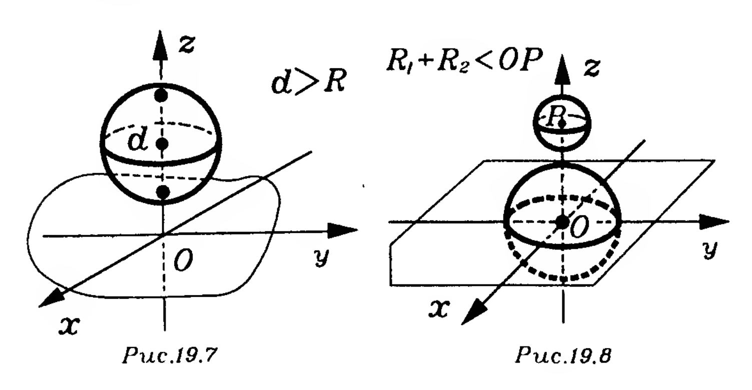


Рис.19.7 Рис.19.8

то $R^2 - d^2 < 0$ и у сферы и плоскости общих точек нет (рис.19.7).

А теперь рассмотрим более сложную задачу о взаимном расположении двух сфер S_1 и S_2, имеющих радиусы R_1 и R_2 и центры в точках O и P соответственно. Через d обозначим длину отрезка OP, т.е. расстояние между центрами сфер S_1 и S_2. Введем систему координат так, чтобы точка O была ее началом, а ось z шла через точку P в направлении вектора $\overrightarrow{OP}$ (рис.19.8). Тогда сфера S_1 задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2,$$

а сфера S_2 — уравнением

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R_2^2.$$

Будем считать, что $R_1 \geq R_2$, а также, что $d > 0$. Если $d = 0$, то сферы S_1 и S_2 либо совпадают, либо являются концентрическими.

Фигура, получающаяся в пересечении сфер S_1 и S_2, задается системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2 \\ x^2 + y^2 + (z - d)^2 = R_2^2. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2 \\ 2zd = d^2 + R_1^2 - R_2^2. \end{cases} \qquad (8)$$

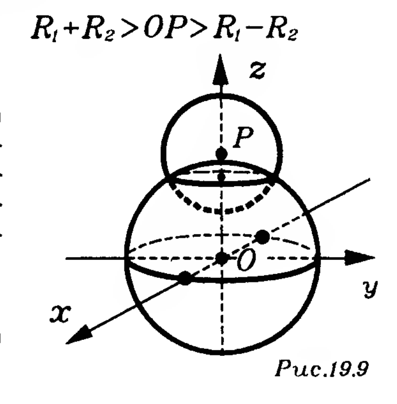


Рис.19.9

Второе уравнение системы (8) имеет вид $z = a$ и задает плоскость, перпендикулярную оси z и пересекающую ее в точке $(0;0;a)$, где

$$a = \frac{d}{2} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{2d} \geq 0. \qquad (9)$$

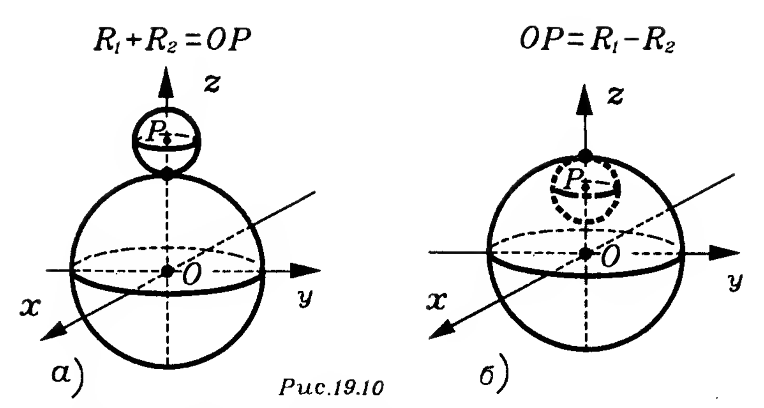


Рис.19.10

Таким образом, мы свели задачу о пересечении двух сфер к уже рассмотренной задаче о взаимном расположении сферы и плоскости. И становится ясно, что *две сферы либо пересекаются по окружности* (рис.19.9), *либо касаются внешним или внутренним образом,* (рис.19.10), *либо не имеют общих точек* (рис.19.8 и рис.19.11).

Конечно, задачу о взаимном расположении двух сфер можно решить и не применяя метод координат. Но вот пример задачи, которую обычными геометрическими средствами решить не просто.

Что представляет собой пересечение двух бесконечных одинаковых цилиндров вращения, оси которых пере-

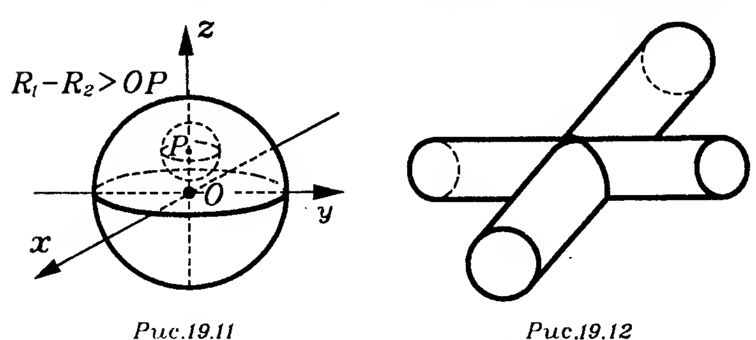


Рис.19.11 *Рис.19.12*

секаются и перпендикулярны (рис.19.12)?

Введем систему координат так, чтобы оси рассматриваемых цилиндров стали осями x и y. Тогда, как мы показали в п.19.2, эти цилиндры зададутся уравнениями

$y^2+z^2=R^2$ и $x^2+z^2=R^2$. Координаты общих точек цилиндров удовлетворяют обоим этим уравнениям, а значит, и вытекающему из них уравнению $x^2-y^2=0$. Уравнение $x^2-y^2=0$ задает пару плоскостей, пересекающихся по оси z и заданных уравнениями $y=x$ и $y=-x$ (рис.19.13).

Как было сказано в п.6.4, сечение цилиндра плоскостью является эллипсом. Поэтому два рассматриваемых цилиндра пересекаются по двум эллипсам, лежащим в плоскостях $y=x$ и $y=-x$.

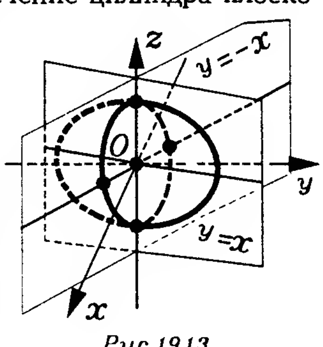


Рис.19.13

Последняя задача подсказывает, как вырезать заготовку из жести, чтобы сделать, например, "колено" у трубы (рис.19.14). Дело в том, что при развертке цилиндра его эллиптическое сечение перейдет в ... синусоиду (рис.19.15)!

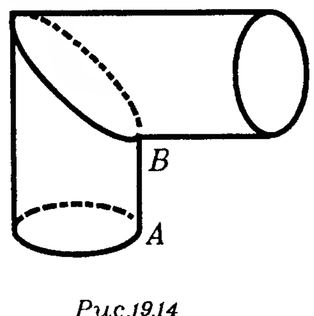


Рис.19.14

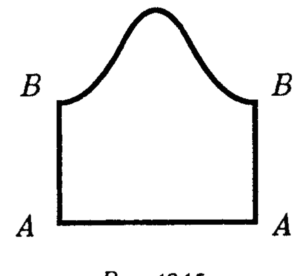


Рис.19.15

*§20. РАЗЛИЧНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом разных способов. И, решая ту или иную геометрическую и физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой данная

задача решается проще, удобнее. Рассмотрим некоторые координатные системы, отличные от прямоугольных.

20.1. **Косоугольные (аффинные) координаты.** На плоскости они определяются так.

Проведем на плоскости через данную точку O две произвольные прямые и введем на каждой из них координату, отсчитанную от точки O (масштабные отрезки на осях могут быть различной длины, рис.20.1). Обозначим эти координаты x, y и прямые назовем осями x, y, т.е. так же, как в случае прямоугольных координат, но только оси теперь не предполагаются взаимно перпендикулярными.

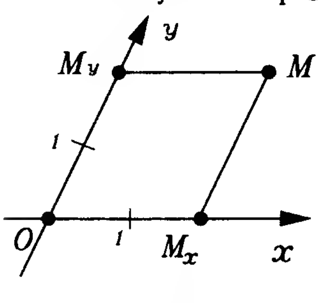


Рис.20.1

Любой точке M плоскости сопоставляем на оси x точку M_x, в которой эту ось пересекает прямая, параллельная оси y. Аналогично определяем точку M_y на оси y. Косоугольными координатами точки M называются координаты точек M_x и M_y на осях x и y.

В пространстве косоугольные координаты вводятся так. Проведем через данную точку O три произвольные прямые, не лежащие в одной плоскости, и введем на каждой из них координату, отсчитываемую от точки O. Обозначим эти координаты через x, y, z, а прямые назовем осями x, y, z.

Любой точке M пространства соответствует на оси x точка M_x, в которой эту ось пересекает плоскость, проходящая через точку M, параллельно плоскости yz, а если M лежит в плоскости yz, то полагаем $M_x = 0$. Аналогично определяем на осях y и z точки M_y и M_z. За координаты x, y, z точки M принимаются координаты точек M_x, M_y, M_z на соответствующих осях (рис.20.2). Если оси взаимно перпендикулярны, то косоугольные координаты становятся прямоугольными.

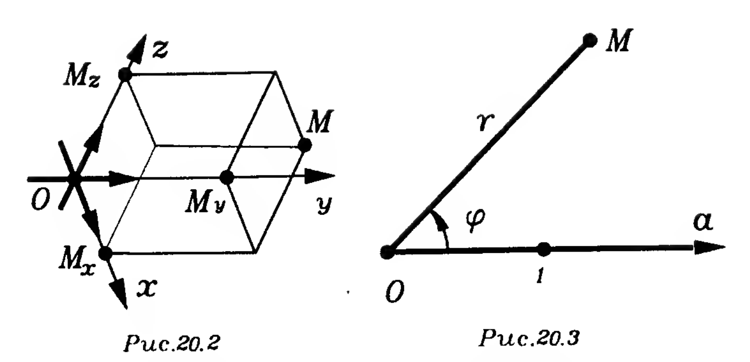


Рис.20.2 Рис.20.3

20.2. **Полярные координаты.** Возьмем на плоскости точку O и проведем из нее луч a и отметим направление отсчета углов от этого луча (рис.20.3). Каждой точке M плоскости (отличной от O) сопоставим в качестве ее координат r, φ расстояние $r = OM$ и угол φ, образованный лучом OM с лучом a. Для точки O расстояние $r = 0$, а угол φ не определен.

Такие координаты называются **полярными**; точка O называется их **полюсом**. Этими координатами особенно удобно пользоваться, когда рассматривают движение тела вокруг какого-либо центра, как, например, движение планет вокруг Солнца.

Кооординаты эти "криволинейные", потому что линии, на которых $r = \text{const}$, кривые; они окружности. В связи с этим можно задать "загадку": что представляет уравнение $x = 1$? Ответ: "Вы думали — прямую; нет — окружность... в полярных координатах ... радиус, как хочу, так и обозначаю".

Эта шутка поучительна. Она напоминает, что во-первых, обозначения условны и не нужно слишком привязываться к привычным обозначениям, а во-вторых, говоря о фигурах, задаваемых уравнениями, нужно указывать, где и какие координаты имеются в виду.

20.3. **Цилиндрические координаты.** В пространстве возьмем какую-нибудь плоскость α и введем на ней полярные координаты r, φ с центром в какой-либо точке O. Через эту точку проведем прямую $a \perp \alpha$, на ней введем координату z с нулем в точке O. Каждой точке

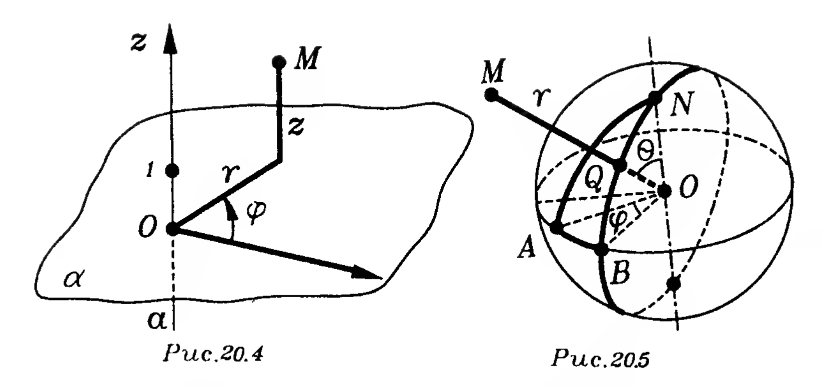


Рис.20.4

Рис.20.5

пространства сопоставляются в качестве ее координат полярные координаты r, φ ее проекции на плоскость α и координата z — ее проекции на прямую a (рис.20.4).

Координаты эти называются **цилиндрическими**, так как поверхности $r = \text{const} > 0$ представляют собой бесконечные цилиндры. Направление обхода на плоскости α и направление на оси z могут образовывать либо правый, либо левый винт. В цилиндрических координатах удобно задавать поверхности вращения.

20.4. **Сферические координаты.** На Земле вводят известные географические координаты — широту φ и долготу λ. Положение любой точки M относительно Земли можно определять тремя координатами: расстоянием $r = OM$ от центра Земли O, широтой и долготой того места на Земле, где луч OM "протыкает" поверхность Земли.

В геометрии так называемые **сферические** координаты определяют сходно, но немного иначе.

Возьмем в пространстве какую-либо точку O и опишем вокруг нее произвольную сферу S. На ней отметим какую-нибудь точку N — "Северный полюс". Большая окружность, лежащая в плоскости, которая проходит через центр O перпендикулярно (ON), будет "экватором". На ней отметим какую-нибудь точку A и направление обхода. На сфере S вводятся две координаты: полярное расстояние Θ и долгота φ. **Полярное расстояние** точки $M \in S$ — это угол между лучами ON и OM (рис.20.5).

Если точка M отлична от полюса N и диаметрально противоположной ему точки, то для определения долготы проводим через луч OM полуплоскость, ограниченную прямой ON. Проведенная полуплоскость пересечет "экватор" в некоторой точке B. Угол между лучами OA и OB, отсчитанный в указанном на "экваторе" направлении, и будет долготой точки M.

Точке M пространства сопоставляются три координаты: расстояние $r = OM$ от точки O, полярное расстояние Θ и долгота той точки φ на сфере S, где ее пересекает луч OM. Для точек прямой ON долгота не определена: она характеризуется координатой r; $\Theta = 0$ на луче ON, и $\Theta = \pi$ на противоположном луче.

20.5. **Координатная сеть.** Определяя координатами положение точки на плоскости (или на другой поверхности, например на сфере), мы во всех рассмотренных случаях задавали пару чисел — координаты точек. Но оказывается, что такое задание точки равносильно ее заданию как точки пересечения двух линий — так называемых **координатных линий.** Примерами таких координатных линий являются параллели и меридианы земной поверхности. Точка, имеющая, скажем, координатами 29° восточной долготы и 60° северной широты, лежит на пересечении соответствующих меридиана и параллели. Вся поверхность Земли оказывается покрыта двумя семействами таких линий — параллелей и меридианов. Они образуют сеть, называемую координатной **сетью**. Любая точка поверхности Земли (за исключением полюсов) является пересечением одного меридиана и одной параллели, а друг с другом две параллели (или два меридиана) не пересекаются. Задание одной координатной линии положение точки не определяет (вспомните роман Ж.Верна "Дети капитана Гранта", где путешественники, разыскивающие капитана Гранта, знали лишь, что он находится в точке, имеющей одной из координат 37° южной широты). Другой пример: назначая место встречи, вы часто говорите: "Встретимся на углу таких-то улиц". Здесь сеть улиц в городе тоже является примером координатной сети.

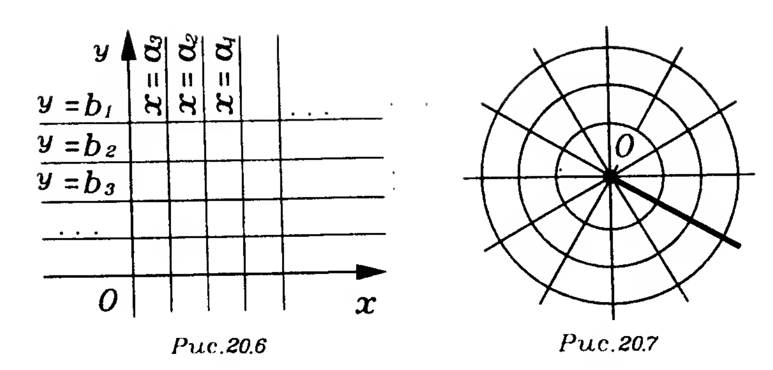


Рис.20.6 Рис.20.7

Если в прямоугольной системе координат на плоскости точка M имеет координаты a и b, то она является пересечением прямых, заданных уравнениями $x = a$ и $y = b$. Для прямоугольной системы координат сеть координатных линий состоит из прямых, перпендикулярных осям x и y. Их уравнения имеют соответственно вид $x = a$ и $y = b$ (рис.20.6).

Для полярной системы координат координатная сеть состоит из лучей, исходящих из полюса, и концентрических окружностей с центром в полюсе (рис.20.7).

Для координатных систем в пространстве координатные сети состоят из трех семейств поверхностей, на каждой из которых постоянна одна из трех координат.

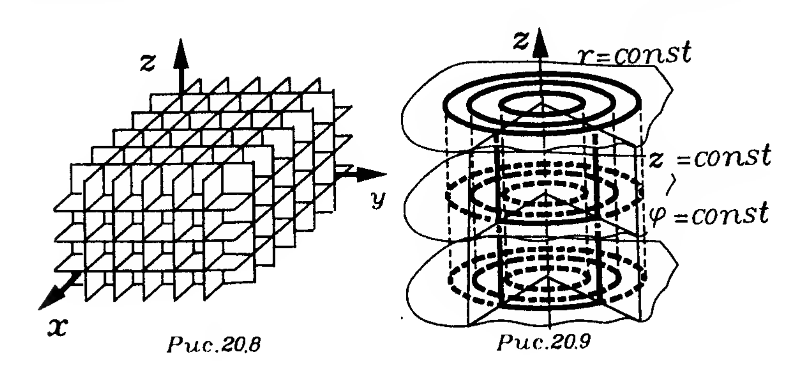


Рис.20.8 Рис.20.9

Для прямоугольной и цилиндрической систем координат координатные сети изображены на рисунках 20.8 и 20.9.

§21. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

21.1 **Векторные величины.** Понятие вектора является одним из самых важных в современной науке. Оно уже знакомо вам из курсов планиметрии и физики. Напомним, что **векторными величинами** или **векторами** называются величины, которые характеризуются не только численным значением (при выбранной единице измерения), но и направлением. Численное значение вектора называется его **модулем** или **абсолютной величиной.**

Особый случай представляет **нулевой вектор** (или короче — **нуль-вектор**) — его модуль равен нулю, а направления он не имеет.

В физике векторными величинами являются, например, сила и скорость. Примером векторной величины в геометрии может служить параллельный перенос (рис.21.1).

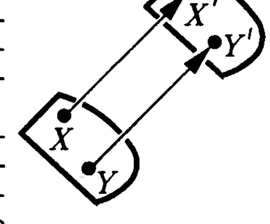


Рис.21.1

Ненулевые векторы изображаются направленными отрезками. Напомним, что **направленным отрезком** называется отрезок, у которого указан порядок концов: первый конец называется началом, второй — концом.

Направленные отрезки тоже называют векторами. Это не совсем точно: предмет и его изображение не одно и то же. Но в обыденной речи, показывая, например, слона на фотографии, говорят: "Это слон", и никто не говорит: "Это изображение слона". Поэтому, если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ изображает вектор $\boldsymbol{a}$, то пишем $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ и про направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ говорим: "Вектор $\overrightarrow{AB}$".

Нулевой вектор $\vec{0}$ изображается точкой.

Модуль ненулевого вектора $\vec{AB}$ — это длина отрезка AB.

21.2. **Параллельность (коллинеарность) и перпендикулярность (ортогональность) векторов.** Говорят, что *вектор параллелен (коллинеарен) данной прямой (или плоскости), если изображающие его направленные отрезки параллельны этой прямой (плоскости) или лежат на ней.*

Параллельность вектора $\boldsymbol{v}$ прямой a и плоскости α обозначается так: $\boldsymbol{v} \parallel a$ и $\boldsymbol{v} \parallel \alpha$.

Два вектора называются параллельными (или коллинеарными), если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой. Коллинеарные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначаются так: $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Поскольку две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны, то *два ненулевых вектора, коллинеарных третьему ненулевому вектору, коллинеарны* (рис.21.2). Это утверждение является признаком коллинеарности векторов.

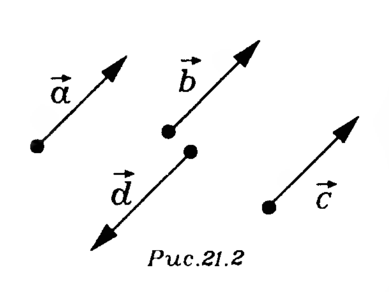


Рис.21.2

Мы будем употреблять также и выражения "вектор лежит на прямой" и "вектор лежит на плоскости" в тех случаях, когда изображающий его направленный отрезок лежит на прямой или лежит на плоскости.

Аналогично параллельности (коллинеарности) определяется и перпендикулярность (ортогональность) двух векторов, а также перпендикулярность (ортогональность) вектора прямой или плоскости.

Нулевой вектор по определению считается коллинеарным, а также и ортогональным любой прямой, любой плоскости и любому вектору.

21.3. **Сонаправленность и равенство векторов. Угол между векторами.** Ненулевые векторы $\vec{AB}$ и $\vec{MN}$ называются **сонаправленными или одинаково направленными**, если лучи AB и MN сонаправлены (рис.21.3). На-

помним, что понятие сонаправленности лучей было определено в п. 3.6. Для сонаправленных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ применяется обозначение: $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$.

Из данного определения и сонаправленности двух лучей, сонаправленных с третьим лучом (лемма 2 п.3.6), вытекает аналогичный признак сонаправленности векторов: *два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены* (рис.21.4).

О двух коллинеарных, но не сонаправленных ненулевых векторах говорят, что они **направлены противоположно** (рис.21.5). Противоположная направленность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается так:

$$\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{b}.$$

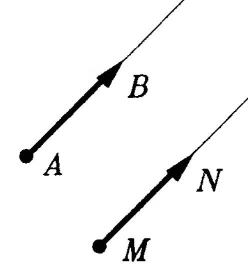


Рис.21.3

Векторы называются равными, если их длины равны и они сонаправлены. (Равенство нулевых векторов определяется лишь первым из этих условий).

Итак, равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ означает, что, во-первых,

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{MN}|$$

и, во-вторых,

$$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}$$

(рис.21.6). Второе условие проверяется лишь в случае, когда

$$|\overrightarrow{AB}| \neq 0.$$

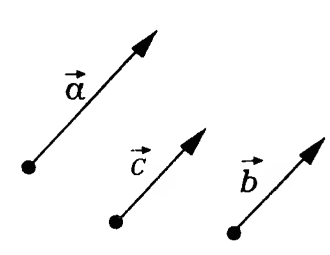


Рис.21.4

Из этого определения и сонаправленности двух векторов, сонаправленных с третьим вектором, следует, что равенство векторов обладает обычным свойством: *два вектора, равные третьему вектору, равны.*

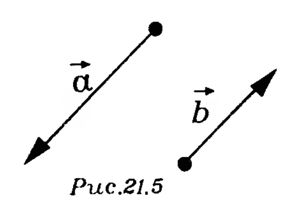


Рис.21.5

Действительно, длины у них равны, а направление у них

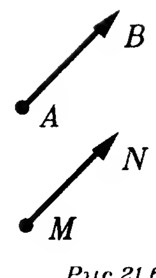


Рис.21.6

одно и то же, так как два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены.

Отложить от данной точки вектор, равный данному, значит построить направленный отрезок с началом в этой точке, изображающий данный вектор.

От любой точки в пространстве можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Действительно, пусть заданы вектор $\overrightarrow{AB}$ и некоторая точка M (рис.21.7). Тогда найдется единственная точка N такая, что $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$. Если точка M не лежит на прямой AB (рис.21.7*а*), то, построив параллелограмм $ABNM$, найдем искомую точку N. Если же точка M лежит на прямой AB (рис.21.7*б*), то на том луче прямой AB, который имеет начало в точке M и сонаправлен с лучом AB, откладываем отрезок MN, равный отрезку AB. В обоих случаях точка N единственная.

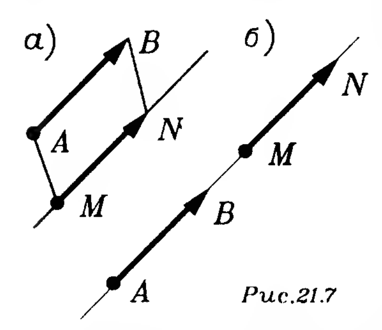


Рис.21.7

Углом между двумя ненулевыми векторами называется величина образуемого ими угла, когда они отложены от одной точки (рис.21.8).

Из леммы об углах с сонаправленными сторонами (лемма 1 п.3.6) вытекает, что *угол между векторами не зависит от выбора той точки, от которой эти векторы откладываются* (рис.21.9).

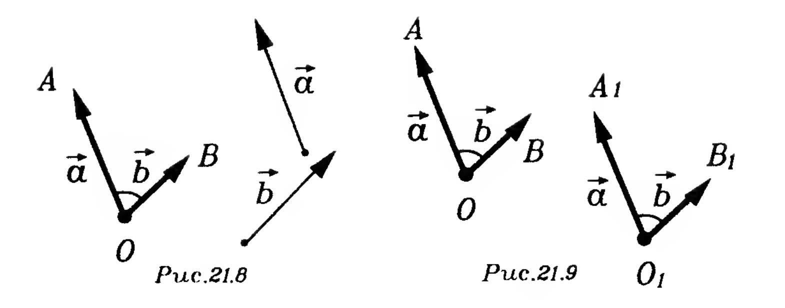


Рис.21.8 Рис.21.9

21.4. **Признаки равенства векторов.** Из определения равенства векторов непосредственно вытекает следующий первый признак равенства векторов: *если четырехугольник ABCD — параллелограмм, то* $\vec{AB} = \vec{DC}$ (рис.21.10).

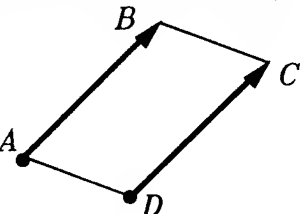


Рис.21.10

Второй признак равенства векторов мы сформулируем в виде леммы:

Лемма (о равенстве векторов). **Если** $\vec{AB}=\vec{CD}$, **то** $\vec{AC}=\vec{BD}$.

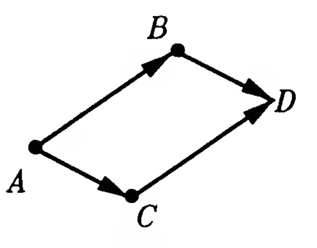
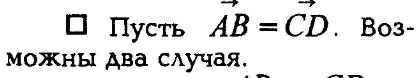


Рис.21.11


□ Пусть $\vec{AB} = \vec{CD}$. Возможны два случая.

1) Отрезки AB и CD не лежат на одной прямой (рис.21.11). Поскольку

$$\vec{AB} = \vec{CD},$$

то

$$AB = CD \text{ и } \vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}.$$

Поэтому четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. А тогда, по первому признаку равенства векторов

$$\vec{AC} = \vec{BD}.$$

2) Отрезки AB и CD лежат на одной прямой (рис.21.12). Введем на этой прямой координату x, и пусть числа x_A, x_B, x_C, x_D — координаты точек A, B, C, D.

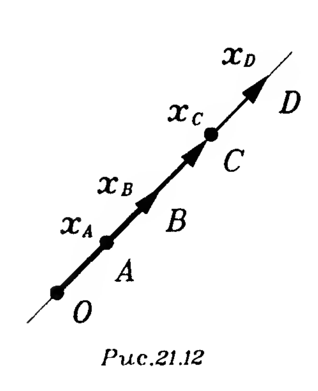


Рис.21.12

Тогда условие $\vec{AB} = \vec{CD}$ для этих координат означает, что выполняется равенство

$$x_B - x_A = x_D - x_C \qquad (1)$$

(равенство модулей чисел $x_B - x_A$ и $x_D - x_C$ означает, что $AB = CD$, а совпадение их знаков — сонаправленность векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$). Но из (1) следует

$$x_C - x_A = x_D - x_B, \qquad (2)$$

а это и означает, что $\vec{AC} = \vec{BD}$. ■

*21.5. **Радиус-вектор.** Следя за удаленным движущимся телом — скажем, за самолетом или спутником, направляют на него луч зрения или луч прожектора, луч радара. От места наблюдения O до тела M как бы протягивается направленный отрезок — вектор $\vec{OM}$. Он следит за движением тела: тело движется и соответственно изменяется вектор $\vec{OM}$ (рис.21.13). Считая тело концом вектора, мы пренебрегаем его размерами и принимаем тело за точку — за материальную точку, как говорят в физике. Это может быть допустимым, если тело достаточно мало в сравнении с расстоянием от него. Каждому положению какого угодно тела будет соответствовать направленный к нему вектор.

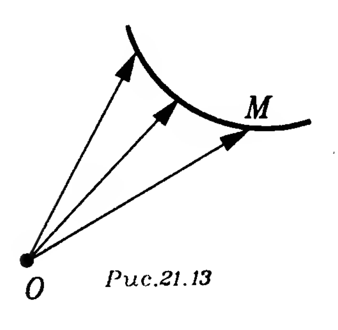


Рис.21.13

С точки зрения геометрии, сказанное выше означает следующее. Выберем какую-либо точку O и назовем ее началом. Каждой точке M соответствует вектор $\overrightarrow{OM}$ (рис.21.14). Он называется **радиус-вектором точки M.**

Обратно, если задан какой-либо вектор $\boldsymbol{a}$, то, отложив его от точки O, получим точку A — конец вектора $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$. Вектор $\boldsymbol{a}$, отложенный от начала O, является радиус-вектором точки A.

Таким образом, при выбранном начале O каждой точке M отвечает радиус-вектор — вектор с началом O и концом в точке M. Обратно: каждому вектору соответствует точка, радиус-вектор которой равен данному вектору.

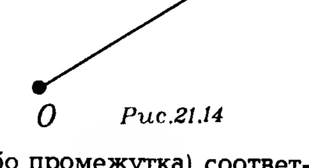


Рис.21.14

Представим себе, что точка движется так, что каждому моменту времени t (из какого-либо промежутка) соответствует ее определенное положение $M(t)$ и, стало быть, радиус-вектор $\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$. Движение точки можно описывать, указывая, как зависит от времени, как изменяется ее радиус-вектор. Так и поступают в теоретической механике, в физике, в астрономии: например, движение планеты вокруг Солнца описывают с помощью радиус-вектора, проведенного от Солнца к планете — из центра Солнца в центр планеты (рис.21.15).

В геометрии изучают произвольные кривые линии, представляя линию как след — траекторию движения точки. Соответственно, линию задают радиус-вектором $\boldsymbol{r}(t)$ ее точки в зависимости от какой-то вспомогательной переменной — параметра — t, то есть, как функцию параметра t.

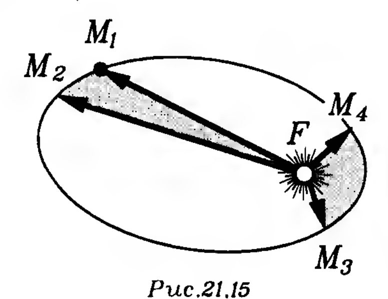


Рис.21.15

§22. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ

22.1. **Сложение и вычитание векторов.** Как и в планиметрии, **сумму двух векторов** можно найти по правилу треугольника (рис.22.1). Если даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то вектор $\boldsymbol{a}$ откладываем от любой точки A: $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$. Затем от его конца — точки B — откладываем вектор B: $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$. Суммой $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$.

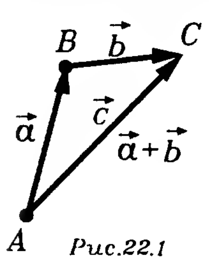


Рис.22.1

Полученный результат не зависит от выбора точки A. А именно, если взять другую точку A_1 и отложить векторы $\overrightarrow{A_1B_1} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{B_1C_1} = \boldsymbol{b}$, то в результате получим вектор $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$ (рис.22.2).

Действительно, так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, то по лемме о равенстве векторов, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$. Аналогично, из равенства $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ вытекает, что $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. И, снова применяя лемму о равенстве векторов, получаем, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. ■

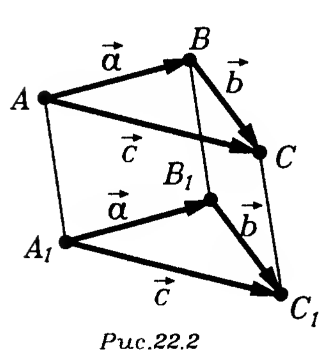


Рис.22.2

Для непараллельных (неколлинеарных) векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ их сумму можно получить не только по правилу треугольника, но и по правилу параллелограмма. Согласно этому правилу, надо отложить эти векторы от одной точки: $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ (рис.22.3), затем построить на отрезках OA и OB параллелограмм

$OACB$. Вектор $\overrightarrow{OC}$ и будет суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Рис.22.3

Свойства операции сложения векторов в стереометрии те же самые, что и в планиметрии, и доказываются они точно так же, как в планиметрии. Перечислим эти свойства, сопровождая их рисунками, из которых ясно, как они доказываются.

1. Переместительное свойство или коммутативность:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

для любых векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ (рис.22.4).

Рис.22.4

2. Сочетательное свойство или ассоциативность:

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (рис.22.5).

3. Свойство нуль-вектора:

$$\mathbf{a} + \vec{0} = \mathbf{a}$$

для любого вектора $\mathbf{a}$.

4. Существование и единственность противоположного вектора: *для каждого вектора* $\mathbf{a}$ *существует и притом единственный противоположный ему вектор* $-\mathbf{a}$, *такой, что*

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \vec{0}$$

(рис.22.6).

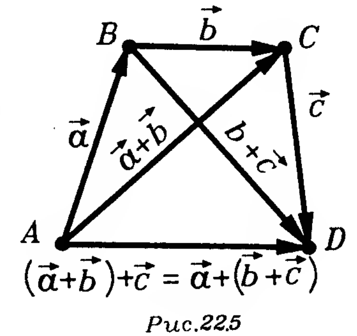


Рис.22.5

Вычитание векторов — это операция, обратная сложению векторов. Вычесть из

вектора $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b}$ — значит, найти такой вектор $\boldsymbol{c}$, который в сумме с вектором $\boldsymbol{b}$ даст вектор $\boldsymbol{a}$ (рис.22.7).

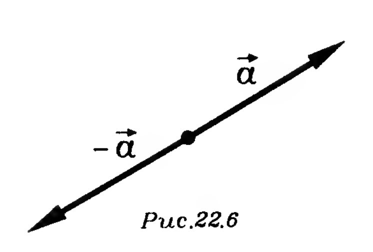


Рис.22.6

Чтобы вычесть из вектора $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b}$, можно к вектору $\boldsymbol{a}$ прибавить вектор $-\boldsymbol{b}$ (рис.22.8).

По правилу параллелограмма сумма двух неколлинеарных векторов представляется диагональю параллелограмма (рис.22.3), построенного на данных векторах, отложенных от одной точки.

Аналогично, вектор $\overrightarrow{AC_1}$, направленный по диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, равен сумме трех векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$, направленных по ребрам параллелепипеда, идущих из точки A (рис.22.9), т.е.

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}. \qquad (3)$$

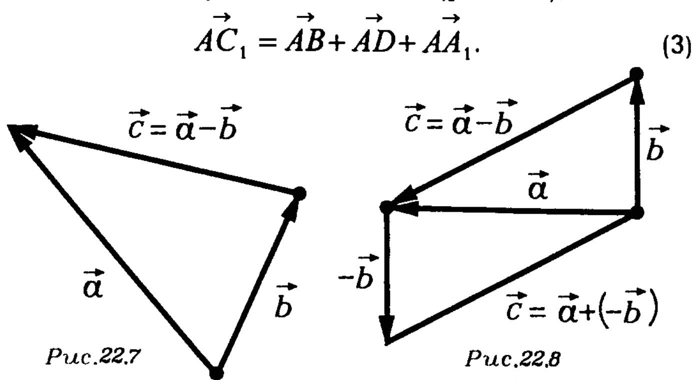


Рис.22.7 *Рис.22.8*

Действительно, по правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ и } \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Поэтому справедливо (3). ■

Взяв любые три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, непараллельные одной плоскости, и отложив их от одной точки A, мы можем построить параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ такой, что

$$\vec{AB} = \boldsymbol{a},\ \vec{AD} = \boldsymbol{b},\ \vec{AA_1} = \boldsymbol{c}$$

(говорят, что этот параллелепипед построен на векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$). Тогда сумма векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ представляется диагональю AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, т.е.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \vec{AC_1}. \qquad (4)$$

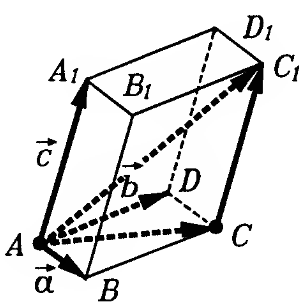


Рис.22.9

Векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ называются **компланарными**, если найдется некоторая плоскость, которой параллельны эти векторы. Если же такой плоскости не существует, то векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ называются **некомпланарными**. *Любые два вектора всегда компланарны* (объясните, почему, рис.22.10). Три вектора, направленные вдоль ребер параллелепипеда, идущих из одной вершины, некомпланарны.

22.2. **Разложение вектора на составляющие.** Самолет пошел на посадку (рис.22.11). Его перемещение состоит из двух составляющих: вертикальной и горизонтальной. Первая из них показывает насколько снизился самолет, вторая — насколько и в каком направлении он переместился над землей за время снижения.

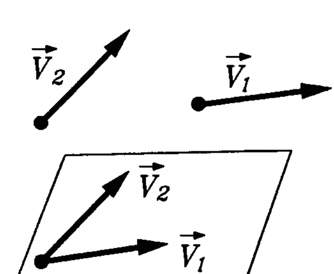


Рис.22.10

Вес груза, висящего на треноге, разлагается вдоль ног треноги на три составляющие (рис.22.12). Вес тела на наклонной плоскости разлагается на давление на плоскость и "скатывающую силу" вдоль плоскости (рис.22.13).

Те векторы, сумма которых равна данному вектору, называются **составляющими** этого вектора. Он "составляется" из них, как сумма из слагаемых, и разлагается на

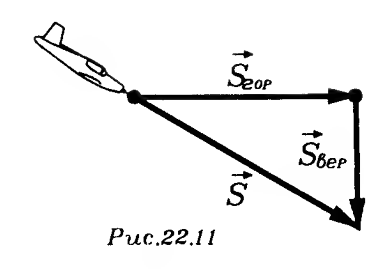


Рис.22.11

них, как на слагаемые. Поэтому и говорят о разложении вектора на составляющие. Следует выделить три случая.

1) Разложение вектора в плоскости. *Каждый вектор в плоскости разлагается, и притом единственным образом, на составляющие, коллинеарные двум данным пересекающимся прямым.*

☐ Пусть заданы две прямые a и b, пересекающиеся

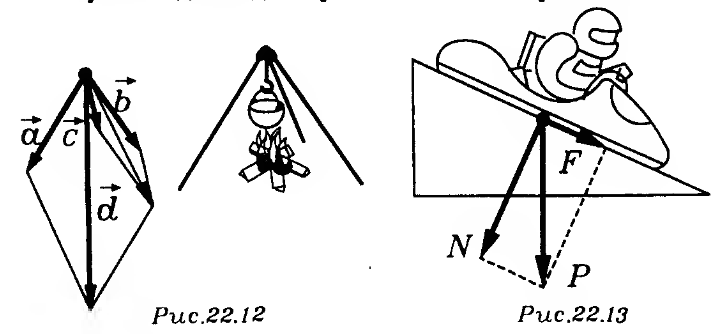


Рис.22.12 Рис.22.13

в точке O, и вектор $\mathbf{v}$. Отложим вектор $\mathbf{v}$ от точки O. Получим вектор $\overrightarrow{OV} = \mathbf{v}$ (рис.22.14). В общем случае вектор $\overrightarrow{OV}$ не лежит ни на одной из прямых a или b. Тогда проведем через точку V параллельные им прямые. Вместе с прямыми a, b они ограничат параллелограмм $OAVB$ с диагональю OV. По правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

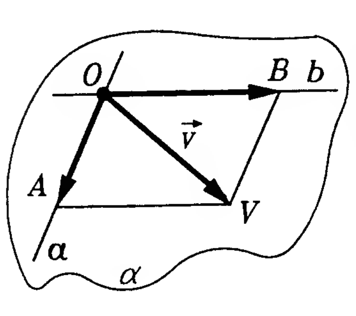


Рис.22.14

Векторы $\mathbf{v}_a = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{v}_b = \overrightarrow{OB}$ и

есть составляющие вектора $\mathbf{v}$, лежащие на прямых a и b. (В дальнейшем говорим короче: составляющие по прямым a и b).

Если вектор $\overrightarrow{OV}$ лежит на одной из прямых a или b, то его составляющая по этой прямой — это он сам. А по другой прямой его составляющая равна нулю.

Итак, возможность разложения вектора $\mathbf{v}$ по прямым a и b доказана. Докажем единственность такого разложения.

Допустим, что имеются два разложения:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b.$$

Тогда $\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b$, а потому

$$\mathbf{v}_a - \mathbf{u}_a = \mathbf{u}_b - \mathbf{v}_b. \qquad (5)$$

Вектор $\mathbf{v}_a - \mathbf{u}_a$ коллинеарен прямой a, а вектор $\mathbf{u}_b - \mathbf{v}_b$ коллинеарен прямой b. Поэтому равенство (5) возможно лишь в том случае, когда $\mathbf{v}_a - \mathbf{u}_a = \vec{0}$ и $\mathbf{u}_b - \mathbf{v}_b = \vec{0}$. Поэтому $\mathbf{u}_a = \mathbf{v}_a$ и $\mathbf{u}_b = \mathbf{v}_b$. Значит, два разложения вектора $\mathbf{v}$ совпадают, а двух различных разложений быть не может. ■

2) Разложение вектора по прямой и плоскости. Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая a. Возьмем какой-либо вектор $\mathbf{v}$ и отложим его от точки пересечения прямой a плоскостью α — точки O: $\overrightarrow{OV} = \mathbf{v}$ (рис.22.15). Пусть точка A— проекция точки V в направлении прямой a на плоскость α. Тогда

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AV}, \qquad (6)$$

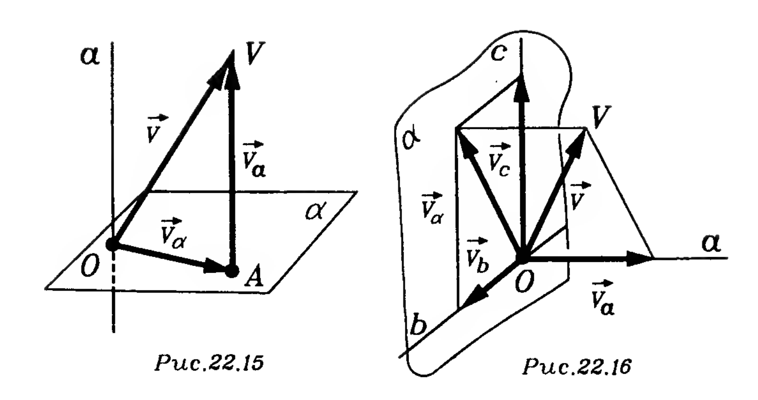


Рис.22.15 Рис.22.16

причем, $\overrightarrow{OA} \parallel \alpha$ и $\overrightarrow{AV} \parallel a$. Поэтому векторы $\mathbf{v}_a = \overrightarrow{AV}$ и $\mathbf{v}_\alpha = \overrightarrow{OA}$ являются составляющими вектора $\mathbf{v}$ по прямой a и плоскости α. Единственность этого разложения доказывается аналогично доказательству единственности разложения в случае 1). Проведите это доказательство самостоятельно.

3) Разложение вектора по трем прямым. *Каждый вектор допускает, и притом единственное, разложение на составляющие, не коллинеарные трем данным прямым, не параллельным одной плоскости.*

□ Возьмем три прямые a, b, c, пересекающиеся в точке O и не лежащие в одной плоскости. Отложим от точки O данный вектор $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$ (рис.22.16). Приняв плоскость, проходящую через прямые b и c, за плоскость α, разложим вектор $\mathbf{v}$ по прямой a и плоскости α: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_\alpha$. Составляющую $\mathbf{v}_\alpha$ разложим по прямым b и c. Получим $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_b + \mathbf{v}_c$. А тогда

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b + \mathbf{v}_c, \qquad (7)$$

т.е. получено искомое разложение вектора $\mathbf{v}$ по прямым a, b, c.

Единственность разложения вектора по трем прямым доказывается так. Допустим, имеются два разложения вектора $\mathbf{v}$ по трем прямым a, b, c:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b + \mathbf{v}_c \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'_a + \mathbf{v}'_b + \mathbf{v}'_c.$$

Тогда векторы $\mathbf{v}_b + \mathbf{v}_c$ и $\mathbf{v}'_b + \mathbf{v}'_c$ параллельны плоскости α. А тогда, согласно единственности разложения в случае 2), $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a$ и $\mathbf{v}_b + \mathbf{v}_c = \mathbf{v}'_b + \mathbf{v}'_c$. Но тогда, согласно единственности разложения вектора в плоскости по двум прямым, имеем, что $\mathbf{v}_b = \mathbf{v}'_b$ и $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}'_c$. Единственность разложения вектора по трем прямым доказана. ■

Разложение вектора по трем прямым не сводится к его разложению по двум прямым лишь тогда, когда точка V не лежит ни в одной из плоскостей, определяемых парами прямых a и b, b и c, a и c. В этом случае построение составляющих $\mathbf{v}_a$, $\mathbf{v}_b$, $\mathbf{v}_c$ сводится к построению параллелепипеда, диагональю которого является отрезок OV и ребра которого, идущие из точки O, лежат на прямых a, b, c. Три плоскости граней этого параллелепипеда определяются тремя парами пересекающихся прямых: a и b, b и c, a и c, а три другие плоскости его граней параллельны этим плоскостям и проходят через точку V (рис.22.17).

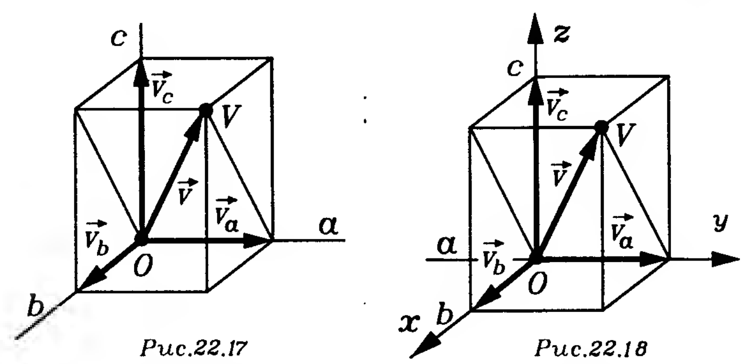


Рис.22.17 Рис.22.18

Чаще всего мы будем раскладывать векторы по трем взаимно перпендикулярным прямым, которые являются осями x, y, z прямоугольной системы координат. В этом случае параллелепипед, построенный по вектору $\mathbf{v}$, с

ребрами на осях координат, окажется прямоугольным (рис.22.18) или выродится в прямоугольник или отрезок.

Убедимся, что *при сложении векторов их соответствующие составляющие (по прямой или плоскости) складываются.*

□ Докажем эту теорему, например, для случая разложения вектора по прямой a и пересекающей ее плоскости α (для разложения по трем не параллельным одной плоскости прямым доказательство аналогично). Возьмем любые векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, и пусть вектор $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Разложим векторы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ на составляющие по прямой a и плоскости α:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{u}_\alpha,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_\alpha \quad \text{и} \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_a + \boldsymbol{w}_\alpha.$$

Так как

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},$$

то

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_\alpha = (\boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{v}_a) + (\boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{v}_\alpha).$$

Поскольку $\boldsymbol{u}_a \| a$ и $\boldsymbol{v}_a \| a$, то $(\boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{v}_a) \| a$. Аналогично $(\boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{v}_\alpha) \| \alpha$. Итак, векторы $\boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{v}_a$ и $\boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{v}_\alpha$ являются составляющими вектора $\boldsymbol{w}$ по прямой a и плоскости α. В силу единственности разложения на такие составляющие получаем, что $\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{u}_a + \boldsymbol{v}_a$ и $\boldsymbol{w}_\alpha = \boldsymbol{u}_\alpha + \boldsymbol{v}_\alpha$, т.е. при сложении векторов их составляющие складываются. ■

22.3. **Умножение вектора на число.** Эта операция определяется в стереометрии так же, как и в планиметрии. Напомним ее определение.

Произведением вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ и числа $x \neq 0$ называется такой вектор $x\vec{a}$, для которого выполнены два условия:

1) его длина равна произведению длины вектора $\vec{a}$ и модуля числа x, т.е.

$$|x\vec{a}| = |x| \cdot \vec{a}; \tag{8}$$

2) он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $x > 0$, и направлен противоположно вектору $\vec{a}$, если $x < 0$ (рис.22.19).

Если же $\vec{a} = \vec{0}$ или $x = 0$, то вектор $x\vec{a}$ нулевой (что согласуется с (8)).

Из этого определения непосредственно вытекают такие следствия:

1. **$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.**

2. **$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.**

3. **Если $x\vec{a} = \vec{0}$, то либо $x = 0$, либо $\vec{a} = \vec{0}$.**

4. **Если $x\vec{a} = x\vec{b}$ и $x \neq 0$, то $\vec{a} = \vec{b}$.**

5. **Если $x\vec{a} = y\vec{a}$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $x = y$.**

$x > 0$ $x\vec{a}$ $\vec{a}$ $\vec{a}$ $x < 0$ $x\vec{a}$

Рис.22.19

Докажем, например, свойство 5. Из равенства $\boldsymbol{a}x = y\boldsymbol{a}$ по формуле (8) получаем, что $|x||\boldsymbol{a}| = |y||\boldsymbol{a}|$. Так как $|\boldsymbol{a}| \neq 0$, то $|x| = |y|$. Кроме того, числа x и y имеют один знак, так как в противном случае векторы $x\boldsymbol{a}$ и $y\boldsymbol{a}$ были бы направлены противоположно. Поэтому $x = y$. ■

Часто используется следующий простой, но важный признак коллинеарности векторов:

Т е о р е м а (о коллинеарных векторах). **Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда $\vec{b} = x\vec{a}$.**

□ 1) Если $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны (по определению произведения вектора на число).

2) Докажем обратное утверждение: если $\boldsymbol{a} \| \boldsymbol{b}$, то найдется такое число x, что $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}$. Если $\boldsymbol{b} = \vec{0}$, то $x = 0$. Если же $\boldsymbol{b} \neq \vec{0}$, то возможны два случая.

а) $\boldsymbol{b} \uparrow\uparrow \boldsymbol{a}$. Тогда, чтобы из $\boldsymbol{a}$ получить $\boldsymbol{b}$, надо умножить $\boldsymbol{a}$ на число $x = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, т.е. $\boldsymbol{b} = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

б) $\boldsymbol{b} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{b}$ получается из $\boldsymbol{a}$ умножением на число $x = -\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, т.е. $\boldsymbol{b} = -\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

Оба эти утверждения непосредственно вытекают из определения произведения вектора на число. Проверьте это самостоятельно. ■

Следствие (о векторах на прямой). *Два вектора, отложенные от одной и той же точки, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.*

Наконец, отметим, что операции сложения векторов и умножения вектора на число связаны двумя свойствами дистрибутивности (распределительные свойства). А именно, для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и любых чисел x, y выполняются равенства

$$(x + y)\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{a} \tag{9}$$

и

$$x(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = x\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b}. \tag{10}$$

Оба эти свойства известны из планиметрии и относятся к планиметрии, так как выполняющиеся в них действия производятся с векторами, параллельными одной плоскости. Если же отложить эти векторы от одной точки, то изображающие их направленные отрезки окажутся лежащими в одной плоскости. Более того, равенство (9) касается лишь векторов, коллинеарных одной прямой. Оно непосредственно вытекает из определений сложения векторов и умножения вектора на число. Равенство же (10) может быть иллюстрировано рисунком 22.20.

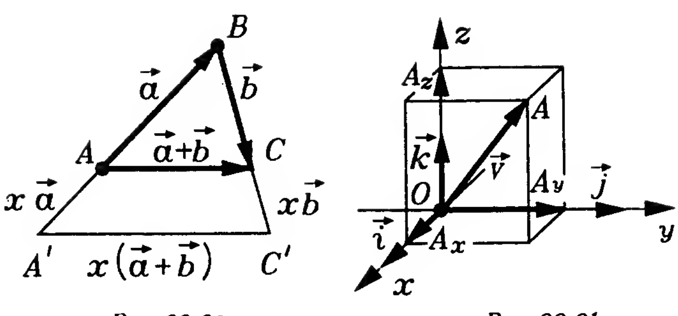


Рис.22.20 *Рис.22.21*

Равенство (10) означает также, что *при умножении вектора на число его составляющие умножаются на это число.*

22.4. **Координаты вектора.** Координаты вектора в пространстве определяются так же, как на плоскости. А именно справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а (о координатном представлении вектора). **Пусть в пространстве введена прямоугольная система координат с единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей x, y, z. Тогда каждый вектор $\vec{v}$ единственным образом представляется в виде**

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}. \qquad (11)$$

Числа v_x, v_y, v_z называются **координатами вектора $\vec{v}$ относительно векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$**, которые называются **базисными векторами** или, короче, **базисом.**

□ Отложим вектор $\mathbf{v}$ от начала координат — точки O. Получим вектор $\vec{OA} = \mathbf{v}$ (рис.22.21). Разложим его по координатным осям:

$$\vec{OA} = \vec{OA}_x + \vec{OA}_y + \vec{OA}_z. \qquad (12)$$

Так как $\vec{OA_x} \parallel \boldsymbol{i}$, то по признаку параллельности векторов $\vec{OA_x} = v_x \boldsymbol{i}$. Аналогично $\vec{OA_y} = v_y \boldsymbol{j}$, $\vec{OA_z} = v_z \boldsymbol{k}$. Подставив эти выражения в (12), получим (11). Первое утверждение теоремы доказано. Докажем единственность координат v_x, v_y, v_z вектора $\boldsymbol{v}$.

Допустим что, кроме разложения (11), имеется еще какое-нибудь разложение $\boldsymbol{v}$ по векторам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}. \tag{13}$$

Тогда из (11) и (13) следует, что

$$v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}. \tag{14}$$

Поэтому

$$(v_x - a)\boldsymbol{i} = (b - v_y)\boldsymbol{j} + (c - v_z)\boldsymbol{k}. \tag{15}$$

Слева в равенстве (15) стоит вектор, параллельный оси x, т.е. перпендикулярный плоскости yz, а справа стоит вектор, параллельный плоскости yz. Они могут быть равны лишь в случае, когда оба они нулевые. Поэтому $v_x - a = 0$, т.е. $a = v_x$. Аналогично $b = v_y$, $c = v_z$. Теорема полностью доказана. ■

На основании доказанной теоремы, если в пространстве введены координаты, каждый вектор $\boldsymbol{v}$ можно задавать его координатами v_x, v_y, v_z и писать короче: $\boldsymbol{v}(v_x; v_y; v_z)$ вместо равенства (1) или

$$\boldsymbol{v} = (v_x; v_y; v_z).$$

Как показывает следующая теорема, действия с векторами можно свести к аналогичным действиям с их координатами.

Т е о р е м а (о действиях с координатами векторов). **При сложении векторов их соответствующие координаты складываются. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.**

□ Пусть

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \tag{16}$$

и

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{i} + c_y\boldsymbol{j} + c_z\boldsymbol{k}. \qquad (17)$$

Надо доказать, что

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z. \qquad (18)$$

Действительно, из равенств (16) и (17) получаем, что

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k}.$$

Значит, числа $a_x + b_x$, $a_y + b_y$, $a_z + b_z$ — координаты вектора $\boldsymbol{c}$, т.е. имеют место равенства (18).

Докажем второе утверждение теоремы. Рассмотрим произведение $\lambda\boldsymbol{a}$. Получим

$$\boldsymbol{a} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k}.$$

Значит, числа λa_x, λa_y, λa_z — координаты вектора $\lambda\boldsymbol{a}$, что и требовалось доказать. ■

С л е д с т в и е. *Векторы параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.*

Следствие вытекает из доказанной теоремы и признака параллельности векторов (п.22.3).

22.5. **Равенство координат векторов и координат точек.**

Т е о р е м а (о равенстве координат). **Если в пространстве введена система координат x, y, z с началом в точке O и единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей x, y, z, то координаты любой точки M совпадают с соответствующими координатами ее радиус-вектора $\vec{OM}$.**

□ Возьмем некоторую точку M с координатами x_M, y_M, z_M. По определению x_M — это координата на оси x точки M_x — проекции точки M на эту ось. Аналогично y_M и z_M определяются как координаты проекций M_y и M_z точки M на оси y и z. Отрезок OM является диагональю прямоугольного параллелепипеда с ребра-

ми OM_x, OM_y, OM_z (он может вырождаться в прямоугольник, отрезок и даже точку). Следовательно,

$$\vec{OM} = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y + \vec{OM}_z.$$

Как известно из планиметрии, $\vec{OM}_x = x_M \boldsymbol{i}, \vec{OM}_y = y_M \boldsymbol{j}, \vec{OM}_z = z_M \boldsymbol{k}$. Поэтому

$$\vec{OM} = x_M \boldsymbol{i} + y_M \boldsymbol{j} + z_M \boldsymbol{k},$$

т.е. координаты точки M являются координатами ее радиус-вектора $\vec{OM}$. ■

Эта теорема позволяет найти координаты вектора, отложенного от любой точки, если мы знаем координаты его начала и его конца.

С л е д с т в и е 1 (о координатах вектора). *Координаты вектора, отложенного от произвольной точки, равны разности соответствующих координат его конца и его начала.*

□ Пусть точка A имеет координаты x_A, y_A, z_A, а точка B — координаты x_B, y_B, z_B. Тогда по предыдущей теореме

$$\vec{OA} = x_A \boldsymbol{i} + y_A \boldsymbol{j} + z_A \boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad \vec{OB} = x_B \boldsymbol{i} + y_B \boldsymbol{j} + z_B \boldsymbol{k}.$$

Поэтому

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} =$$
$$= (x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} + (z_B - z_A)\boldsymbol{k},$$

что и требовалось доказать. ■

С л е д с т в и е 2 (о длине вектора). *Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат, т.е., если*

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k},$$

то

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \qquad (19)$$

□ Отложим вектор $\mathbf{v}$ от начала — точки O: $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$. Тогда точка V будет иметь координатами числа a, b, c. По формуле расстояния между точками (п.18.4)

$$OV = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.$$

Но $OV = |\overrightarrow{OV}| = |\mathbf{v}|$, т.е. имеет место (19). ■

*22.6. **Разложение векторов по базису.** Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются **линейными операциями с векторами.** А выражение

$$x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_k\mathbf{v}_k\,, \qquad (20)$$

построенное по векторам $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ — **линейной комбинацией этих векторов с коэффициентами** $x_1, \ldots, x_k$.

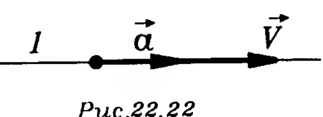


Рис.22.22

Задача, которую мы рассмотрим в этом пункте, формулируется так: сколько и каких векторов на прямой, на плоскости и в пространстве надо задать, чтобы в виде их линейной комбинации можно было однозначно представить любой из векторов на прямой, на плоскости и в пространстве? Система таких векторов, через которые однозначно выражаются остальные векторы, называется **базисом** (или **аффинным базисом**), соответственно на прямой, на плоскости и в пространстве. В п.22.4 мы уже рассматривали базисы, состоящие из единичных и взаимно перпендикулярных векторов. Здесь эта задача рассматривается в общем виде. Порядок векторов в базисе считается заданным.

1. *Базисом на прямой является любой ненулевой вектор.*

Действительно, пусть даны прямая l и ненулевой вектор $\mathbf{a}$ (рис.22.22). Тогда по теореме о коллинеарных векторах (п.22.3) любой вектор $\mathbf{v} \parallel l$ представляется в виде

$$\mathbf{v} = x\mathbf{a}\,. \qquad (21)$$

Такое представление единственно (по свойству 4 п.22.3). ■

2. *Базисом на плоскости является любая пара неколлинеарных векторов.*

Действительно, пусть на плоскости α заданы любые два неколлинеарные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Проведем в плоскости α любые прямые a, b, параллельные соответственно векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (рис.22.23).

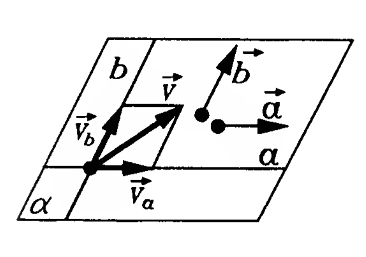


Рис.22.23

Любой вектор плоскости $\boldsymbol{v}$ можно разложить на составляющие по прямым a, b (см. п.22.2):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_b. \qquad (22)$$

Так как $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a} \neq \vec{0}$, то по теореме о коллинеарных векторах $\boldsymbol{v}_a = x\boldsymbol{a}$. Аналогично $\boldsymbol{v}_b = y\boldsymbol{b}$. Подставляя эти выражения в (22), получаем искомое представление вектора $\boldsymbol{v}$ через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}. \qquad (23)$$

Докажем, что такое представление единственно. Допустим, что кроме (23) вектор $\boldsymbol{v}$ допускает еще одно аналогичное представление:

$$\boldsymbol{v} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}. \qquad (24)$$

Из (23) и (24) следует равенство

$$(x - x')\boldsymbol{a} = (y' - y)\boldsymbol{b}, \qquad (25)$$

которое, поскольку вектор $\boldsymbol{a}$ непараллелен вектору $\boldsymbol{b}$, возможно лишь в случае, когда $x - x' = y' - y = 0$. Итак, $x = x'$, $y = y'$, т.е. непараллельные векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ являются базисом на плоскости α. ■

3. *Базисом в пространстве является любая тройка некомпланарных векторов.*

Возьмем любую тройку некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и через точку O проведем параллельные им прямые a, b, c. Любой вектор $\boldsymbol{v}$ можно разложить на составляющие по прямым a, b, c (см. п.22.2):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_b + \boldsymbol{v}_c.$$

Так как $\boldsymbol{v}_a \parallel \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}_b \parallel \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}_c \parallel \boldsymbol{c}$, то

$$\boldsymbol{v}_a = x\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{v}_b = y\boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{v}_c = z\boldsymbol{c}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}. \tag{26}$$

Единственность представления (26) доказывается также, как и в случае векторов на плоскости. ■

Справедливы утверждения, обратные трем доказанным. А именно:

1) *любой базис на прямой состоит из одного ненулевого вектора;*

2) *любой базис на плоскости состоит из двух неколлинеарных векторов;*

3) *любой базис в пространстве состоит из трех некомпланарных векторов.*

Справедливость этих утверждений опирается на однозначность представления вектора в виде линейной комбинации базисных векторов.

Из этого сразу следует, что среди базисных векторов не может быть нуль-вектора, так как такой вектор можно прибавлять к линейной комбинации с любым коэффициентом, не меняя ее.

Допустим теперь, что базис на прямой состоит из двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$. Тогда любой вектор $\boldsymbol{v}$ на прямой можно представить в виде $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{a}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{v} = 0 \cdot \boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2$, т.е. представление вектора $\boldsymbol{v}$ через пару векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ неоднозначно. Поэтому на прямой любой базис состоит из одного ненулевого вектора.

По аналогии с проведенным рассуждением объясните теперь, почему одного вектора на плоскости для базиса мало, а трех векторов много. В пространстве же двух векторов для базиса мало, а четырех много.

То, что число векторов в базисе на прямой, на плоскости и в пространстве равно соответственно единице, двум и трем позволяет определить **размерность** прямой, плоскости и пространства: прямая — одномерна, плоскость — двумерна, пространство — трехмерно.

Базисы, базисные векторы которых единичны и взаимно перпендикулярны, называются **ортонормированными.** Векторы в этих базисах обозначаются обычно $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Именно такой базис мы рассматривали в п.п.22.4, 22.5.

Числовые коэффициены, которые стоят в правых частях равенств (21), (23), (26), выражающих вектор $\boldsymbol{v}$ на прямой, на плоскости и пространстве через базисные векторы, называются **координатами вектора** $\boldsymbol{v}$ **в данном базисе.** На прямой вектор имеет одиу координату, на плоскости — две, в пространстве — три. О координатах вектора в ортонормированном базисе уже шла речь в п.22.4. Как и там в теореме о действиях с координатами, можно доказать, что при сложении векторов их координаты в данном базисе складываются, а при умножении вектора на число они умножаются на это число. Повторите соответствующие доказательства в рассматриваемом общем случае.

*22.7. **Ориентацня базиса.** Для любых двух базисов на прямой, на плоскости и в пространстве определяются понятия **одинаковой** или **различной ориентированности** этих базисов. На прямой два базиса одинаковой ориентации — это просто два сонаправленных вектора, а два базиса различной ориентации — это два противоположно направленных вектора.

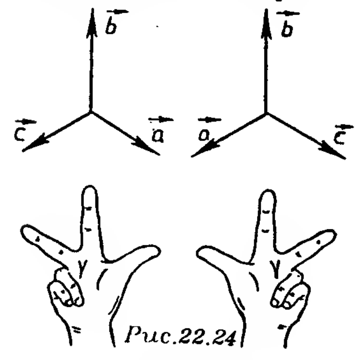


Рис.22.24

На плоскости два базиса $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ считаются одинаково ориентированными, если кратчайшие повороты от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ и от $\boldsymbol{a}'$к $\boldsymbol{b}'$ происходят в одном направлении, и базисы считаются ориентированными различно, если эти повороты идут в противоположных направлениях. Чтобы ввести аналогичные понятия для двух базисов в пространстве, сначала определим, что такое правые и левые тройки векторов, выйдем за пределы геометрии.

Тройка базисных векторов в пространстве называется **правой (левой)**, если эти векторы, отложенные от одной точки, располагаются так, как расположены соответственно большой, указательный и согнутый средний пальцы правой (левой) руки (рис.22.24).

В том случае, когда имеются две правые или две левые тройки векторов, говорят, что эти тройки (базисы) имеют одинаковую ориентацию или что они ориентированы одинаково.

Если же из двух данных базисов один является правой тройкой, а другой — левой тройкой векторов, то говорят, что эти базисы имеют различную ориентацию или что они ориентированы противоположно.

В дальнейшем векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ мы всегда выбираем так, чтобы они образовывали правую тройку векторов.

§23. СКАЛЯРНОЕ УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

23.1. **Определение скалярного произведения.** Напомним, что **скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Если же хотя бы один из двух векторов нулевой, то их скалярное произведение считается равным нулю.**

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначают $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ненулевые, то согласно определению

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\varphi, \quad (1)$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Отметим сразу два важных случая.

1) Если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, то $\varphi=0^\circ$, $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ и из (1) следует, что $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$. Произведение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ обозначается $\boldsymbol{a}^2$. Оно называется **скалярным квадратом вектора** $\boldsymbol{a}$. Итак, $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$.

2) Для ненулевых векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ их скалярное произведение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

Действительно, как следует из (1), если $\boldsymbol{a} \neq 0$ и $\boldsymbol{b} \neq 0$, то $|\boldsymbol{a}| \neq 0$ и $|\boldsymbol{b}| \neq 0$, и равенство $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ равносильно тому, что $\cos \varphi = 0$, т.е. $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

23.2. **Выражение скалярного произведения через координаты.** Выразим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\boldsymbol{b}(x_2; y_2; z_2)$ через координаты. Сначала полагаем, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Тогда отложим их от некоторой точки O:

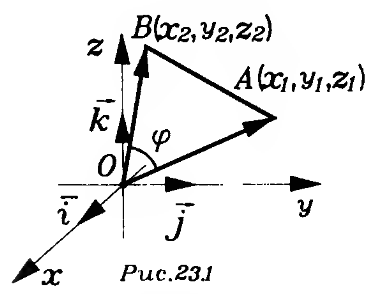


Рис.23.1

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} \text{ и } \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$$

(рис.23.1). Получим треугольник OAB, угол φ которого при вершине O равен углу между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. По теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \varphi, \tag{2}$$

т.е.,

$$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}. \tag{3}$$

Поэтому

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 -$$

$$-(y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Итак, в рассмотренном случае, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{4}$$

Покажем, что (4) справедливо и для коллинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Если $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$ и $\lambda > 0$. Тогда $x_2 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda y_1$, $z_2 = \lambda z_1$. Поскольку в этом случае $\varphi = 0^\circ$, то

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\lambda|\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|^2=\lambda(x_1^2+y_1^2+z_1^2)=$$
$$=x_1(\lambda x_1)+y_1(\lambda y_1)+z_1(\lambda z_1)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

т.е., (4) для сонаправленных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ справедливо.

Если $\boldsymbol{a}\uparrow\downarrow\boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, $\lambda<0$ и $\varphi=180^\circ$. Поэтому

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=-|\boldsymbol{a}|\left(-\lambda|\boldsymbol{a}|\right)=\lambda|\boldsymbol{a}|^2=$$
$$=x_1(\lambda x_1)+y_1(\lambda y_1)+z_1(\lambda z_1)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

т.е., (4) справедливо и в этом случае. Если же один из векторов $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ нулевой, то (4), очевидно, выполняется. ■

Итак, мы доказали, что *скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат, т.е. вычисляется по формуле* (4).

Из формулы (4) следует условие ортогональности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \qquad (5)$$

23.3. **Свойства скалярного умножения.** Следующие свойства выполняются для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и любого числа x.

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ *(коммутативность или перестановочность).*
2. $(x\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.
3. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ *(дистрибутивность или распределительное свойство).*

Все эти свойства следуют из формулы (4). Проверим, например, свойство 3. Положим

$$\boldsymbol{a}=(x_1;y_1;z_1);\ \ \boldsymbol{b}=(x_2;y_2;z_2)\ \text{ и }\ \boldsymbol{c}=(x_3;y_3;z_3).$$

Тогда

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2).$$

Поэтому

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(x_1+x_2)\cdot x_3+(y_1+y_2)\cdot y_3+(z_1+z_2)\cdot z_3=$$
$$=x_1x_3+x_2x_3+y_1y_3+y_2y_3+z_1z_3+z_2z_3.$$

Но и

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3+x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3.$$

Следовательно, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot \boldsymbol{c}$. ■

Доказанные свойства вместе со свойствами сложения векторов позволяют умножать скалярно суммы и разности векторов по правилам обычной алгебры. Например,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}^2.$$

23.4. Применения скалярного умножения. Операция скалярного умножения векторов позволяет находить углы между ненулевыми векторами (точнее, косинусы этих углов). Из формулы (1) следует, что

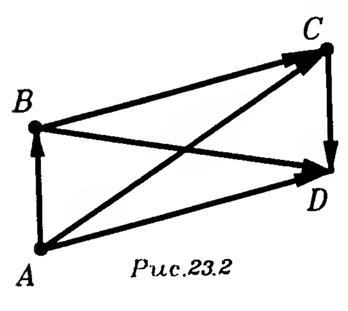


Рис.23.2

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}, \qquad (6)$$

а для длины вектора $\boldsymbol{a}$ получаем формулу:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}. \qquad (7)$$

Кроме того, с помощью скалярного умножения доказывают перпендикулярность прямых, векторов, плоскостей и т.п. Приведем примеры.

1) *Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.*

Пусть четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис.23.2). Положим $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, а $\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Кроме того $\overrightarrow{DC} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$. Тогда

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2)$$

и

$$AC^2 + BD^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = 2(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2).$$

Поэтому

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2. \ ■$$

2) *Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.*

В ромбе $ABCD$ положим $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$. Тогда $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Поскольку $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$, то

$$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) = 0,$$

т.е. $AC \perp BD$. ■

3) *Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его ребер.*

Если в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обозначить $\vec{AB} = \boldsymbol{a}$, $\vec{AD} = \boldsymbol{b}$, $\vec{AA_1} = \boldsymbol{c}$, то его диагонали зададутся равенствами:

$$\vec{AC_1} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \vec{A_1C} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\ \vec{BD_1} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a} \text{ и}$$

$$\vec{B_1D} = -\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}.$$

Тогда

$$AC_1^2 + A_1C^2 + BD_1^2 + B_1D^2 = 4(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2). \ ■$$

23.5. **Скалярное произведение и проекции.** Как говорилось в п.22.2, при рассмотрении векторной величины нас может интересовать не столько она сама, сколько ее составляющая в некотором направлении. Такие составляющие находят проектированием на прямые и плоскости, чаще всего с помощью ортогонального проектирования. Только о таком проектировании на прямую здесь и пойдет речь.

Если на прямой, на которую проектируется вектор, ввести координату, то составляющую вектора по этой прямой удобно задать чис-лом. Это число называется проекцией вектора на ось. Дадим его определение.

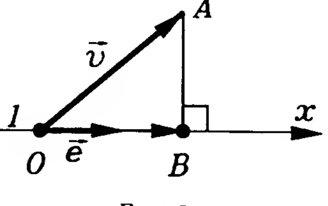


Рис.23.3

Пусть задана некоторая координатная ось x, т.е. прямая l, на которой выбрана точка O — начало координат, а также единичный вектор $\boldsymbol{e}$, задающий направление оси и масштаб (рис.23.3).

Возьмем любой вектор $\boldsymbol{v}$ и отложим его от точки O: $\boldsymbol{v} = \vec{OA}$. Спроектируем точку A на ось x. Получим

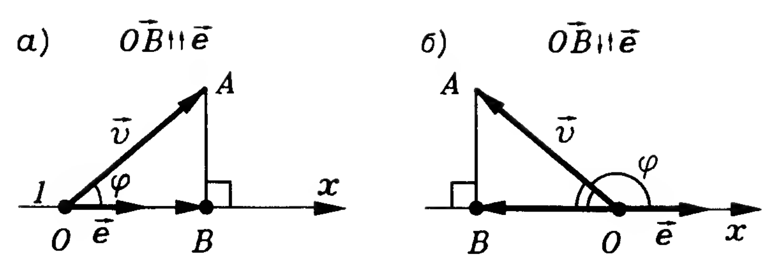


Рис.23.4

точку B и составляющую $\vec{OB}$ вектора $\boldsymbol{v}$ по оси x. Длина отрезка OB со знаком "плюс", если $\vec{OB}\uparrow\uparrow\boldsymbol{e}$, и со знаком "минус", если $\vec{OB}\uparrow\downarrow\boldsymbol{e}$, и называется **проекцией вектора $\boldsymbol{v}$ на ось x.** Обозначать проекцию вектора $\boldsymbol{v}$ на ось x будем так: v_x (или так: пр.$\boldsymbol{v}$). Если $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{e}$, то $v_x = 0$.

Поскольку OB — катет прямоугольного треугольника OAB, то

$$v_x = |\boldsymbol{v}|\cdot cos\ \varphi\ , \tag{8}$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{e}$ (рис. 23.4*а,б*).

Так как $|\boldsymbol{e}| = 1$, то из (8) следует, что

$$v_x = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}\ . \tag{9}$$

Отметим, что в разложении произвольного вектора $\boldsymbol{v}$ по ортонормированному базису $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, т.е. в сумме

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\ , \tag{10}$$

слагаемые $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$, $z\boldsymbol{k}$ являются составляющими вектора $\boldsymbol{v}$ по осям x, y, z, а числа x, y, z будут как координатами вектора $\boldsymbol{v}$, так и его проекциями на оси координат. При этом

$$x = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i}\ ,\ \ y = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{j}\ ,\ \ z = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}\ . \tag{9}$$

Проекции векторов постоянно встречаются на практике. Глядя на перемещающийся вдали предмет, мы видим не само перемещение, а его проекцию на направле-

ние, перпендикулярное лучу зрения. Насколько же предмет удаляется от нас или, напротив, приближается, показывает проекция на луч зрения. Знак проекции показывает удаление или приближение (считая, например, удаление положительным, а приближение отрицательным).

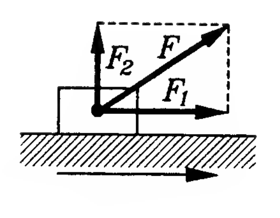


Рис.23.5

Совершенно так же мы видим не скорость движения тела, а ее проекцию, перпендикулярную лучу зрения. Проекция же на этот луч дает скорость удаления или приближения предмета.

Проекция вектора силы на данное направление показывает, можно сказать, насколько сила действует в данном направлении. Например, когда предмет толкают или тянут, важна проекция приложенной силы на направление движения (рис.23.5). Точно так же при подъеме предмета важна "подъемная сила" — проекция приложенной силы на вертикальное направление.

Проекции скорости, силы и других векторных величин входят в целый ряд законов физики.

*§24. ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД

Теперь, когда в §§21—23 мы познакомились с основами векторной алгебры, применим ее к решению геометрических задач. Аппарат векторов позволяет кратко записывать формулировки задач, теорем и их решения, доказательства. Например, условие теоремы о средней линии треугольника записывается так: $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ (рис.24.1), а ее доказательство занимает всего одну строку:

$$\vec{KL} = \vec{AL} - \vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{AC} - \vec{AB}\right) = \frac{1}{2}\vec{BC}.$$

24.1. **Векторное задание прямых и плоскостей.** Возьмем какую-нибудь прямую l в пространстве. Ее положение вполне определяется заданием одной из точек A

этой прямой и некоторого ненулевого вектора $\boldsymbol{m}$, коллинеарного прямой l (рис.24.2). Вектор $\boldsymbol{m}$ называется направляющим вектором прямой l.

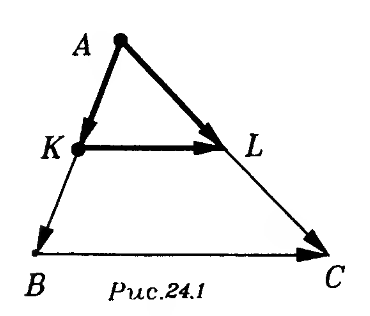


Рис.24.1

Выберем в пространстве любую точку O. Тогда радиус-вектор $\vec{OX}$ любой точки X прямой l равен такой сумме:

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}. \quad (1)$$

Так как $\vec{AX} \parallel \boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{m} \neq \vec{0}$, то по теореме о коллинеарных векторах (п.22.3)

$$\vec{AX} = t\boldsymbol{m}, \quad (2)$$

где t — некоторое действительное число. Введя обозначение $\vec{OX} = \boldsymbol{r}$ и $\vec{OA} = \boldsymbol{r}_0$ из (1) и (2) получим

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{m}. \quad (3)$$

Это равенство и задает прямую l: когда параметр t пробегает все множество действительных чисел, точка X пробегает всю прямую. Точке A соответствует $t = 0$. Если же t изменяется на отрезке $[t_1, t_2]$, то точка t пробегает отрезок прямой l с концами в точках X_1 и X_2, соответствующих значениям t_1 и t_2 параметра t.

Теперь рассмотрим случай плоскости. Зададим некоторую плоскость α любой ее точкой $A \in \alpha$ и парой лежащих в α неколлинеарных векторов $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ (рис.24.3); векторы $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$ называются направляющими векторами плоскости α. Они образуют базис в плоскости α. Любой вектор $\vec{AX}$, где X — произволь-

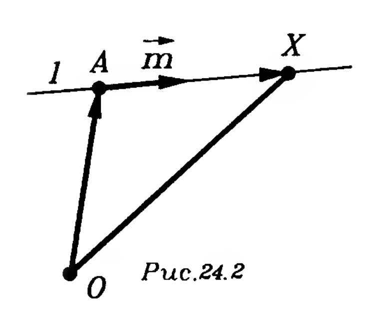


Рис.24.2

ная точка плоскости α, можно разложить по векторам $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$:

$$\overrightarrow{AX} = t\boldsymbol{m} + s\boldsymbol{n}. \quad (4)$$

Поскольку $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$, то подставляя в это равенство выражение (4) и полагая, как и раньше,

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{r}_0 \text{ и } \overrightarrow{OX} = \boldsymbol{r},$$

окончательно получаем

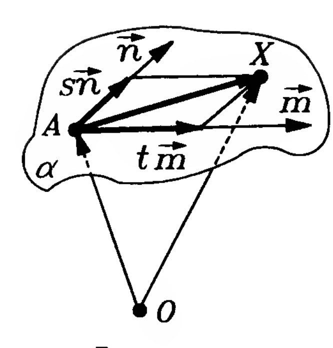


Рис.24.3

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{m} + s\boldsymbol{n}. \quad (5)$$

Это уравнение задает плоскость α в пространстве: положение любой точки X плоскости α определится заданием упорядоченной пары действительных чисел (t, s), причем каждой такой паре соответствует некоторая точка плоскости α в системе координат с началом в точке A и базисными векторами $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$. Точке A соответствует пара $(0;0)$.

24.2. **Общее уравнение плоскости.** Используя скалярное умножение, мы можем теперь вывести уравнение, задающее плоскость в системе декартовых координат. Она задается линейным уравнением. Как вам известно из планиметрии, на координатной плоскости x, y каждая прямая задается уравнением вида

$$Ax + By + C = 0, \quad (6)$$

причем коэффициенты A, B не обращаются в нуль одновременно.

Для плоскости в пространстве верен аналогичный результат.

Т е о р е м а. **Плоскость в пространстве задается в системе прямоугольных координат x, y, z уравнением вида**

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7)$$

при условии, что коэффициенты A, B, C не обращаются в нуль одновременно.

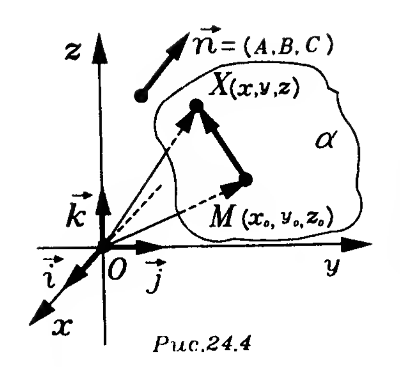


Рис.24.4

□ Пусть в пространстве введены прямоугольные координаты x, y, z и задана некоторая плоскость α. Возьмем любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости α. Назовем его **вектором нормали** к плоскости α (рис.24.4) и обозначим $\boldsymbol{n}(A;B;C)$.

Положение плоскости α в пространстве вполне определится, если, кроме $\boldsymbol{n}$, задать какую-нибудь точку $M(x_0;y_0;z_0)\in\alpha$. Точка $X(x;y;z)$ принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда вектор $\vec{MX}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{n}$, т.е. тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{n}\cdot\vec{MX}=0. \qquad (8)$$

Равенство (8) и является уравнением плоскости α.

Так как $\vec{MX}=\vec{OX}-\vec{OM}$, то, используя формулу для скалярного произведения, получаем, что

$$\boldsymbol{n}\cdot\vec{MX}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0). \qquad (9)$$

Подставив это выражение в левую часть (8) и положив $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, получим (7). ■

Верно также и обратное утверждение: уравнение вида (7) при условии, что среди коэффициентов A, B, C есть ненулевые, задает в пространстве плоскость в системе прямоугольных координат. Если $A\neq 0$, то такой плоскостью является плоскость α, проходящая через точку $M\left(-\dfrac{D}{A};0;0\right)$ и имеющая вектор $\boldsymbol{n}(A;B;C)$ своим нормальным вектором.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим случай, когда уравнение (7) плоскости α содержит не все координаты, например имеет вид $Ax+By+D=0$, т.е. $C=0$. Если такому уравнению удовлетво-

ряют координаты x_0, y_0 некоторой точки M плоскости xy, то ему удовлетворяют и координаты любой точки прямой l, проходящей через точку M и перпендикулярной плоскости xy. Поэтому в рассматриваемом случае плоскость α содержит эту прямую, т.е. α параллельна оси z, если $D \neq 0$, и проходит через ось z, если $D = 0$. Рассмотрите самостоятельно случаи обращения в нуль других коэффициентов в уравнении (7).

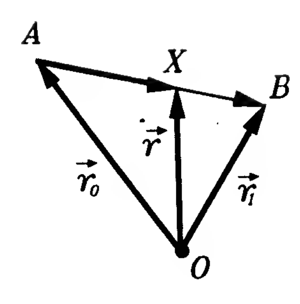


Рис.24.5

24.3. **Векторное задание отрезка.** Рассмотрим в пространстве отрезок AB. Фиксируем некоторое начало O и зададим концы A и B отрезка AB радиус-векторами $\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{OB}$ (рис.24.5). Для любой точки X отрезка AB вектор $\overrightarrow{AX} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$ и

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\,\overrightarrow{AB}, \tag{10}$$

причем, параметр λ меняется от 0 до 1, когда точка X двигается по отрезку AB от A до B. Если $X = A$, то $\lambda = 0$, если $X = B$, то $\lambda = 1$, а если X — середина отрезка AB — точка C, то $\lambda = \frac{1}{2}$.

Выразим радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OX}$ точки X через $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_1$ и λ. Имеем:

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) =$$

$$= (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{r} = (1-\lambda)\cdot \boldsymbol{r}_0 + \lambda \boldsymbol{r}_1. \tag{11}$$

Из равенства (11) при $\lambda = \frac{1}{2}$ для середины C отрезка AB получаем

$$\vec{OC} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right), \qquad (12)$$

т.е. *радиус-вектор середины отрезка равен полусумме радиус-векторов его концов.*

24.4. **Некоторые теоремы о треугольниках и тетраэдрах.** Применим формулы, выведенные в предыдущем пункте, для решения нескольких задач о треугольниках, расположенных в пространстве, и тетраэдров. Сначала докажем векторным методом известную вам теорему о точке пересечения медиан треугольника.

Выберем начало O, не лежащее в плоскости треугольника ABC, и положим $\boldsymbol{r}_A = \vec{OA}$, $\boldsymbol{r}_B = \vec{OB}$, $\boldsymbol{r}_C = \vec{OC}$, $\boldsymbol{r}_K = \vec{OK}$ и $\boldsymbol{r}_L = \vec{OL}$, где точки K и L — середины сторон AB и AC (рис.24.6). Тогда

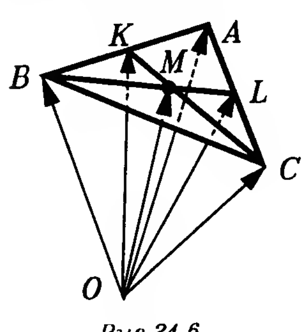


Рис.24.6

$$\boldsymbol{r}_K = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B) \quad \text{и}$$

$$\boldsymbol{r}_L = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_C). \qquad (13)$$

Пусть точка M — точка пересечения медиан BL и CK. Поскольку точка M лежит на отрезке BL, то для ее радиус-вектора $\boldsymbol{r}_M = \vec{OM}$ выполняется равенство

$$\boldsymbol{r}_M = (1-\lambda)\cdot \boldsymbol{r}_B + \lambda \boldsymbol{r}_L. \qquad (14)$$

Аналогично, так как M лежит на отрезке CK, то

$$\boldsymbol{r}_M = (1-\mu)\cdot \boldsymbol{r}_C + \mu \boldsymbol{r}_K. \qquad (15)$$

Из (13), (14) и (15) следует, что

$$(1-\lambda)\cdot \boldsymbol{r}_B + \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{r}_A + \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{r}_C = (1-\mu)\cdot \boldsymbol{r}_C + \frac{\mu}{2}\boldsymbol{r}_A + \frac{\mu}{2}\boldsymbol{r}_B. \quad (16)$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B, \boldsymbol{r}_C$ некомпланарны и образуют в пространстве базис, числовые коэффициенты при этих векторах справа и слева в равестве (16) соответственно равны:

$$1-\lambda = \frac{\mu}{2},\ \ \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{2},\ \ 1-\mu = \frac{\lambda}{2}, \text{ т.е., } \lambda = \mu = \frac{2}{3}. \quad (17)$$

Итак, радиус-вектор $\boldsymbol{r}_M$ точки пересечения медиан BL и CK выражается равенством

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C), \quad (18)$$

т.е., он равен одной трети суммы радиус-векторов, идущих в вершины треугольника. Если теперь повторить проведенный вывод для медианы BL и медианы AN из вершины A, то придем к тому же результату (18). Поэтому *все три медианы треугольника проходят через точку M, радиус-вектор которой определяется равенством* (18). ■

Проверьте, что формула (18) верна и для точки O, лежащей в плоскости треугольника ABC.

Равенства $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$ означают, что *точка пересечения медиан треугольника отсекает на них отрезки, равные $\frac{2}{3}$ самих этих медиан (считая от вершин треугольника).* Это же можно выразить и так: *точка пересечения медиан делит их на отрезки, относящиеся как* 2:1, *считая от вершин треугольника.*

Напомним, что точку пересечения медиан треугольника называют его **центром тяжести**, или **центром масс**, или **центроидом.**

Обратимся теперь к тетраэдру $ABCD$ — пространственному аналогу треугольника ABC. Рассмотрим отрезки DM и CQ, соединяющие вершины D и C тетраэдра с центроидами M и Q, противоположных этим вер-

шинам граней тетраэдра (рис.24.7). Отрезки DM и CQ пересекаются в некоторой точке P, поскольку они лежат в треугольнике CDK, где точка K — середина ребра AB.

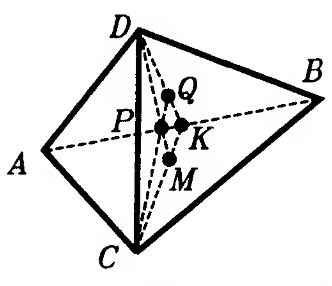


Рис.24.7

Выразим сначала радиус-вектор $\boldsymbol{r}_P = \overrightarrow{OP}$ через радиус-векторы $\boldsymbol{r}_C$, $\boldsymbol{r}_D$, $\boldsymbol{r}_K$ точек C, D, K, считая, что точка O не лежит в плоскости CDK.

Для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_P$ точки P как точки отрезка DM имеем:

$$\boldsymbol{r}_P = (1-\lambda)\cdot\boldsymbol{r}_D + \lambda\boldsymbol{r}_M. \tag{19}$$

Аналогично, поскольку $P \in CQ$, то

$$\boldsymbol{r}_P = (1-\mu)\cdot\boldsymbol{r}_C + \mu\boldsymbol{r}_Q. \tag{20}$$

Поэтому

$$(1-\lambda)\cdot\boldsymbol{r}_D + \lambda\boldsymbol{r}_M = (1-\mu)\cdot\boldsymbol{r}_C + \mu\boldsymbol{r}_Q. \tag{21}$$

Учитывая, что $M \in CK$ и $CM = \frac{2}{3}CK$, а также, что $Q \in DK$ и $DQ = \frac{2}{3}DK$, получаем

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{3}\boldsymbol{r}_C + \frac{2}{3}\boldsymbol{r}_K \text{ и } \boldsymbol{r}_Q = \frac{1}{3}\boldsymbol{r}_D + \frac{2}{3}\boldsymbol{r}_K. \tag{22}$$

Подставив $\boldsymbol{r}_M$ и $\boldsymbol{r}_Q$ из (22) в (21), получим

$$(1-\lambda)\cdot\boldsymbol{r}_D + \frac{\lambda}{3}\boldsymbol{r}_C + \frac{2\lambda}{3}\boldsymbol{r}_K = (1-\mu)\cdot\boldsymbol{r}_C + \frac{\mu}{3}\boldsymbol{r}_D + \frac{2\mu}{3}\boldsymbol{r}_K. \tag{23}$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{r}_C$, $\boldsymbol{r}_D$, $\boldsymbol{r}_K$ некомпланарны и образуют в пространстве базис, числовые коэффициенты при этих векторах справа и слева в равенстве (23) соответственно равны, т.е.

$$1-\lambda=\frac{\mu}{3}, \quad \frac{\lambda}{3}=1-\mu, \quad \lambda=\mu. \tag{24}$$

Из (24) получаем, что

$$\lambda=\mu=\frac{3}{4}. \tag{25}$$

Тогда из (18) и (19) следует, что

$$\boldsymbol{r}_P=\frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_B+\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_D). \tag{26}$$

Если теперь находить точку пересечения любых двух из отрезков, соединяющих в тетраэдре $ABCD$ вершину с центроидом противоположной грани, то радиус-вектор такой точки пересечения определится формулой (26). Следовательно, все эти отрезки пересекаются в точке P, которая называется **центроидом тетраэдра** (или его **центром тяжести**, или его **центром масс**). Отношение отрезков, на которые разбивает отрезки $DM, CQ, \ldots$ точка P равно $3:1$, считая от вершин тетраэдров.

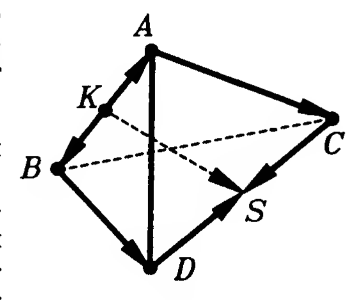


Рис.24.8

Центроид тетраэдра обладает и другими интересными свойствами. Через него, например, проходят все отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер тетраэдра (их можно назвать **средними линиями** тетраэдра), и делятся им пополам (рис.24.8).

Действительно, пусть точка K — середина ребра AB тетраэдра $ABCD$, а точка S — середина его ребра DC. Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{r}_K$ середины отрезка AB выражается равенством

$$\boldsymbol{r}_K=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_B), \tag{27}$$

а радиус-вектор $\boldsymbol{r}_S$ середины S ребра CD — равенством

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_D). \tag{28}$$

Следовательно, середина отрезка KS имеет радиус-вектор, равный полусумме векторов $\boldsymbol{r}_K$ и $\boldsymbol{r}_S$, т.е. вектор $\frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_D)$. А этим радиус-вектором и задается центроид P тетраэдра $ABCD$.

Если мы рассмотрим пару средних линий KS и LT тетраэдра $ABCD$ (рис.24.9), то мы увидим, что они являются диагоналями параллелограмма $KLST$, плоскость которого параллельна скрещивающимся ребрам AD и BC.

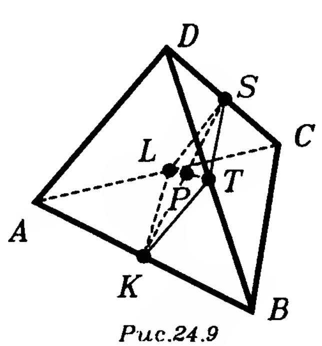


Рис.24.9

Отметим, что выводы всех формул в этом пункте останутся в силе и тогда, когда точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Подумайте, какие теоремы планиметрии мы тогда получим.

24.5. **Центр масс системы материальных точек.** Сравнивая формулы (12), (18) и (26), мы замечаем, что они единообразно выражают радиус-вектор центроида для отрезка, треугольника и тетраэдра. Обобщим понятие центроида на произвольную систему конечного числа точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$. А именно, центроидом системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ назовем точку P, радиус-вектор которой $\boldsymbol{r}_P = \overrightarrow{OP}$ выражается через радиус-векторы $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ по формуле

$$\boldsymbol{r}_P = \frac{1}{n}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \ \ldots \ + \boldsymbol{r}_n). \tag{29}$$

Данное определение корректно: оно хотя и включает в себя выбор начальной точки O, но не зависит от этого выбора. Проверим это.

Действительно, возьмем другую точку O_1 и определим по формуле (29) положение центроида P_1 системы $A_1, A_2, ..., A_n$. Получим:

$$\overrightarrow{O_1P_1} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{O_1A_1} + \ \dots \ + \overrightarrow{O_1A_n}\right) = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_1} + \ \dots \right.$$

$$\left. \dots \ + \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_n}\right) = \overrightarrow{O_1O} + \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1} + \dots \ + \overrightarrow{OA_n}\right) =$$

$$= \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O_1P}.$$

Из равенства $\overrightarrow{O_1P_1} = \overrightarrow{O_1P}$ следует, что $P_1 = P$, т.е. положение центроида не зависит от выбора точки O. ■

Если начальную точку O выбрать в центроиде P системы $A_1, A_2, \dots, A_n$, т.е. положить $P = O$, то, поскольку $\overrightarrow{OP} = \vec{0}$, из равенства (29) получаем равенство

$$\overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \dots + \overrightarrow{PA_n} = 0. \tag{30}$$

Оно позволяет дать другое определение центроида, как такой точки P для данной системы точек $A_1, A_2, ...,$ A_n, что выполняется равенство (30).

Будем считать теперь, что в точках $A_1, A_2, ..., A_n$ помещены соответственно массы $m_1, m_2, ..., m_n$, т.е. рассмотрим систему S материальных точек (A_1, m_1), $(A_2, m_2), ..., (A_n, m_n)$. **Центром масс этой системы** называется такая точка P, радиус-вектор которой выражается равенством

$$\overrightarrow{OP} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + \dots + m_n}. \tag{31}$$

Если все массы единичные (или равные друг другу), то центр масс системы S окажется центроидом системы точек $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Как и для центроида, можно проверить, что определение центра масс корректно, т.е. не зависит от выбора начальной точки O. Повторите самостоятельно соответствующие выкладки.

Если точку O выбрать в центре масс, то от равенства (31) придем к равенству

$$m_1 \vec{PA_1} + \dots + m_n \vec{PA_n} = 0. \qquad (32)$$

Аналогично тому, как равенством (30) можно определить центроид, так равенством (32) можно определить центр масс системы S.

Для системы двух материальных точек (A_1, m_1) и (A_2, m_2) равенство (32) дает известное "правило рычагов" Архимеда:

$$m_1 A_1 P = m_2 A_2 P. \qquad (33)$$

Центр масс обладает следующим важным свойством: *если систему материальных точек* S: $(A_1, m_1), \dots, (A_n, m_n)$ *разбить на две системы* S': $(A_1, m_1), \dots, (A_k, m_k)$ *и* S'': $(A_{k+1}, m_{k+1}), \dots, (A_n, m_n)$, *найти центры масс* P' *и* P'' *этих систем* S' *и* S'' *и поместить в эти точки суммарные массы* $m' = m_1 + \dots + m_k$ *и* $m'' = m_{k+1} + \dots + m_n$ *систем* S' *и* S'', *то центром масс двухточечной системы материальных точек* (P', m') *и* (P'', m'') *будет центр масс* P *исходной системы* S.

Докажем это утверждение. Радиус-вектор $\vec{OP_0}$ центра масс P_0 двухточечной системы $(P', m'), (P'', m'')$ вычисляется по формуле:

$$\vec{OP_0} = \frac{m' \vec{OP'} + m'' \vec{OP''}}{m' + m''}. \qquad (34)$$

Для $\vec{OP'}$ и $\vec{OP''}$ имеем:

$$\vec{OP'} = \frac{m_1 \vec{OA_1} + \ldots + m_k \vec{OA_k}}{m'}$$

и

$$\vec{OP''} = \frac{m_{k+1} \vec{OA_{k+1}} + \ldots + m_n \vec{OA_n}}{m''}. \qquad (35)$$

Подставив (35) в (34) и учитывая, что $m' = m_1 + \ldots$ $\ldots + m_k$, а $m'' = m_{k+1} + \ldots + m_n$, получаем

$$\vec{OP_0} = \frac{m_1 \vec{OA_1} + \ldots + m_k \vec{OA_k} + m_{k+1} \vec{OA_{k+1}} + \ldots + m_n \vec{OA_n}}{m_1 + \ldots + m_k + m_{k+1} + \ldots + m_n} = \vec{OP},$$

т.е., точка P_0 является центром масс P системы S. ■

В соответствии с этим свойством можно сначала найти, пользуясь "правилом рычага" Архимеда, центр масс любых двух материальных точек из данной системы, а затем добавлять по одной точке из данной системы и пользоваться правилом Архимеда. Именно так мы и поступали, когда последовательно находили центры масс отрезка, треугольника, тетраэдра.

24.6. **Центры масс и выпуклые многогранники.** Рассмотрим теперь переменные массы $m_1, \ldots, m_n$ суммарно равные единице, т.е.,

$$m_1 + \ \ldots + m_n = 1, \qquad (36)$$

которые помещены в фиксированные точки $A_1, \ldots, A_n$. Выясним, где может находиться центр масс P такой системы.

Если $n = 2$, то, положив $m_2 = t$, получаем из (36), что $m_1 = 1 - t$ и приходим к формуле (11):

$$\vec{OP} = (1 - t) \cdot r_1 + t r_2,$$

где $r_1 = \vec{OA_1}$ и $r_2 = \vec{OA_2}$. Это означает, что когда m_2 возрастает от 0 до 1, центр масс P пробегает весь отрезок $A_1 A_2$ от A_1 до A_2.

Для $n = 3$ рассмотрим систему из трех материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2) и (A_3, m_3) в вершинах треугольника $A_1A_2A_3$ с условием (36): $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Пусть точка P — центр масс этой системы, а $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$ — ее радиус-вектор.

Согласно свойству центра масс (п.24.5) точку P можно найти так. Сначала найти центр масс Q пары материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2) (рис.24.10). Ее радиус-вектор

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}_2 \tag{37}$$

и, поскольку $\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1$, то точка Q лежит на отрезке A_1A_2. А точка P будет центром масс двухточечной системы $(Q, m_1 + m_2)$ и (A_3, m_3) и лежит на отрезке A_3Q.

Итак, каждой тройке неотрицательных чисел m_1, m_2, m_3, сумма которых равна единице, соответствует точка треугольника $A_1A_2A_3$ — центр масс системы материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3). Верно и обратное утверждение: для любой точки P, принадлежащей треугольнику $A_1A_2A_3$, можно подобрать такие числа m_1, m_2, m_3, сумма которых равна единице, что точка P будет центром масс системы материальных точек (A_1, m_2), (A_2, m_2), (A_3, m_3). Убедимся в этом.

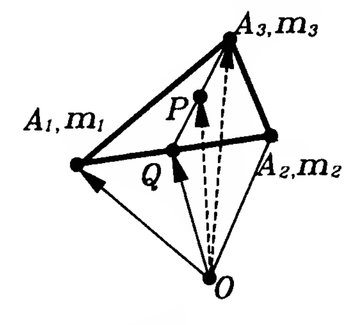


Рис.24.10

Выберем точку P в треугольнике $A_1A_2A_3$ (рис.24.10) и проведем через нее отрезок A_3Q, имеющий конец Q на стороне A_1A_2. Положим

$$m_3 = \frac{PQ}{A_3Q},\ m_2 = (1-m_3)\frac{A_1Q}{A_1A_2},$$

$$m_1 = (1-m_3)\frac{A_2Q}{A_1A_2}. \tag{38}$$

При таком выборе масс центром масс является точка P (проверьте!).

Взаимно однозначное соответствие между точками треугольника $A_1A_2A_3$ и тройками неотрицательных чисел (m_1, m_2, m_3), сумма которых равна единице, позволяет назвать эти тройки **барицентрическими координатами** точки P треугольника $A_1A_2A_3$, которая определяется радиус-вектором $\overrightarrow{OP}$ по формуле:

$$\overrightarrow{OP} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3. \tag{39}$$

Сделаем еще один шаг и рассмотрим случай $n=4$, т.е., систему из четырех материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3), (A_4, m_4). Как мы уже убедились, центр масс P этой системы лежит на отрезке A_4Q, идущем из точки A_4 в центр масс Q первых трех точек этой системы (рис.24.11). Если точки A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат в одной плоскости, то все такие отрезки заполнят тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, который также является множеством всевозможных центров переменных масс m_1, m_2, m_3, m_4, помещенных в вершинах тетраэдра. Наборы (m_1, m_2, m_3, m_4) называются **барицен-**

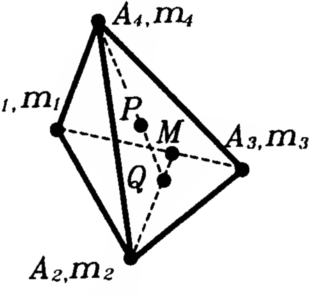


Рис.24.11

трическими координатами соотвествующих им точек тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, если $m_1+m_2+m_3+m_4=1$.

Вы, наверное, уже заметили сходство построений этого и предыдущего пунктов с теми, которые были проведены в п.11.4 и касались построения выпуклой оболочки конечного числа точек. Это не случайно. Имеет место следующая теорема, которая связывает понятия выпуклой оболочки и центра масс.

Теорема (о множестве центров масс). **Выпуклая оболочка конечного числа точек есть множество центров масс, получающихся при расположении в этих точках всевозможных масс.**

□ Рассмотрим систему материальных точек (A_1, m_1), ..., (A_n, m_n), считая точки $A_1, ..., A_n$ фиксированными, а массы $m_1, ..., m_n$ переменными. Выпуклую оболочку точек $A_1, ..., A_n$ обозначим через F, а множество всевозможных центров масс, помещенных в этих точках, обозначим через G. Чтобы доказать теорему, следует установить, во-первых, что G содержится в F, и, во-вторых, что F содержится в G. Из этого будет следовать, что F и G совпадают.

Докажем первое утверждение. Пусть точка P есть центр масс $m_1, ..., m_n$, расположенных в точках $A_1, ...,$ A_n. По свойству центра масс (п.22.5) точку P можно получить так. Сначала находим центр масс P_1, лежащий в точках A_1, A_2, если эти массы ненулевые. (Если же массы в точках A_1, A_2 нулевые, мы их просто не рассматриваем). Далее, помещая в P_1 массу m_1+m_2, находим центр масс P_2 этой массы и массы m_3, лежащей в точке A_3. Точка P_2 будет центром масс материальных точек (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3). Продолжая это построение, мы придем к центру масс P всей рассматриваемой системы материальных точек. Вместе с тем точка P_1 ле-

жит на отрезке A_1A_2 и, значит, принадлежит выпуклой оболочке точек $A_1, A_2, ..., A_n$. Точка P_2 лежит на отрезке P_1A_3 и, так как P_1 и A_3 принадлежат выпуклой оболочке точек $A_1, ..., A_n$, то точка P_2 тоже ей принадлежит. Повторяя это рассуждение, мы дойдем, наконец, до точки P и убедимся, что точка P лежит в выпуклой оболочке точек A_1, ..., A_n. Итак, множество точек G содержится в выпуклой оболочке F.

Докажем теперь, что F содержится в G. Если взять в какой-либо точке A_i массу $m > 0$, а во всех остальных точках A_k нулевые массы, то центром такой системы масс будет точка A_i. Следовательно, все точки A_i содержатся в множестве G. Докажем теперь, что множество G выпукло. Возьмем любые две его точки A и B. Пусть точка A есть центр масс $m_1, ..., m_n$ в точках $A_1, ...,$ A_n. Если эти массы заменить массами $a_i = \dfrac{m_i}{m}$, где $m = m_1 + \ ... \ + m_n$, то центром этой системы масс будет та же самая точка A. Для масс $a_1, ..., a_n$ выполняется равенство

$$a_1 + \ ... \ + a_n = 1. \qquad (40)$$

Аналогично, для точки B можно выбрать такой набор масс $b_1, ..., b_n$, помещенных в точки $A_1, ..., A_n$, для которого она будет центром масс и для которого выполняется равенство

$$b_1 + \ ... \ + b_n = 1. \qquad (41)$$

Радиус-векторы $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_B$ этих точек A и B определяются равенствами

$$\boldsymbol{r}_A = a_1\boldsymbol{r}_1 + \ ... \ + a_n\boldsymbol{r}_n \text{ и } \boldsymbol{r}_B = b_1\boldsymbol{r}_1 + \ ... \ + b_n\boldsymbol{r}_n. \qquad (42)$$

Поместим теперь в точках A_i массы

$$m_i = (1-t)\cdot a_i + tb_i, \qquad (43)$$

где $t \in [0;1]$. Тогда

$$m_1 + \ldots + m_n = (1-t)(a_1 + \ \ldots \ + a_n) + t \cdot (b_1 + \ \ldots \ + b_n) = \\ = (1-t) + t = 1. \qquad (44)$$

Центр масс P системы материальных точек (A_1, m_1), ..., (A_n, m_n) определится радиус-вектором

$$\boldsymbol{r} = m_1\boldsymbol{r}_1 + \ \ldots \ + m_n\boldsymbol{r}_n. \qquad (45)$$

Учитывая равенства (40)—(44), из (45) получим, что

$$\boldsymbol{r} = ((1-t)\cdot a_1 + tb_1)\cdot \boldsymbol{r}_1 + \ \ldots \ + ((1-t)\cdot a_n + tb_n)\cdot \boldsymbol{r}_n = \\ = (1-t)(a_1\boldsymbol{r}_1 + \ \ldots \ + a_n\boldsymbol{r}_n) + t\cdot(b_1\boldsymbol{r}_1 + \ \ldots \ + b_n\boldsymbol{r}_n) = \\ = (1-t)\cdot \boldsymbol{r}_A + t\boldsymbol{r}_B. \qquad (46)$$

Когда t меняется от 0 до 1, конец радиус-вектора $\boldsymbol{r} = (1-t)\cdot \boldsymbol{r}_A + t\boldsymbol{r}_B$ — точка P — пробегает отрезок AB от точки A до точки B. Значит весь этот отрезок состоит из центров масс, т.е. если точки A, B содержатся в множестве G, то и отрезок AB содержится в G. Следовательно, множество G — выпукло и содержит все точки $A_1, \ldots, A_n$. Поэтому G содержит и множество F — выпуклую оболочку точек $A_1, \ldots, A_n$. Итак, G и F совпадают. ■

Как установлено в п.11.4, выпуклая оболочка конечного числа точек является многогранником, вершины которого лежат разве лишь в этих точках. Тем самым и *множество центров переменных масс, помещенных в точки $A_1, \ldots, A_n$, является выпуклым многогранником, вершины которого лежат разве лишь в точках $A_1, \ldots, A_n$.*

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

ЗАДАЧИ К §18—20

Методом координат можно решать вполне традиционные геометрические задачи, в формулировках которых вовсе отсутствует даже упоминание о координатах. Вот несложный тому пример.

5.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 (рис.Р3.87). **Чему равен радиус сферы, проходящей через точку K — середину AA_1, точку L — середину B_1C_1, точку M — середину CD и D_1?**

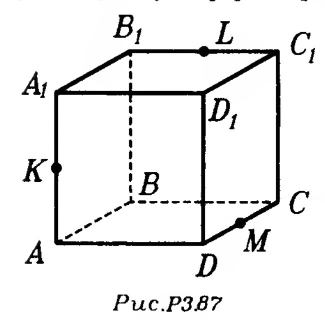


Рис.Р3.87

△ Выберем такую систему координат. Начало ее в точке A, луч AD — положительное направление оси x, луч AB — положительное направление оси y, луч AA_1 — положительное направление оси z. Запишем координаты данных точек в выбранной системе координат: $K(0;0;1)$, $L(1;2;2)$, $M(2;1;0)$, $D_1(2;0;2)$. Пусть центр сферы O имеет координаты $(x;y;z)$. Тогда $OK = OL = OM = OD_1$. Запишем эти расстояния в координатном виде, причем для удобства обойдемся без радикалов. Тогда

$$OK^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2,$$

$$OL^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2,\ OM^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2,$$

$$OD_1^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2.$$

Чтобы решить систему с тремя переменными, обычно достаточно трех уравнений(?). Составим такую систему

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 & (1) \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2 & (2) \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2. & (3) \end{cases}$$

Решив ее, получим, что $x = 1$, $y = 1{,}5$, $z = 1{,}5$ (?).

Итак, центр находится в точке $(1;1{,}5;1{,}5)$. Но тогда $R^2 = 3{,}5$ и $R = \sqrt{3{,}5}$. ▲

Конечно, такой способ может показаться скучноватым по сравнению с "чисто" геометрическим решением (кстати, а какое оно?). Но тот, кто уверен в своих умениях проводить длинные выкладки, может смело ему доверять.

5.2. Что из себя представляет фигура, каждая точка которой равноудалена от плоскости (xy) и от точки $A(0;0;2)$?

△ Вопрос на первый взгляд не вполне ясен. На самом деле требуется вот что: получив уравнение этой фигуры, узнать в

нем какую-либо известную фигуру — плоскость, шар и т.д. или, если это не получилось, анализируя это уравнение, попытаться получить некоторое представление о свойствах фигуры.

Приступим. Сначала надо получить уравнение этой фигуры. Прежде всего, выразим в координатах исходные данные. Для этого выберем произвольную точку $M(x;y;z)$, принадлежащую данной фигуре. Расстояние от нее до плоскости (xy) равно $|z|$, а

$$MA = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}. \qquad (?)$$

Итак,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}.$$

Упрощая это уравнение, придем к такому равенству:

$$|z| = 0{,}25(x^2 + y^2 + 4).$$

Первое, что напрашивается сделать теперь — это избавиться от модуля. Здесь это возможно, ибо $z > 0$. Итак, мы пришли к уравнению $z = 0{,}25(x^2 + y^2 + 4)$.

То, что за ним "скрывается" не плоскость и не сфера — понятно (?). Но что? Какая фигура? С какими свойствами?

Начинаем исследование полученного уравнения.

Прежде всего, мы обратим внимание на то, что переменные x и y находятся в четной степени (в квадрате), а потому при смене знака каждого из них на противоположный ничего в уравнении не изменится. Для фигуры, которая "скрылась" за этим уравнением, сие обстоятельство означает симметрию относительно осей x и y, а также относительно плоскостей (yz) и (xz).

Ясно, далее, что $z \geq 1$ (?). Это означает, что фигура ограничена снизу (если ось z направлена вверх) плоскостью $z = 1$.

Попробуем теперь разобраться в сечениях этой фигуры, хотя бы самых простых. Возьмем сначала сечение плоскостью, параллельной плоскости (xy). Уравнение такой плоскости $z = const$. Возьмем, к примеру, $z = 2$. И получим, что в этой плоскости выполняется равенство $x^2 + y^2 = 4$. Но за ним стоит не что иное, как окружность с центром на оси z и радиусом 2. По аналогии заключаем, что так будет при любом $z \geq 1$. Но тогда оказывается, что вся фигура — это семейство расширяющихся окружностей с центрами на оси z. Уже стало яснее (рис.Р3.88).

Пойдем дальше и рассмотрим сечения, параллельные другим координатным плоскостям. Пусть, например, $x = 1$, то есть мы сечем данную фигуру плоскостью, параллельиой плоскости (yz). Получаем:

$$z = 0{,}25y^2 + 1{,}25.$$

Узнаете параболу в плоскости (yz)? И так всегда, если брать любые значения x. И точно так же будет, если брать любые значения y?.

Такую фигуру можно представить как результат вращения некоторой(?) параболы вокруг оси z. Такая фигура и называется соответственно — параболоид вращения.

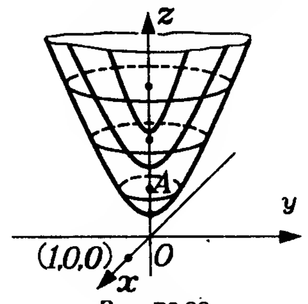


Рис.Р3.88

И вот еще что. Логика наших рассуждений была такой. Мы доказали, что всякая точка фигуры удовлетворяет некоему уравнению, после чего шел анализ уравнения. Но откуда мы знаем, что в это уравнение не попали "лишние" точки? Иначе говоря, необходимо показать, что для всякой точки, координаты которой удовлетворяют уравнению, выполняется равенство, заданиое условием, то есть расстояние от нее до плоскости (xy) равно расстоянию от нее до точки A. Часто (в нашем случае также) это доказательство сводится к проверке равносильности выкладок при работе с уравнением. Проверьте эту равносильность самостоятельно. ▲

5.3. Сколько решений имеет уравнение

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}=a$$

при $a = 1$, $\sqrt{2}$, 2?

△ На первый взгляд мы имеем дело с задачей по алгебре. Метод координат, однако, позволяет "увидеть" эту задачу как геометрическую.

В самом деле, выражение $\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$ можно дополнить до вида $\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}$. В соответствии с формулой расстояния между точками это выражение равно расстоянию между точкой $A(x;y;z)$ и точкой $B(1;0;0)$.

Аналогично рассуждая, "видим", что выражение $\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}$ равно расстоянию между той же точкой $A(x;y;z)$ и точкой $C(0;1;0)$.

Таким образом, слева в исходиом уравнении стоит сумма двух расстояний: $AB+AC$. Посчитаем теперь расстояние BC. Оно равно $\sqrt{2}$(?).

Если $a=\sqrt{2}$ (один из случаев в условии задачи), то имеем равенство $AB+AC=BC$. Оно возможно тогда и только тогда, когда точка A лежит на отрезке BC (?). Значит, при $a=$ $=\sqrt{2}$ уравнение имеет бесконечное множество решений.

Если $a=1$ (другой случай в условии задачи), то имеем неравенство: $AB+AC<BC$ (так как $1<\sqrt{2}$). Но такое неравенство не может иметь место при любом положении точки A (?). Значит, при $a=1$ уравнение не имеет решений.

И, наконец, если $a=2$ (последний случай из условия), то имеем неравенство $AB+AC>BC$ (так как $2>\sqrt{2}$). Такое неравенство имеет место при любом положении точки A вне отрезка BC (?). Значит, при $a=2$ уравнение имеет бесконечное множество решений. ▲

Обратите внимание на то, что сами решения нам, согласно условию, не нужны. Именно поэтому координатный метод в данной задаче оказался эффективным.

ЗАДАЧИ К §§21—24

5.4. ***ABCDA*$_1$*B*$_1$*C*$_1$*D*$_1$ — параллелепипед. Докажите, что для всякой точки *O* выполняется равенство**

$$\vec{OA}+\vec{OC_1}=\vec{OB_1}+\vec{OD}=\vec{OA_1}+\vec{OC}.$$

△ Запишем первое из этих равенств: $\vec{OA}+\vec{OC_1}=\vec{OB_1}+$ $+\vec{OD}$. Оно равносильно такому: $\vec{OA}-\vec{OD}=\vec{OB_1}-\vec{OC_1}$, которое в свою очередь, равносильно такому $\vec{DA}=\vec{C_1B_1}$ (?). Но последнее равенство в параллелепипеде выполняется.

Аналогично доказывается и второе равенство. ▲

Что же интересного в этой простой задаче?

Для начала заметим, что в решении нам понадобился не весь параллелепипед, а только два его диагональных сечения. Эти диагональные сечения AB_1C_1D и DA_1B_1C являются параллелограммами (рис.Р3.89). Так что у нас задача не про параллелепипед, а про параллелограммы, точнее, про один параллелограмм — AB_1C_1D, потому что для второго надо доказать то же, что и для первого. Выглядит эта задача так: "Пусть $T_1T_2T_3T_4$ — параллелограмм, а точка O — произвольная точка пространства. Докажите, что $\vec{OT_1}+\vec{OT_3} = \vec{OT_2}+\vec{OT_4}$ ".

Кроме того, мы в решении нигде не использовали то обстоятельство, что задана неплоская фигура. Что из этого следует? А то, что данную задачу можно переформулировать как задачу планиметрии(?). Тем не менее, решение будет точно таким же.

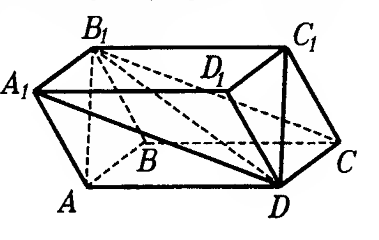


Рис.Р3.89

Вот это и стоит запомнить. Именно: при решении задач векторным способом может оказаться, что решение не зависит от размерности заданных фигур. Поэтому, решив векторным способом планиметрическую задачу, посмотрите, не проходит ли это же решение в пространстве. И наоборот.

5.5. **Докажите, что: а) диагонали параллелограмма пересекаются и в точке пересечения делятся пополам; б) диагонали параллелепипеда пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.**

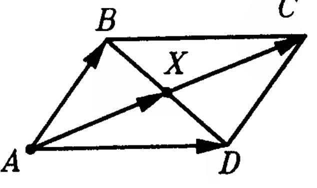


Рис.Р3.90

△ а) Вам эта задача хорошо знакома из планиметрии; тем легче показать, как ее можно решить векторным методом.

Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис.Р3.90). В плоскости ABC выберем базис из двух векторов, как-то связанных с данным параллелограммом. Можно в качестве базиса взять, например, векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$. Пусть X — общая точка двух диагоналей AC и BD данного параллелограмма. Ее принадлежность каждой из них запишем в векторном виде: $\vec{AX} = \lambda\vec{AC}$,

$0 < \lambda < 1$ (?), $\vec{AX} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AD}$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (?). Получили векторную систему. Существование общей точки X у отрезков AC и BD равносильно существованию чисел λ, α, β, удовлетворяющих этой системе.

Для решения ее вектор $\vec{AX}$ из каждого уравнения разложим в выбранном базисе. Во втором уравнении это уже сделано. Легко доводится до нужного вида и первое уравнение. Так как $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$, то $\vec{AX} = \lambda\vec{AB} + \lambda\vec{AD}$. Получилось, что вектор $\vec{AX}$ в одном и том же базисе $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$ представлен двумя разложениями: $\vec{AX} = \lambda\vec{AB} + \lambda\vec{AD}$, $\vec{AX} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AD}$.

Но мы знаем, что разложение вектора в базисе единственно! Поэтому получаем систему: $\lambda = \alpha$, $\lambda = \beta$. Так как $\alpha + \beta = 1$, то $2\lambda = 1$. Отсюда $\lambda = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Таким образом, исходная система имеет решение. Значит, общая точка диагоналей AC и BD существует. Далее, из того, что $\lambda = \frac{1}{2}$, следует, что X — середина диагонали AC, а из того, что $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, следует, что X — середина диагонали BD. Задача решена. ▲

В решении аналогичных задач (на плоскости или в пространстве) этим методом всегда присутствуют такие моменты:

1. Выбор базиса (наиболее удобного для дальнейшей работы).
2. Выбор нужного нам "ключевого" вектора, который мы будем в этом базисе раскладывать двумя способами.
3. Получение двух разложений "ключевого" вектора. Сначала можно выражать его через любые векторы, но обязательно довести разложение до векторов базиса.
4. Составление и решение системы, связывающей неизвестные коэффициенты двух разложений векторов в базисе.
5. Проверка того, что полученные числовые значения для коэффициентов удовлетворяют наложенным на них условиям.
6. Окончательное истолкование полученных результатов, т.е. в безвекторной форме.

Решите по указанной схеме задачу пункта б).

5.6. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Как найти такую точку X, для которой выполняется равенство $\vec{XA}+\vec{XB}+\vec{XC}+\vec{XD}+\vec{XA_1}+\vec{XB_1}+\vec{XC_1}+\vec{XD_1}=\vec{0}$? Единственна ли такая точка? Решите аналогичную задачу для тетраэдра. Как обобщить полученные результаты?

△ Как и во многих задачах, где заданы векторы, здесь можно обойтись без рисунка. Но надо сначала хорошо понять задачу. Что значит "найти точку", если мы не "привязываем" ее к той или иной геометрической фигуре? Одно из возможных толкований таково. Зафиксируем в пространстве одну точку — где угодно — (назовем ее полюсом) и неизвестную точку будем искать как конец вектора, отложенного от точки O. Но для этого потребуется все векторы, участвующие в задаче, выразить через векторы с началом в точке O. (Такая техника работы с векторами называется радиус-векторной.)

Тогда:

$$\vec{XA}=\vec{OA}-\vec{OX} \quad (?) \qquad \vec{XA_1}=\vec{OA_1}-\vec{OX}$$

$$\vec{XB}=\vec{OB}-\vec{OX} \qquad \vec{XB_1}=\vec{OB_1}-\vec{OX}$$

$$\vec{XC}=\vec{OC}-\vec{OX} \qquad \vec{XC_1}=\vec{OC_1}-\vec{OX}$$

$$\vec{XD}=\vec{OD}-\vec{OX} \qquad \vec{XD_1}=\vec{OD_1}-\vec{OX}$$

и исходное равенство нуль-вектору суммы этих 8 векторов перепишется в виде $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}+\vec{OA_1}+\vec{OB_1}-8\vec{OX}=\vec{0}$.

Откуда $\vec{OX}=\frac{1}{8}\left(\vec{OA}+\ldots+\vec{OD_1}\right)$.

Так как точки $A, B, \ldots, D_1$ — вершины данного параллелепипеда, то мы можем считать известной (нарисовать) их сумму, затем $\frac{1}{8}$ их суммы, что и приводит к тому, чтобы считать вектор $\vec{OX}$ найденным. Но тогда мы нашли и точку X (при желании ее можно даже нарисовать!).

Перейдем к единственности такой точки X. Предположим, что их больше одной и пусть X_1 и X_2 — две такие точки. Тогда верны равенства

$$\overrightarrow{X_1A}+\overrightarrow{X_1B}+\overrightarrow{X_1C}+\overrightarrow{X_1D}+\overrightarrow{X_1A_1}+\overrightarrow{X_1B_1}+\overrightarrow{X_1C_1}+\overrightarrow{X_1D_1}=\vec{0},$$

$$\overrightarrow{X_2A}+\overrightarrow{X_2B}+\overrightarrow{X_2C}+\overrightarrow{X_2D}+\overrightarrow{X_2A_1}+\overrightarrow{X_2B_1}+\overrightarrow{X_2C_1}+\overrightarrow{X_2D_1}=\vec{0},$$

Вычитая из первого равенства второе, мы запишем эту разность в таком виде

$$(\overrightarrow{X_1A}-\overrightarrow{X_2A})+(\overrightarrow{X_1B}-\overrightarrow{X_2B})+\ldots+(\overrightarrow{X_1D_1}-\overrightarrow{X_2D_1})=\vec{0}$$

или чуть иначе

$$(\overrightarrow{X_1A}+\overrightarrow{AX_2})+(\overrightarrow{X_1B}+\overrightarrow{BX_2})+\ldots+(\overrightarrow{X_1D_1}+\overrightarrow{D_1X_2})=\vec{0}.$$

Но сумма в каждой скобке равна $\overrightarrow{X_1X_2}$! Поэтому приходим к равенству $8\overrightarrow{X_1X_2}=\vec{0}$, откуда $\overrightarrow{X_1X_2}=\vec{0}$, что и означает совпадение точек X_1 и X_2.

Поэтому задача о единственности решена положительно — найденная нами точка X действительно одна. ▲

Мы решили задачу чисто векторно, без всякого рисунка.

Используя рисунок, мы могли бы ускорить дело. В самом деле, искомая точка "видна невооруженным глазом" — это точка пересечения диагоналей параллелепипеда(?).

Использование векторов для доказательства единственности, видимо, — кратчайший путь к результату.

Более того, при обобщении полученного факта, векторы незаменимы. В этом легко убедиться самим.

5.7. **Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найдите числа p и q, при которых векторы $p\vec{a}+q\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{a}+p\vec{b}+q\vec{c}$ коллинеарны.**

△ Здесь нужно четко понимать терминологию. Некомпланарность трех векторов означает, что ни один из них не может быть представлен в виде линейной комбинации двух других. Иначе говоря, нет таких чисел α_1 и β_1, что $\boldsymbol{c}=\alpha_1\boldsymbol{a}+\beta_1\boldsymbol{b}$.

Аналогичное требование для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Нет таких чисел α_2 и β_2, что $\boldsymbol{a}=\alpha_2\boldsymbol{c}+\beta_2\boldsymbol{b}$ и нет таких чисел α_3 и β_3, что $\boldsymbol{b}=\alpha_3\boldsymbol{a}+\beta_3\boldsymbol{c}$. В частности, из этого следует, что среди данных векторов нет $\vec{0}$ (?). Коллинеарность двух ненулевых векторов означает, что один из них (любой) получается из другого умножением на некоторое число, не равное 0.

Прежде всего заметим, что вектор $pa + qb + c$, как и вектор $a + pb + qc$ отличен от $\vec{0}$.

Если $pa + qb + c = 0$, то $c = -pa - qb$, что противоречит некомпланарности векторов a, b, c.

Если $a + pb + qc = 0$, то $a = -pb - qc$, и мы приходим к тому же противоречию.

Но тогда можно записать, что существует такое x, при котором

$$pa + qb + c = x(a + pb + qc) \Leftrightarrow (p - x)a + (q - xp)b + \\ + (1 - xq)c = \vec{0}.$$

Каждый из коэффициентов при векторах a, b, c в этом равенстве равен 0 — иначе мы получили бы, что хоть один из них является линейной комбинацией двух остальных, а это противоречит их некомпланарности(?). Отсюда получаем систему $p = x$, $q = px$, $xq = 1$. Решая ее, получим, что $p = q = 1$. ▲

5.8. **Пусть $x + y + z = 1$. Доказать, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.**

△ Как методы алгебры и анализа помогают получать результаты в геометрии, вы, разумеется, знаете. Любопытно теперь посмотреть, как можно использовать скалярное произведение для решения задач, на первый взгляд очень далеких от геометрии.

Начало решения совершенно неожиданно. Рассмотрим вектор $a = (x; y; z)$ и еще вектор $b = (1;1;1)$. Тогда их скалярное произведение равно $x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = x + y + z$. Итак, сумму $x + y + z$ можно рассматривать как скалярное произведение векторов a и b:

$$a \cdot b = x + y + z = 1.$$

А про скалярное произведение мы знаем, что для него выполняется такое неравенство:

$$|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|.$$

Но

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad |b| = \sqrt{3}.$$

И мы имеем, что

$$|x + y + z| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{3}.$$

Отсюда

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

или

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3},$$

что и требовалось доказать.

Любопытно также, что эта задача может быть решена и координатным способом с привлечением простейших геометрических представлений. Равенство $x+y+z=1$ задает нам плоскость в пространстве. Неравенство $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}$ означает, что квадрат расстояния от некоторой точки до начала координат не меньше, чем $\frac{1}{3}$. Наша задача теперь выглядит так: доказать, что всякая точка плоскости $x+y+z=1$ удалена от начала координат не меньше, чем на $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно найти расстояние от начала координат до этой плоскости(?). Теперь мы можем заметить, что эта плоскость "высекает" на осях координат единичные отрезки, иначе говоря — ребра единичного куба с общей его вершиной — началом координат. Известно, однако, что расстояние от вершины куба до плоскости, определяемой соседними с нею вершинами составляет $\frac{1}{3}$ от диагонали куба, которая в единичном кубе равна $\sqrt{3}$. Итак, расстояние от начала координат до нашей плоскости как раз и равно $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Но тогда квадрат расстояния от начала координат до любой точки нашей плоскости не меньше, чем $\frac{1}{3}$, что и требовалось доказать. ▲

5.9. **Докажите, что для любых точек A, B, C, D выполняется равенство $\vec{AD}\cdot\vec{BC}-\vec{AC}\cdot\vec{BD}+\vec{AB}\cdot\vec{CD}=\vec{0}$. Какие следствия можно получить из этого равенства для тетраэдра $ABCD$?**

△ И эту задачу решим, ничего не рисуя. Выберем начало 0 и каждый вектор в левой части равенства запишем, как разность векторов с началом в точке 0. Тогда выражение

$$(\vec{OD}-\vec{OA})\cdot(\vec{OC}-\vec{OB})-(\vec{OC}-\vec{OA})\cdot(\vec{OD}-\vec{OB})+$$

$$+(\vec{OB}-\vec{OA})\cdot(\vec{OD}-\vec{OC})$$

после упрощения дает $\vec{0}$, что и требовалось установить.

Из доказанного равенства, например, вытекает, что если у тетраэдра $ABCD$ две пары скрещивающихся ребер ортогональны, то и третья пара ребер ортогональна. ▲

5.10. **В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 точка X лежит на диагонали A_1D, причем $DX:XA_1=1:2$, точка Y лежит на диагонали D_1C, причем $D_1Y:YC=1:2$. Как вычислить а) XY; б) угол между XY и A_1D; в) угол между XY и D_1C?**

△ В качестве базиса выберем векторы $\vec{AD}$, $\vec{AB}$, $\vec{AA_1}$ (рис.Р3.91) и все необходимые векторы будем раскладывать по этому базису.

а) Сначала формула для вычисления расстояния:

$$|\vec{XY}|=\sqrt{\vec{XY}^2}.$$

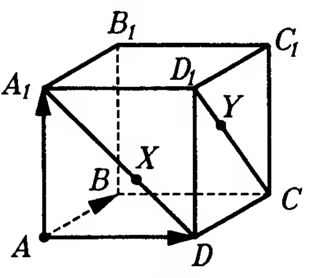


Рис.Р3.91

Далее, разложение вектора $\vec{XY}$ по выбранному базису:

$$\vec{XY}=\vec{AY}-\vec{AX}=\vec{AD_1}+\vec{D_1Y}-(\vec{AA_1}+\vec{A_1X})=$$

$$=\vec{AD}+\vec{AA_1}+\frac{1}{3}\vec{D_1C}-\left(\vec{AA_1}+\frac{2}{3}\vec{A_1D}\right)=$$

$$=\vec{AD}+\vec{AA_1}+\frac{1}{3}(\vec{AC}-\vec{AD_1})-(\vec{AA_1}+\frac{2}{3}(\vec{AD}-\vec{AA_1}))=$$

$$=\vec{AD}+\vec{AA_1}+\frac{1}{3}((\vec{AD}+\vec{AB})-(\vec{AD}+\vec{AA_1}))-\left(\vec{AA_1}+\frac{2}{3}\vec{AD}-\frac{2}{3}\vec{AA_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(\vec{AD}+\vec{AB}+\vec{AA_1}).$$

Тогда

$$\overrightarrow{XY}^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})^2 = \frac{1}{9}\cdot 3 = \frac{1}{3}.$$

Поэтому $XY = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Любопытно заметить, что XY оказалось равно $\dfrac{1}{3}AC_1$ (?).

б) Запишем формулу для угла φ между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

Про вектор $\overrightarrow{XY}$ мы знаем и разложение его по базису:

$$\overrightarrow{XY} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})$$

и его длину:

$$|\overrightarrow{XY}| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Для вектора $\overrightarrow{A_1D}$ имеем:

$$\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1},\ \ |\overrightarrow{A_1D}| = \sqrt{2}.$$

Поэтому угол α между XY и A_1D определится из равенства

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1})}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1-1) = 0.$$

Итак, прямые XY и A_1D перпендикулярны.

в) Выкладки, аналогичные предыдущим, покажут, что прямые XY и C_1D — перпендикулярны. Сделайте их сами.

Из результатов пунктов б) и в) следует, что XY — общий перпендикуляр прямых A_1D и C_1D, а значит расстояние между ними равно $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. ▲

5.11. **Выберите три точки с конкретными координатами. Составьте уравнение плоскости, проходящей через эти точки.**

△ Пусть даны три точки: $K(1;-2;3)$, $L(-1;2;0)$ и $M(2;-1;2)$. Их координаты выбраны произвольно. Для составления уравнения плоскости, проходящей через эти точки, можно пойти разными путями.

Первый путь. Пишем уравнение плоскости в виде

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Подставим в это уравнение координаты всех данных точек. Получим систему из трех уравнений с четырьмя неизвестными: A, B, C, D. Для ее решения один из неизвестных коэффициентов (скажем D) будем считать параметром и выразим, решая систему, оставшиеся коэффициенты через этот параметр. Если эта система имеет единственное решение (т.е. существует плоскость, причем единственная, проходящая через данные точки), то коэффициенты A, B, C будут иметь вид kD. Подставим эти значения A, B, C в исходное уравнение и, сократив обе его части на D (в случае $D \neq 0$), придем к искомому уравнению плоскости. Самостоятельно проделайте всю эту работу в данном конкретном случае. Как вы разберетесь со случаем $D = 0$?

Второй путь векторный. Пусть точка $T(x;y;z)$ лежит в плоскости KLM. Тогда

$$\vec{KT} = \alpha\vec{KL} + \beta\vec{KM}. \qquad (1)$$

(Можно было выразить $\vec{LT}$ или $\vec{MT}$ через оставшиеся векторы. Здесь надо быть аккуратным и проверить, что два вектора, через которые мы выражаем третий, действительно образуют базис плоскости. Как это сделать?)

Запишем координаты векторов. Если O — начало координат, то

$$\vec{KL} = \vec{OL} - \vec{OK}, \quad \vec{OL} = (-1;2;0), \quad \vec{OK} = (1;-2;3),$$

значит, $\vec{KL} = (-2;4;-3)$, аналогично

$$\vec{KM} = (1;1;-1), \quad \vec{KT} = (x-1;y+2;z-3).$$

Перепишем равенство (1) в координатном виде:

$$(x-1;y+2;z-3) = \alpha(-2;4;-3) + \beta(1;1;-1) =$$
$$= (-2\alpha+\beta;4\alpha+\beta;-3\alpha-\beta).$$

Отсюда получим систему(?):

$$\begin{cases} x-1=-2\alpha+\beta \\ y+2=4\alpha+\beta \\ z-3=-3\alpha-\beta. \end{cases} \qquad (2)$$

Выразим α и β из каких-либо двух уравнений системы (2) — проще всего из второго и третьего уравнения. Получим:

$$\alpha = y+z-1, \;\; \beta = -3y-4z+6.$$

Подставим полученные значения α и β в первое уравнение системы (2). Окончательно, получим $x+5y+6z-9=0$. Это и будет искомое уравнение плоскости. ▲

5.12. **Найдите расстояние между параллельными плоскостями $x-y+2z-4=0$ и $x-y+2z-10=0$.**

△ Как и всякую задачу о фигурах, заданных уравнениями, ее можно решить, не прибегая к рисунку. Попробуйте отыскать такое решение — это не просто.

Мы же разберемся с этой задачей, используя рисунок (рис.Р3.92).

Обозначим первую плоскость α, отметим на осях координат точки, в которых они пересекают плоскость α, назовем их A, B, C. (Для нахождения абсциссы точки A достаточно в уравнении плоскости α положить $y=0$, $z=0$. Получим $x=4$. Аналогично находим координаты на осях y и z.)

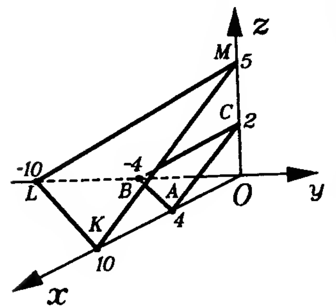


Рис.Р3.92

Обозначим вторую плоскость β и проделаем для нее то же, что и для плоскости α — получим точки K, L, M (?)

(Треугольники ABC и KLM называются "треугольниками следов" для плоскостей α и β. Отрезки AB, BC, AC — отрезки, по которым плоскость α пересекает координатные четверти на плоскостях xy, yz, xz — как бы "следы" плоскости α на координатных плоскостях.)

Расстояние между параллельными плоскостями равно длине их общего перпендикуляра, причем он может быть проведен из любой точки одной их них на другую.

Здесь удобно провести перпендикуляр из точки C на плоскость KLM. Обозначим его CD (причем рисовать его не будем, рассчитывая на ваше пространственное мышление). Тогда $CD = CM \cdot \cos\varphi$, где φ — угол DCM, $CM = 3$, и осталось только найти $\cos\varphi$. Так как угол $\varphi = \angle DCM$, то его можно найти как угол между вектором $\vec{CD}$ и единичным вектором $\boldsymbol{k}$ оси z.

Единичный вектор $\boldsymbol{k}$ оси z имеет координаты $(0;0;1)$, а вектор $\vec{CD}$ — это вектор нормали к каждой из данных плоскостей, а поэтому имеет координаты $(1;-1;2)$.

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{k}\cdot\vec{CD}}{|\boldsymbol{k}|\cdot\left|\vec{CD}\right|} = \frac{2}{1\cdot\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}. \qquad (?)$$

Окончательно,

$$CD = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}. \ \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧИ К §18

Дополняем теорию

5.1. Даны две точки: $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$. а) Найдите координаты середины отрезка AB. б) Найдите координаты точки K, которая делит отрезок AB в заданном отношении $p:q$. в) Найдите координаты точки L прямой такой, что $AL:LB = \lambda$.

Рисуем

5.2. Нарисуйте систему координат, а в ней точку $A(1;1;0)$. Нарисуйте прямую a, проходящую через точку A и параллельную оси z. На прямой a отметьте точку B, у которой координата z равна 3. Запишите координаты точки B. Нарисуйте проекции точки B на оси координат. Каковы ко-

ординаты этих проекций? Нарисуйте проекции точки B на плоскости координат. Каковы координаты этих проекций?

5.3. Нарисуйте систему координат, а в ней точку $A(0;-1;1)$. Нарисуйте прямую a, проходящую через A и параллельную оси z. На прямой a отметьте точку B, у которой координата z равна 3. Решите для нее те же задачи, что и в задаче 5.1.

5.4. Нарисуйте систему координат. Нарисуйте точки

$A(1;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(-2;1;0)$, $D(-1;-2;-1)$,

$K(0;0;-3)$, $M(-1;-1;1)$.

Нарисуйте отрезок AB. Пересекает ли он плоскость yz? Пересекает ли он другие координатные плоскости? Какой из отрезков с концами в данных точках пересекает плоскость yz? А плоскость zx? А плоскость xy? Есть ли среди отрезков с концами в данных точках такой, который пересекает хотя бы одну ось координат?

Планируем

5.5. Пусть даны точки $A(1;2;-3)$, $B(-2;-4;6)$ и $C(3;0;2)$. Как найти координаты: а) середины отрезка AB; б) точки пересечения медиан треугольника ABC; в) точки D такой, что она вместе с точками A, B, C является вершиной параллелограмма $ABDC$?

5.6. Как найти расстояние AB, если:

а) $A(-2;3;-4)$, $B(2;-3;4)$; б) $A(a;b;c)$, $B(b;c;a)$?

5.7. Как установить вид треугольника ABC по сторонам и углам, если:

а) $A(-1;2;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(2;3;-1)$;

б) $A(0;0;a)$, $B(0;a;0)$, $C(a;0;0)$;

в) $A(a;b;c)$, $B(c;a;b)$, $C(b;c;a)$?

5.8. Даны точки $A(5,1,-3)$, $B(1,2,-6)$, $C(-3,3,2)$. Требуется выяснить, какая из них ближе: а) к началу координат; б) к плоскости yz; в) к оси x? Как это сделать? г) Как найти ту из них, которая ближе всех к какой-либо координатной оси? д) Как найти ту из них, которая ближе к какой-либо координатной плоскости?

5.9. Нарисуйте куб. Пусть его ребро равно 2. Выберите начало координат в одной из его вершин, положительные направления осей координат вдоль его ребер. Как найти коорди-

наты: а) всех его вершин; б) середин ребер, выходящих из точки, которая является концом той же диагонали куба, что и начало координат; в) центров всех его граней; г) центра симметрии; д) центра правильного треугольника, вершины которого находятся в вершинах куба? Как вычислить расстояния между: е) серединами ребер, не лежащих в одной грани; ж) серединами двух скрещивающихся ребер; з) центром куба и серединой какого-либо его ребра; и) центрами двух непараллельных сечений, проходящих через вершины куба и являющихся треугольниками?

5.10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Пусть точка K — середина AD, точка L — середина C_1D_1, точка M — центр грани ABB_1A_1. а) Как вычислить расстояния KL, LM? б) Как найти координаты точки пересечения медиан треугольника KLM? в) Как доказать, что точки пересечения медиан треугольников B_1D_1A, BDC_1 и середина диагонали B_1D лежат на одной прямой?

Представляем

5.11. Нарисуйте систему координат. Какие координаты равны нулю у точки, лежащей: а) в плоскости yz; б) на оси x; в) на оси y?

5.12. Как расположена в системе координат точка, если у нее: а) $x=0$; б) $x=y=0$; в) $y=0$, $z=1$; г) $z=-1$, $x=1$?

Оцениваем

5.13. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. В каких границах лежит расстояние KL, если точка K лежит на D_1A, а точка L лежит на C_1D, причем $D_1K=C_1L$?

Сделаем

5.14. а) Пусть известны координаты трех вершин параллелограмма. Как найти координаты четвертой его вершины? б) Решите аналогичную задачу для параллелепипеда.

5.15. Точки $A(1;0;0)$ и $B(-1;0;0)$ являются вершинами правильного тетраэдра, основание которого лежит в плоскости xOy. Как узнать, каковы координаты других его вершин?

5.16. Пусть точка удалена от начала координат на 1. а) Запишите зависимость между ее координатами. б) Докажите, что модуль любой ее координаты не больше 1. Что это значит, если говорить о геометрических величинах? в) Докажите, что сумма квадратов любых двух ее координат не больше 1. Что это значит, если говорить о геометрических величинах? г) Пусть у

этой точки две координаты равны. Какая теперь зависимость существует между ее координатами? д) Пусть в зависимости, полученной в пункте г), одна из координат стала увеличиваться. Что будет с другой? Что это означает с геометрической точки зрения?

5.17. Дайте геометрическое истолкование таким соотношениям:

а) $x^2+y^2+z^2=2$; б) $x^2+y^2+z^2\geq 4$;

в) $1\leq x^2+y^2+z^2\leq 3$; г) $(x-1)^2+y^2+z^2=(x+1)^2+y^2+z^2$;

д) $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2>(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$.

5.18. Сколько решений имеет уравнение:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}=a$$

при $a=2,\ \sqrt{6},\ 3$.

ЗАДАЧИ К §19

Рисуем

5.19. а)В системе координат нарисуйте плоскость, перпендикулярную оси x и проходящую через точку $(1;0;0)$. Возьмите любую точку этой плоскости и объясните, почему координата равна 1. б) Нарисуйте точку $A(-2;3;1)$ и плоскость, проходящую через точку A и перпендикулярную оси x. Каким характерным свойством обладают точки этой плоскости?

5.20. Нарисуйте плоскости, перпендикулярные осям координат и проходящие через точки: а) $(0;1;0)$; б) $(1;1;0)$; в) $(1;1;1)$.

5.21. а) На плоскости xy нарисуйте прямую $y=x$. Нарисуйте плоскость, перпендикулярную плоскости xy, проходящую через эту прямую. Возьмите любую точку на этой плоскости. Объясните, почему для ее координат x и y верно равенство $y=x$. б) Решите аналогичную задачу для плоскости xz и прямой $x+z=1$.

5.22. Нарисуйте фигуру, уравнение которой:

а) $xy=0$; б) $xyz=0$; в) $x^2+y^2+z^2=0$; г) $|x|=2$;

д) $|x|=1$ и $|y=1|$; е) $|x-1|=1$; ж) $|z-1|=|z+1|$; з) $x=y=z$;

и) $x^2+y^2=1$ и $z=1$.

5.23. Нарисуйте фигуру, которая определяется условием:

$x^2+y^2+z^2=1$ и а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=2$; г) $x=3$;

д) $y=-1$; е) $z=-4$; ж) $|y|=2$; з) $|z|=3$; и) $x+y=1$;

к) $y-z=2$; л) $z=x^2+y^2$; м) $x=-2$ и $y=-1$.

5.24. Нарисуйте фигуру, заданную условием:

а) $|x|\le 1$, $|y|\le 1$, $|z|\le 1$; б) $|x|+|y|+|z|\le 2$;

в) $|x|+|y|\le 2$ и $|y|+|z|\le 2$; г) $2x^2+y^2+z^2=1$;

д) $x^2+y^2-z^2=1$; е) $z=x^2-y^2$; ж) $x=y^2+z^2$;

э) $z^2=x^2+y^2$; и) $x+y+z=2$ и $xy+yz+zx=1$.

Планируем

5.25. Как записать уравнение сферы:

а) с центром в начале координат и радиусом 1;

б) с центром в точке $(-1;-1;1)$ и радиусом 1;

в) с центром в точке $(a;-a;a)$ и радиусом a;

г) проходящей через точки $A(1;1;1)$, $B(1;-1;-1)$, $C(-1;1;1)$ и $D(2;0;0)$;

д) касающейся плоскости yz в точке $(0;1;2)$ и радиусом 3;

е) касающейся всех трех координатных плоскостей и радиусом 1?

5.26. Как записать уравнение какой-либо прямой, которая параллельна:

а) одной из координатных плоскостей;

б) двум координатным плоскостям;

в) координатной оси?

5.27. Как записать уравнение какой-либо прямой, которая перпендикулярна: а) одной из координатных плоскостей; б) оси x?

5.28. Как записать уравнение прямой:

а) проходящей через точку $(-2;1;-3)$ и перпендикулярной плоскости xy;

б) проходящей через точку $(-2;1;-3)$, перпендикулярной оси x и пересекающей ее;

в) совпадающей с осью x;

г) параллельной оси y и проходящей через точку $(0;1;1)$;

д) параллельной оси y и проходящей через точку $(-1;-1;2)$;

е) параллельной плоскостям xy и yz и проходящей через точку $(1;1;-1)$?

5.29. Сфера задается уравнением $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=$ $=1$. Как найти координаты точки этой сферы:

а) ближайшей к точке O;

б) самой далекой от точки O;

в) ближайшей к каждой из координатных плоскостей;

г) самой далекой от каждой из координатных плоскостей;

д) ближайшей к каждой из координатных осей;

е) самой далекой от каждой из координатных осей;

ж) ближайшей к точке $(2;2;2)$;

з) самой далекой от точки $(2;2;2)$.

5.30. Как написать уравнение сферы: а) с центром в точке $(a;-a;a)$ и радиусом a; б) с центром в точке $(1;-1;1)$ и касающейся одной из координатных плоскостей; в) с центром в точке $(3;4;-5)$ и касающейся одной из координатных плоскостей; г) с центром в точке $(-3;-1;2)$ и касающейся одной из координатных осей?

5.31. Точка имеет координаты $(-1;2;0)$. Как написать уравнение сферы, которая: а) проходит через эту точку; б) не проходит через эту точку; в) проходит через эту точку и имеет радиус 1?

5.32. Как написать уравнение сферы, проходящей через точки:

а) $(-1;-1;-1)$ и $(-1;-3;-1)$; б) $(1;2;3)$ и $(4;5;6)$;

в) $(-2;0;0)$, $(0;-2;0)$ и $(0;0;2)$;

г) $(1;1;1)$, $(1;-1;-1)$, $(-1;1;1)$, $(2;0;0)$?

5.33. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 2. Точка K — середина CD, точка L — середина B_1C_1, точка M — середина AA_1. Как написать уравнение сферы, проходящей через точки:

а) A, B, C, D_1; б) A_1, B, C, D; в) A, A_1, D, K;

г) A, C, B_1, L; д) B, K, L, M?

На какой из них лежат все вершины куба?

5.34. Как вычислить расстояние от начала координат до фигуры, заданной такими условиями:

а) $x=3$; б) $x+y=1$; в) $y-z=-2$; г) $x\geq 5$, $y\geq 5$, $z\geq 5$;

д) $x^2+y^2=1$, $z\geq 1$; е) $1\leq x+y\leq 2$; ж) $x=y^2+z^2+1$;

з) $(y-2)^2+(z-2)^2=1$?

5.35. Какая фигура в пространстве задается условиями:

а) $x \ge 0$, $y \le 0$; б) $x \le 0$, $y \ge 0$, $z = 0$; в) $-1 \le x \le 1$;

г) $|z| \ge 1$; д) $|x| \le 2$, $|y| \le 2$, $|z| \le 2$?

5.36. Прямая задается условием: а) $x = 1$, $z = 3$; б) $x = 1$, $y - z = 2$; в) $y - z = -1$, $y - x = 1$. Как она расположена по отношению к плоскостям координат? к осям координат?

5.37. Как расположены между собой прямая a, задаваемая условием $x = 5$, $y = 3$, и прямая b, задаваемая условием $y = 2$, $z = 1$?

Исследуем

5.38. В треугольнике ABC $A(-1;2;3)$ — вершина прямого угла. Как найти координаты вершин B и C, если известно, что B и C лежат на прямой MN, где $M(-1;3;2)$, $N(1;1;3)$ и $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$?

5.39. Объем прямой треугольной призмы равен 3. Координаты трех вершин одного основания таковы: $(1;0;1)$, $(2;0;0)$, $(0;1;0)$. Как найти координаты вершины призмы, лежащей на одном ребре с первой из этих вершин?

Поступаем в ВУЗ.

5.40. Найдите координаты точки M, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек $A(1,2,3)$ и $B(-3;3;2)$.

Ответ: (-1;0;0).

5.41. Докажите, что треугольник ABC, вершины которого расположены в точках $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$, $C(1;1;1)$ — прямоугольный. Найдите расстояние от начала системы координат до центра окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: $\sqrt{1,5}$.

5.42. Докажите, что точки $A(1;-1;1)$, $B(1;3;1)$, $C(4;3;1)$, $D(4;-1;1)$ являются вершинами прямоугольника. Вычислите длину его диагоналей и координаты их точки пересечения.

Ответ: 5; (2,5;1;1).

5.43. Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $(3;2;4)$.

Ответ: $x = 3$.

5.44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. $A(2,-1,1)$, $B(1;3;4)$, $D(6;0;1)$, $A_1(2,0,0)$. Найдите длину диагонали AC_1.

Ответ: 7.

5.45. Тетраэдр задан координатами своих вершин $A(3;0;1)$, $B(-1;4;1)$, $C(5;2;3)$, $D(0;-5;4)$. Вычислите расстояние от вершины A до точки пересечения медиан противоположной грани.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{51}}{3}$.

5.46. Точки $A(1;2;3)$, $B(1;5;3)$, $C(3;3;3)$ лежат на окружности нижнего основания цилиндра, а точка $D(2;3;7)$ — на его верхнем основании. Найдите координаты центров оснований и объем цилиндра.

Ответ: $(1,5;3,5;3)$, $(1,5;3,5;7)$, 10π.

5.47. Точки $A(1;2;-2)$, $B(4;2;-2)$, $C(3;4;-2)$ лежат на окружности основания конуса, высота которого равна 3. Конус пересекает плоскость $z=0$. Найдите координаты его вершины и площадь сечения конуса этой плоскостью.

Ответ. Координаты вершины — $(2,5;2,5;1)$. Площадь сечения равна $5\pi/18$.

ЗАДАЧИ К §21

Рисуем

5.48. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте вектор, задаваемый его вершинами и равный:

а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{D_1D}$; в) $\overrightarrow{B_1C}$; г) $\overrightarrow{A_1B}$.

Нарисуйте вектор, равный $\overrightarrow{C_1D}$ с началом в точке:

д) B_1; е) A.

Равны ли векторы: ж) $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{B_1D}$; з) $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$?

5.49. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма. Точка K — середина ребра AC. От всех точек призмы откладывается вектор $\overrightarrow{A_1K}$. Нарисуйте фигуру, которую в призме образуют их концы.

5.50. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. От всех его точек откладывается вектор $\overrightarrow{B_1O}$, где точка O — центр куба. Нарисуйте фигуру, которую образуют концы таких векторов. Нарисуйте пересечение и объединение исходного куба и полученной фигуры.

Планируем

5.51. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Как вычислить угол между векторами:

а) $\overrightarrow{B_1D_1}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{CD_1}$; в) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{B_1A}$;

г) $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{A_1C}$; д) $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{BD}$; е) $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$?

Представляем

5.52. Могут ли равные векторы лежать на: а) скрещивающихся прямых; б) ребрах правильного тетраэдра; в) ребрах какого-либо правильного многогранника?

5.53. Какую фигуру образуют концы X всех единичных векторов $\overrightarrow{OX}$, если эти векторы отложить от каждой точки единичной сферы с центром O?

5.54. Какую фигуру образуют концы равных друг другу векторов, отложенных от: а) прямой; б) отрезка; в) плоскости; г) треугольника; д) круга; е) тетраэдра; ж) шара; з) правильного многогранника?

ЗАДАЧИ К §22

Дополняем теорию

5.55. Докажите неравенство $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$. Обобщите его. Дайте геометрическое истолкование этому обобщению для случая трех векторов, не лежащих в одной плоскости.

5.56. Пусть A и B — две любые точки. Докажите, что при любом выборе точек O_1 и O_2 верно равенство:

$$\overrightarrow{O_1B} - \overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{O_2B} - \overrightarrow{O_2A}.$$

5.57. Пусть точки K и L не лежат в плоскости ABC. Докажите, что параллельность прямой KL и плоскости ABC равносильна выполнению равенства: $\overrightarrow{KL} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

5.58. Используя векторные соотношения, запишите равенства, равносильные таким утверждениям:

а) точка X лежит на прямой AB;

б) точка X лежит на отрезке AB;

в) точка X лежит на плоскости ABC.

5.59. а) Дан вектор $\boldsymbol{a} = (x; y; z)$. Какие координаты имеет вектор $-\boldsymbol{a}$? б) Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Какие координаты имеет вектор $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$? в) Даны векторы $\boldsymbol{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Какие координаты имеет вектор $\alpha \cdot \boldsymbol{a} + \beta \cdot \boldsymbol{b}$?

Рисуем

5.60. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Нарисуйте вектор $\vec{AX}$, равный сумме векторов $\vec{AA_1}$ и:

а) $\vec{AB}$; б) $\vec{BC}$; в) $\vec{C_1C}$; г) $\vec{B_1C}$; д) $\vec{DC_1}$; е) $\vec{A_1C}$; ж) $\vec{AC_1}$.

5.61. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Нарисуйте вектор $\vec{AX}$, равный:

а) $\vec{AB} + \vec{CC_1}$; б) $\vec{DC} + \vec{B_1D_1}$; в) $\vec{AB_1} + \vec{AD_1}$; г) $\vec{DC_1} + \vec{A_1C}$;

д) $\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD_1}$; е) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1}$; ж) $\vec{AB_1} + \vec{BC} + \vec{C_1A_1}$;

з) $\vec{AA_1} - \vec{AB}$; и) $\vec{AA_1} - \vec{C_1C}$; к) $\vec{AA_1} - \vec{A_1C}$.

5.62. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Нарисуйте составляющие по плоскости ABC и прямой $\vec{AA_1}$ таких векторов:

а) $\vec{AB_1}$; б) $\vec{CA_1}$; в) $\vec{D_1B}$; г) $\vec{DK}$,

где точка K — центр грани ABA_1B_1.

5.63. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Точка K — середина ребра BB_1, точка L — центр грани CC_1D_1D. Нарисуйте составляющие по прямым AB, AD, AA_1 векторов: а) $\vec{AC_1}$; б) $\vec{B_1D}$; в) $\vec{DK}$; г) $\vec{KL}$.

Планируем

5.64. Как найти координаты вектора $\vec{AB}$ и его длину, если:

а) $A(0;0;0)$, $B(-2;-3;-1)$; б) $A(-1;1;-1)$, $B(0;-1;0)$;

в) $A(-1;2;3)$, $B(-1;2;-3)$; г) $A(a;b;c)$, $B(c;a;b)$?

5.65. От точки A отложили вектор $\vec{AB} = \boldsymbol{a}$. Как найти координаты точки B, если:

а) $A(0;0;0)$, $\boldsymbol{a} = (-1;1;2)$; б) $A(-1;1;-1)$, $\boldsymbol{a} = (0;0;1)$;

в) $A(-2;1;0)$, $\boldsymbol{a} = (2;-1;3)$; г) $A(-4;-3;1)$, $\boldsymbol{a} = (4;3;-1)$;

д) $A(a;b;c)$, $\boldsymbol{a} = (-a;-b;-c)$?

5.66. Как найти координаты единичного вектора (длина которого равна 1), если он образует:

а) с осью x угол 60°, а с осью y угол 45°;

б) с плоскостью xy угол 30°, а с плоскостью yz угол 45°;

в) с осью z угол 60°, а с плоскостью xz угол 45°;

г) с осями координат углы φ_1, φ_2, φ_3?

5.67. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Начало координат в точке B, положительные лучи осей координат — лучи BA, BC и BB_1. Как найти координаты вектора:

а) $\vec{BC_1}$; б) $\vec{BD_1}$; в) $\vec{AC}$; г) $\vec{DA}$; д) $\vec{CD}$; е) $\vec{A_1C}$?

5.68. Даны векторы $\boldsymbol{a} = (-2;1;0)$ и $\boldsymbol{b} = (3;-1;-2)$. Как найти координаты векторов:

а) $-\boldsymbol{b}$; б) $2\boldsymbol{a}$; в) $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$; г) $2\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$; д) $0{,}5(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$?

5.69. Даны векторы $\boldsymbol{a} = (1;-2;0)$ и $\boldsymbol{b} = (-2;1;-1)$. Как вычислить: а) $|\boldsymbol{a}|$; б) $|\boldsymbol{b}|$; в) $|2\boldsymbol{a}|$; г) $|-0{,}5\boldsymbol{b}|$; д) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$; е) $|2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$?

5.70. Вектор $\boldsymbol{a}$ с координатами $(x;y;z)$ имеет длину 1.

а) Какая связь между его координатами?

б) Пусть две координаты его известны. Как найти третью?

5.71. Пусть известны координаты вектора. Как вычислить углы, которые он образует с осями координат? С плоскостями координат?

5.72. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Докажите, что на диагонали B_1D лежат середины других диагоналей параллелепипеда и точки пересечения медиан треугольников A_1C_1B и D_1AC.

Поступаем в ВУЗ

5.73. Даны векторы $\boldsymbol{a} = (-1;2;0)$ и $\boldsymbol{b} = (2;-3;-2)$. Найдите координаты вектора $2\boldsymbol{a} + 0{,}5\boldsymbol{b}$.

Ответ: $(-1;2{,}5;-1)$.

5.74. Даны три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, каждые два из которых неколлинеарны. Найдите их сумму, если вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{c}$, а вектор $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$.

Ответ: $\vec{0}$.

5.75. Даны четыре точки $A(-2;-3;8)$, $B(2;1;7)$, $C(1;4;5)$ и $D(-7;-4;7)$. Проверьте коллинеарность векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$.

5.76. Пирамида задана координатами своих вершин $S(0;0;2)$, $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$. Найдите координаты точки M, лежащей на оси z, и координаты точки N, лежащей в плоскости SBC, если известно, что координаты вектора $\vec{MN}$ таковы — $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0\right)$.

Ответ: $\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

5.77. В призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M лежит на отрезке B_1C_1 так, что $B_1M:B_1C_1=2{:}3$. Разложите вектор $\vec{AM}$ по векторам $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AA_1}$.

Ответ: Соответственные коэффициенты разложения — $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1.

Переключаемся

5.78. К вершине A треножника $ABCD$ подвешен груз P. Ножки треножника AB, AC, AD равны, укреплены на горизонтальной плоскости, образуют между собой прямые углы, а с вертикалью — равные углы. Найдите усилия в каждой из ножек треножника.

ЗАДАЧИ К §23

Дополняем теорию

5.79. Векторы $\boldsymbol{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\boldsymbol{b}=(x_2;y_2;z_2)$ перпендикулярны. Какой зависимостью связаны их координаты?

П л а н и р у е м

5.80. Пусть $\boldsymbol{a} = (0;1;-2)$ и $\boldsymbol{b} = (-2;1;-1)$. Как вычислить:

а) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$; б) $-2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$; в) $\boldsymbol{a} \cdot 0{,}5\boldsymbol{b}$; г) $-3\boldsymbol{a} \cdot 2\boldsymbol{b}$; д) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$;

е) $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})$; ж) $(-4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \cdot (0{,}5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$?

5.81. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — единичные, угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 30°, между $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — 60°, между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ — 60°. Как вычислить:

а) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$; б) $-2\boldsymbol{a} \cdot 5\boldsymbol{c}$; в) $0{,}5\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$; г) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$;

д) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$; е) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

ж) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$?

5.82. $\boldsymbol{a} = (1;-2;0)$ и $\boldsymbol{b} = (0;2;-1)$. Как вычислить, используя скалярное умножение:

а) $|\boldsymbol{a}|$; б) $|2\boldsymbol{b}|$; в) $|-3\boldsymbol{a}|$; г) $|0{,}5\boldsymbol{b}|$; д) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$; е) $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$?

5.83. Пусть $\boldsymbol{a} = (0;1;-2)$ и $\boldsymbol{b} = (-2;1;-1)$. Как вычислить угол между векторами:

а) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; б) $-2\boldsymbol{a}$ и $3\boldsymbol{b}$; в) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$?

5.84. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1. Как вычислить: а) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BK}$, где точка K — центр грани ACD; д) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{LM}$, где точка L — середина ребра AC, а точка M — середина ребра BD?

5.85. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб с ребром 1. Как вычислить скалярные произведения вектора $\overrightarrow{AB}$ на:

а) $\overrightarrow{C_1D_1}$; б) $\overrightarrow{D_1D}$; в) $\overrightarrow{DC_1}$; г) $\overrightarrow{B_1D_1}$;

д) $\overrightarrow{B_1C}$; е) $\overrightarrow{A_1C}$; ж) $\overrightarrow{B_1D}$?

5.86. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Как вычислить угол между:

а) $\overrightarrow{B_1D_1}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{CD_1}$; в) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{B_1A}$;

г) $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{A_1C}$; д) $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{BD}$; е) $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$?

Д у м а е м

5.87. Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что равносильны два утверждения: $AB \perp CD$ и $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

5.88. Даны длины трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины, и углы между ними. Как найти длину диагонали параллелепипеда, выходящей из той же вершины?

5.89. В кубе соединили отрезками середины скрещивающихся ребер. Докажите, что все такие отрезки равны.

5.90. В правильном тетраэдре $PABC$ с ребром 1 точка X лежит на ребре AP и $PX:XA = 1:2$, точка Y лежит на ребре BC и $CY:YB = 1:2$. Как вычислить: а) XY; б) угол между XY и PA; в) угол между XY и PC ?

5.91. Как найти α и β, при которых вектор $\boldsymbol{a} = (3,-1,\alpha)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{b} = (2;\beta;1)$, если $|\boldsymbol{b}| = 3$?

Поступаем в ВУЗ

5.92. При каком значении z векторы $\boldsymbol{a} = (6;0;12)$ и $\boldsymbol{b} = (-8;13;z)$ перпендикулярны?

Ответ: 4.

5.93. Найдите косинусы углов, которые образуют с базисными векторами вектор $\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Ответ: $\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}$.

5.94. Векторы $\vec{AB} = (3;-2;2)$ и $\vec{BC} = (-1;0;-2)$ являются смежными сторонами параллелограмма. Определите величину угла между диагоналями AC и BD.

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

5.95. Найдите угол между векторами $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, если O — начало координат, вектор $\vec{OA}$ составляет с осями координат Ox, Oy и Oz углы, соответственно равные $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, и точка B имеет координаты $(-2;-2;-2\sqrt{2})$.

Ответ: π.

5.96. Вектор $\boldsymbol{c}$, перпендикулярный векторам $\boldsymbol{a} = (1;1;1)$ и $\boldsymbol{b} = (1;-1;3)$, образует с осью Oz тупой угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\boldsymbol{c}| = 3$.

Ответ: $\left(\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

5.97. Вектор $\boldsymbol{a}$, у которого первая координата больше второй, перпендикулярен вектору $\boldsymbol{b} = (1;-3;-1)$ и образует с осью Oz угол, равный 135 градусов. Найдите его координаты, если известно, что $|\boldsymbol{a}| = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $(4;3;-5)$.

5.98. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\boldsymbol{c}$ образует с каждым из них угол $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 5$ и $|\boldsymbol{c}| = 8$, вычислите скалярное произведение $(3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c})$.

Ответ: -62.

5.99. Найдите вектор $\boldsymbol{a} = (x;y;z)$, образующий равные углы с векторами $\boldsymbol{b} = (y;-2z;3x)$, $\boldsymbol{c} = (2z;3x;-y)$, если $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{d} = (1;-1;2)$, $|\boldsymbol{a}| = 2\sqrt{3}$ и угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью Oy тупой.

Ответ: $(2;-2;-2)$.

5.100. Вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{b} = (12;-16;-15)$, образует с осью Oz острый угол. Зная, что $|\boldsymbol{a}| = 100$, найдите его координаты.

Ответ: $(-48;64;60)$.

5.101. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами на прямых AD и BC пересекает прямую EF и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

Ответ: $a\frac{\sqrt{23}}{6}$.

5.102. Векторы $AB = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}$ и $AC = 5\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ служат сторонами треугольника ABC. Найдите длину медианы AM.

Ответ: $\sqrt{18}$.

ЗАДАЧИ К §24

Рисуем

5.103. Нарисуйте плоскость, уравнение которой:

а) $x - y = 0$; б) $y + z = 1$; в) $x + y + z = 1$; г) $-x - y + z = 2$;

д) $2x - y + 3z + 1 = 0$.

П л а н и р у е м

5.104. Как узнать, в какой точке плоскость $2x + y - 3z = 1$ пересекает каждую из осей координат?

5.105. Как узнать, пересекаются ли плоскости, заданные уравнениями:

а) $x + y + z = 1$ и $x + y + z = -1$; б) $x + y + z = 1$ и $x + y - z = 1$;

в) $x + 2y + 3z = 1$ и $3x + y + 2z = 1$; г) $x + y = 0$ и $y - z = 0$;

д) $x + y + z = a$ и $x + y + az = 1$?

5.106. Как написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1;1;0)$ и перпендикулярной: а) одной из осей координат; б) одной из плоскостей координат; в) двум координатным плоскостям; г) плоскости, уравнение которой $x + z = 2$; д) плоскости, уравнение которой $x - y + z = 1$?

5.107. Как написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1,1,0)$ и параллельной: а) одной из осей координат; б) одной из плоскостей координат; в) двум координатным плоскостям; г) плоскости, уравнение которой $x + z = 2$; д) плоскости, уравнение которой $x - y + z = 1$?

5.108. Две плоскости заданы своими уравнениями. Как выяснить, будут ли они перпендикулярны? Если нет, то как найти угол между ними? А как узнать, будут ли они параллельны?

5.109. Какую фигуру задает в пространстве условие

$$Ax + By + Cz + D \geq 0 ?$$

5.110. Дан куб с ребром 1. Выберите удобную систему координат. Как в этой системе координат записать уравнения: а) его граней; б) диагональной плоскости; в) плоскости, которая пересекает его по правильному шестиугольнику; г) его диагонали?

П р е д с т а в л я е м

5.111. Как расположена плоскость относительно осей координат, если в ее уравнении будут равны нулю: а) один коэффициент; б) два коэффициента?

5.112. Могут ли быть в уравнении плоскости равными нулю: а) все коэффициенты при неизвестных; б) три коэффициента?

5.113. Как записать уравнение прямой, по которой пересекает координатные плоскости плоскость, уравнение которой $x - y + z = 1$?

5.114. Какая фигура задается в пространстве таким условием:

а) $|x| \le 1$; ; б) $-1 \le x - y \le 2$; в) $10 \le x + y + z \le 20$;

г) $1 \le x \le 2$, $-2 \le y \le -1$, $-1 \le z \le 1$; д) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, $x + y + z \le 1$?

Поступаем в ВУЗ

5.115. Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки $(0;0;0)$, $(1;1;1)$, $(3;2;1)$, и плоскостью, проходящей через точки $(0;0;0)$, $(1;1;1)$, $(3;1;2)$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

5.116. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $(0;1;0)$, $(1;1;1)$ и $(0;0;1)$.

Ответ: $x - y - z + 1 = 0$.

5.117. Уравнения плоскостей α и β есть

$$2x + 3y + 4z - 8 = 0 \text{ и } 4x + y + 3z - 6 = 0,$$

прямая p является их пересечением. а) Определите координаты точки пересечения прямой p с плоскостями xOy и yOz. б) Определите величину угла между прямой p и плоскостью xOz.

Ответ: $(1;2;0)$, $(0;0;2)$, $arcsin\frac{2}{3}$.

5.118. Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отрезки $SK = \frac{2}{3}SA$, $SL = \frac{1}{2}SB$, $SM = \frac{1}{3}SC$ соответственно. Длина бокового ребра пирамиды равна a. Найдите длину отрезка SN, отсекаемого этой плоскостью на ребре SD.

Ответ: $0{,}4a$.

5.119. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Пусть точка P делит ось OO_1 призмы в отношении 5:1. Через точку P и середины ребер AB и A_1C_1 проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Ответ: 49:95.

Переключаемся

5.120. Из проволоки сделан каркас куба. Где находится центр масс фигуры, получающейся после удаления из каркаса: а) одного ребра; б) двух параллельных ребер; в) двух скрещивающихся ребер; г) двух пересекающихся ребер; д) трех ребер, выходящих из одной точки; е) трех попарно скрещивающихся ребер?

ГЛАВА 6

*ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

С преобразованиями фигур люди имели дело всегда. Уже человек каменного века, изображая на стенах пещерных животных, реально производил преобразование пространственных тел в плоские фигуры. Глядя на тень предмета в солнечный день, мы видим результат параллельного проектирования солнечными лучами этого предмета на поверхность пола или земли. А лучи, идущие от лампы, осуществляют центральное проектирование (рис.8.20)

Важнейшими из геометрических преобразований являются знакомые вам из планиметрии движения и подобия. Рассмотрим эти преобразования в пространстве.

§25. ДВИЖЕНИЯ

25.1. **Преобразования фигур.** Доказывая в главе 1, что некоторая фигура F обладает центральной или зеркальной симметрией, мы сопоставляли каждой точке X фигуры F некоторую точку X' этой фигуры, симметричную точке X относительно центра или плоскости, т.е. выполняли некоторое преобразование фигуры F.

Напомним, что вообще **преобразование** f (или **отображение** f) **фигуры** F состоит в том, что каждой ее точке X сопоставляется некоторая точка X' (рис.25.1). Все точки X' образуют некоторую фигуру F', о которой говорят, что она получена при преобразовании (отображении) f из фигуры F. Говорят также, что точка X' является **образом точки** X

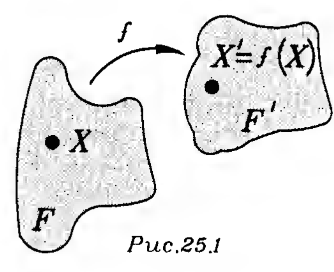


Рис.25.1

при преобразовании f и пишут $X' = f(X)$, а о фигуре F' говорят, что она является **образом фигуры** F при преобразовании f и пишут $F' = f(F)$.

Если при данном преобразовании разным точкам фигуры соответствуют разные образы, то преобразование называют **взаимно однозначным.** Например, проектирование пространства на плоскость не является взаимно однозначным преобразованием, так как разные точки пространства могут иметь одну и ту же проекцию. А проектирование плоскости на плоскость в направлении, не параллельном этим плоскостям, является взаимно однозначным преобразованием.

Пусть фигура F' получена в результате взаимно однозначного преобразования f из фигуры F. Тогда каждая точка X' фигуры F' является образом только одной (единственной) точки X фигуры F. Действительно, в противном случае преобразование f переводило бы в одну и ту же точку X' две различные точки X_1 и X_2 фигуры F, что невозможно, поскольку преобразование f взаимно однозначное. Поэтому каждой точке X' фигуры F' можно поставить в соответствие ту единственную точку X фигуры F, образом которой при преобразовании f является точка X'. Тем самым мы определим преобразование фигуры F' в фигуру F, которое называется **обратным для преобразования** f и которое обозначается f^{-1}. Если преобразование имеет обратное, то оно называется **обратимым.**

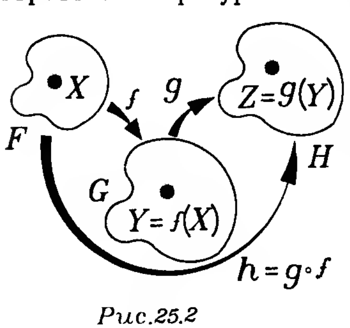


Рис.25.2

Из данных определений непосредственно следует, что если преобразование f обратимо, то обратное ему преобразование f^{-1} также обратимо и $(f^{-1})^{-1} = f$. Поэтому преобразования f и f^{-1} называются **взаимно обратными.**

Пусть преобразование f переводит фигуру F в фигуру G, а преобразование g переводит фигуру G в фигуру H (рис.25.2). Если при преобразовании f точка X фигуры F перешла в точку $Y = f(X)$ фигуры G, а затем точка Y при преобразовании g перешла в точку $Z = g(Y)$ фигуры H, то тем самым точка X перешла в точку Z. Это записывают так: $Z = g \circ f(X)$.

В результате последовательного выполнения f и g получается некоторое преобразование h фигуры F в фигуру H. Поскольку при преобразовании h образом каждой точки X фигуры F является точка $Z = g \circ f(X)$, то пишут $h = g \circ f$ и говорят, что h является **композицией** преобразований f и g. Композицией называется и операция, состоящая в последовательном выполнении преобразований, и само результирующее преобразование.

Если данное преобразование f обратимо, то, применяя его, а потом обратное ему преобразование f^{-1}, вернем, очевидно, все точки в исходное положение, т.е. получим **тождественное преобразование** такое, которое каждой точке сопоставляет эту же точку. Тождественное преобразование фигуры F обозначаем символом E_F.

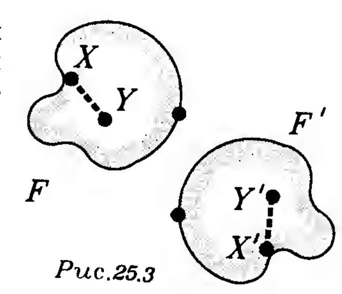


Рис.25.3

Неподвижной точкой преобразования f называется такая точка X, что $f(X) = X$.

25.2. **Определения движения и равенства фигур. Движением** (как и в планиметрии) называется преобразование, сохраняющее расстояния. Подробнее: движением фигуры называется такое ее преобразование, при котором каждым двум ее точкам X, Y соответствуют такие точки X', Y', что $X'Y' = XY$ (рис.25.3)

Очевидно, что *тождественное преобразование является движением.* Понятие движения позволяет так определить понятие равенства фигур: **фигура F' называется равной фигуре F, если она может быть получена из фигуры F движением.**

Геометрическое понятие движения появилось при изучении реальных движений тел. В нем только не учитывается тот процесс движения, которым тело из одного положения переходит в другое, а принимается во внимание только результат: соответствие между старым и новым положениями тела и фигуры. Это и выражено в словах: "фигура F' получается из фигуры F движением". Точки пространства не перемещаются, а только сопоставляются одни другим. Это подобно тому, что происходит при отражении в зеркале: предмет, отражаясь в зеркале, не переходит за зеркало, а изображается в нем: его точкам соответствуют точки изображения. Этой наглядной картине и соответствуют термины "отображение", "образ". Отражение в зеркале как раз представляет собой реальный пример движения в геометрическом смысле (как отображения, сохраняющего расстояния). Но его нельзя получить непрерывным движением, как нельзя непрерывным движением превратить левую руку в правую; в зеркале же она изображается как правая.

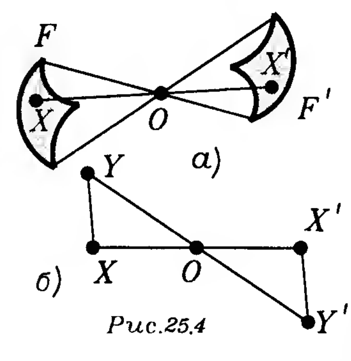


Рис.25.4

Непосредственно из определений соответствующих понятий вытекают следующие три утверждения:

1) *Движение взаимно однозначно.*

Действительно, сохраняя расстояния, движение разные точки не может перевести в одну точку.

2) *Движение обратимо и преобразование, обратное движению, само является движением.*

3) *Композиция движений есть движение.*

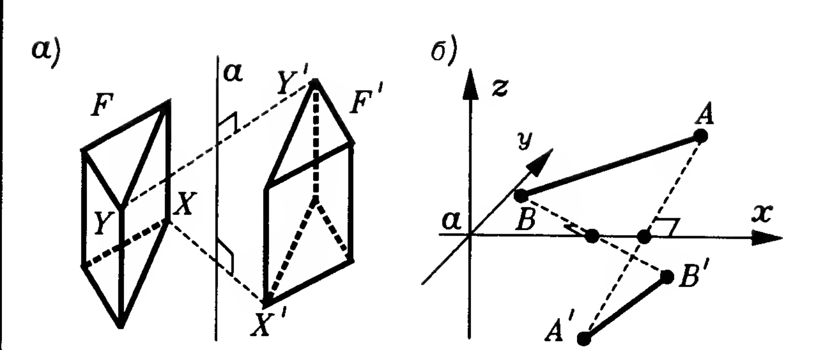


Рис.25.5

25.3. **Преобразования симметрии.** 1) **Центральной симметрией** фигуры F с центром O называется такое преобразование этой фигуры, которое сопоставляет каждой ее точке точку, симметричную относительно точки O (рис.25.4*а*). Центральную симметрию с центром O обозначаем S_O.

Центральная симметрия является движением.

Действительно, пусть при центральной симметрии S_O точки X, Y перешли в точки $X' = S_O(X)$ и $Y' = = S_O(Y)$ (рис.25.4*б*). Тогда из определения центральной симметрии следует, что

$$\overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OX} \text{ и } \overrightarrow{OY'} = -\overrightarrow{OY}. \quad (1)$$

Поэтому

$$\overrightarrow{X'Y'} = \overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'} = -\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}. \quad (2)$$

Из равенства $\overrightarrow{X'Y'} = -\overrightarrow{XY}$ следует, что, во-первых, *центральная симметрия сохраняет расстояния, а потому является движением,* и, во-вторых, *что центральная симметрия изменяет направления векторов на противоположные.*

2) **Осевой симметрией** фигуры F относительно прямой a называется такое преобразование этой фигуры, которое сопоставляет каждой ее точке точку, симметричную относительно прямой a (рис.25.5*а*).

Осевую симметрию относительно прямой a обозначаем S_a, а прямую a называем **осью симметрии** S_a.

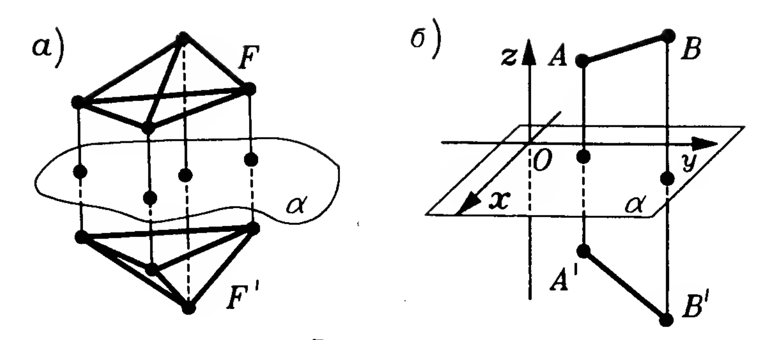


Рис. 25.6

Осевая симметрия является движением.

Действительно, пусть при осевой симметрии S_a с осью a точки A, B перешли в точки $A' = S_a(A)$ и $B' = S_a(B)$ (рис.25.5.*б*). Введем в пространстве прямоугольную систему координат x, y, z так, чтобы прямая a стала осью x в этой системе. Пусть точка $A = (x_1; y_1; z_1)$, а точка $B = (x_2; y_2; z_2)$. Тогда

$$A' = (x_1; -y_1; -z_1),\ B' = (x_2; -y_2; -z_2),$$

а потому

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = A'B'. \quad (3)$$

Итак, осевая симметрия сохраняет расстояния, т.е. является движением. ■

3) **Зеркальной симметрией** фигуры F относительно плоскости α (или отражением фигуры F в плоскости α) называется такое преобразование, при котором каждой точке данной фигуры сопоставляется точка, симметричная ей относительно плоскости α (рис.25.6*а*). Это преобразование называется также **симметрией относительно плоскости** α. Оно обозначается так: S_α.

Симметрия относительно плоскости является движением.

Действительно, пусть симметрия S_α относительно плоскости α переводит точки A, B в точки $A' = S_\alpha(A)$

и $B' = S_\alpha(B)$ (рис.25.6*б*). Введем в пространстве такую систему прямоугольных координат x, y, z, чтобы плоскость α в этой системе была координатной плоскостью xy. Пусть в этой системе координат $A = (x_1; y_1; z_1)$, $B = (x_2; y_2; z_2)$. Тогда

$$A' = (x; y; -z_1),\ B' = (x_2; y_2; -z_2).$$

Поэтому

$$A'B' = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (-z_1 + z_2)^2} = AB. \quad (4)$$

Итак, симметрия относительно плоскости сохраняет расстояния, т.е. является движением. ■

Отметим, что поскольку отношение симметричности для всех трех видов симметрий взаимно, т.е. если точка A' симметрична точке A, то A симметрична точке A' (относительно точки, прямой или плоскости), то *преобразование, обратное любой из симметрий, является этой же симметрией*. Преобразование f, для которого $f^{-1} = f$, называется **инволюцией**. Итак, *все симметрии являются инволюциями*.

Отметим также, что множество неподвижных точек центральной симметрии S_O состоит из одной точки O — центра симметрии, для осевой симметрии S_a оно состоит из оси симметрии — прямой a, а для зеркальной симметрии относительно плоскости α множество неподвижных точек является плоскостью симметрии — плоскостью α.

25.4. **Параллельный перенос.** Слово "вектор" латинское и оно означает "переносчик". Это соответствует той зависимости, которая связывает векторы и движения, называемые параллельными переносами или, короче, переносами. Они определяются в пространстве так же, как на плоскости: **параллельным переносом** фигуры называется такое ее преобразование, при котором все ее точки перемещаются на один и тот же вектор, т.е. на одно и то же расстояние в одном и том же направлении (рис. 25.7)

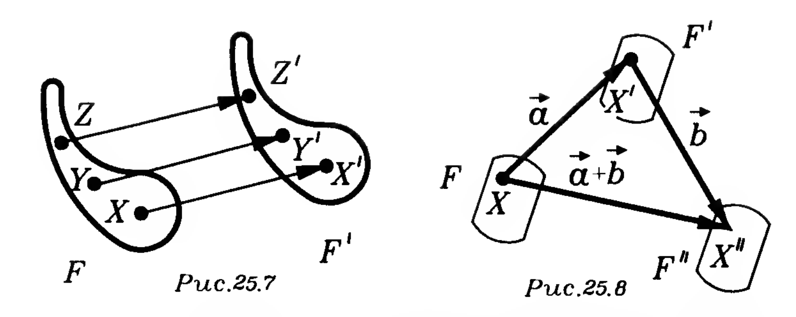


Рис.25.7
Рис.25.8

Таким образом, при переносе каждым двум точкам X и Y фигуры F сопоставляются такие точки X' и Y', что

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}. \tag{5}$$

Параллельный перенос фигуры задается переносом одной ее точки: если указано, что точка A переходит в точку A', то для любой другой точки в силу (5) $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AA'}$. Тем самым перенос задается вектором $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AA'}$. Перенос на вектор $\boldsymbol{a}$ будем обозначать $T_{\vec{a}}$.

Параллельный перенос сохраняет расстояния, т.е. перенос является движением.

Действительно, из равенства (5) и леммы о равенстве векторов (п.21.4) следует, что

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}. \tag{6}$$

Из равенства (6) получаем, во-первых, что $X'Y' = XY$, т.е. перенос — движение, а, во-вторых, что $\overrightarrow{X'Y'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{XY}$, т.е. перенос сохраняет направления векторов.

Итак, *перенос является движением, сохраняющим направления.* ■

Верно и обратное утверждение: *движение, сохраняющее направления, является параллельным переносом.*

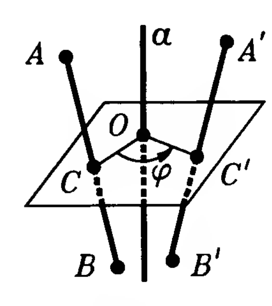
Действительно, если движение сохраняет направления, то выполняется равенство (6). А из (6) следует (5),

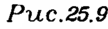
которое и показывает, что рассматриваемое преобразование — параллельный перенос. ■

Если выполнить последовательно сначала перенос $T_{\vec{a}}$ на вектор $\boldsymbol{a}$, а затем перенос $T_{\vec{b}}$ на вектор $\boldsymbol{b}$, то в итоге получим перенос на вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, т.е. перенос $T_{\vec{a}+\vec{b}}$. Поэтому композицией переносов $T_{\vec{a}}$ и $T_{\vec{b}}$ является перенос $T_{\vec{a}+\vec{b}}$, т.е. выполняется равенство

$$T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}. \qquad (7)$$

(рис.25.8).




Рис.25.9

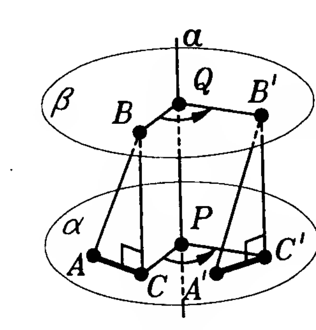


Рис.25.10

25.5. **Поворот.** Примеров реальных поворотов вокруг прямой очень много: поворот двери, колеса вокруг оси, пропеллера, ворота колодца и т.п. В геометрии же **поворотом фигуры вокруг прямой** a **на угол** φ называется преобразование, которое осуществляется так: в каждой плоскости, перпендикулярной прямой a и пересекающей фигуру, происходит поворот вокруг точки пересечения этой плоскости с прямой a на угол φ в одном и том же направлении для всех плоскостей (рис.25.9). Прямая a называется **осью поворота**, угол φ — **углом поворота**. Поворот задается осью, углом и направлением поворота в какой-либо плоскости, перпендикулярной оси поворота.

Осевая симметрия в пространстве является поворотом на 180° вокруг оси симметрии. Действительно, в результате поворота на 180° вокруг прямой a точка X, не лежащая на прямой a, перейдет в такую точку X',

что прямая a перпендикулярна отрезку XX' и пересекает его в середине.

Т е о р е м а (о повороте). **Поворот вокруг прямой является движением.**

□ Пусть при повороте на угол φ вокруг оси a точки A и B перешли в точки A' и B'. Докажем, что

$$A'B' = AB.$$

Если точки A и B лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси, то $A'B' = AB$, так как поворот в плоскости — движение.

Допустим, что точка A лежит в плоскости $\alpha \perp a$, а точка B — в другой плоскости $\beta \perp a$ (рис.25.10). Пусть P — точка пересечения плоскости α и прямой a, а Q — точка пересечения β и a. Опустим из точек B и B' перпендикуляры BC и $B'C'$ на плоскость α. Так как $\alpha \parallel \beta$, то $B'C' = BC$ (см.п.3.5). Так как $\angle CPC'$ и $\angle BQB'$ — линейные углы одного и того же двугранного угла, то $\angle CPC' = \angle BQB' = \varphi$. Кроме того $C'P = CP$, так как $C'P = B'Q$, $CP = BQ$ и $B'Q = BQ$. Поэтому при рассматриваемом повороте точка C переходит в точку C'. Следовательно, отрезок $A'C'$ получен поворотом на угол φ из отрезка AC в плоскости α. Следовательно,

$$A'C' = AC.$$

Наконец, мы замечаем еще, что поскольку $BC \perp \alpha$ и $B'C' \perp \alpha$, то $BC \perp CA$ и $B'C' \perp C'A'$. Поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ прямоугольные. Они равны, так как $B'C' = BC$ и $A'C' = AC$. Следовательно,

$$A'B' = AB. \blacksquare$$

§26. СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЙ

26.1. **О распространении движения на все пространство.** В этом параграфе, доказывая теоремы об общих свойствах движений, мы будем рассматривать д в и ж е н и я в с е г о п р о с т р а н с т в а. Это значительно облегчит проводимые рассуждения, но при этом не сни-

зит их общности. Дело в том, что каждое движение любой фигуры может быть распространено на любую объемлющую ее фигуру и, в частности, на все пространство. Возможность такого распространения для тех частных видов движений, которые мы рассматривали в §25, очевидна. А как мы убедимся в следующем параграфе, любое движение сводится к композиции двух таких движений, либо является одним из них. Поэтому указанное распространение возможно и в общем случае. О таком распространении можно сказать, что оно подобно распространению движения части тела на все тело, как движение ручки передается всему предмету.

26.2. **Общие свойства движений.** Движения сохраняют расстояния и потому сохраняют все геометрические свойства фигур, поскольку они определяются расстояниями. В этом пункте мы получим наиболее общие свойства движений, приводя доказательства в тех случаях, когда они не очевидны.

Свойство 1. *Три точки, лежащие на одной прямой, при движении переходят в три точки, лежащие на одной прямой, а три точки, не лежащие на одной прямой, — в три точки, не лежащие на одной прямой.*

□ Пусть движение переводит соответственно точки A, B, C в точки A', B', C'. Тогда выполняются равенства

$$AB = A'B', \ AC = A'C', \ BC = B'C'. \qquad (1)$$

Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то одна из них, например, точка B лежит между двумя другими. В этом случае $AB + BC = AC$ и из равенств (1) следует, что $A'C' = A'B' + B'C'$. А это равенство означает, что точка B лежит между точками A и C. Первое утверждение доказано. Второе вытекает из первого и обратимости движения (способом от противного). ■

Свойство 2. *Отрезок движением переводится в отрезок.*

□ Пусть концам отрезка AB движение f сопоставляет точки A' и B'. Возьмем любую точку X отрезка AB. Тогда, как и в доказательстве свойства 1, можно установить, что ее образ — точка $X' = f(X)$ лежит на отрезке $A'B'$ между точками A' и B'. Далее, каждая точ-

ка Y' отрезка $A'B'$ является образом некоторой точки Y отрезка AB. А именно, той точки Y, которая удалена от точки A на расстояние $A'Y'$. Следовательно, отрезок AB движением переводится в отрезок $A'B'$. ■

Свойство 3. *При движении луч переходит в луч, прямая — в прямую.*

Эти утверждения докажите самостоятельно.

Свойство 4. *Треугольник движением переводится в треугольник, полуплоскость — в полуплоскость, плоскость — в плоскость, параллельные плоскости — в параллельные плоскости.*

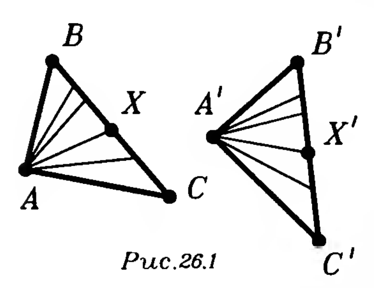


Рис.26.1

□ Треугольник ABC заполняется отрезками, соединяющими вершину A с точками X противоположной стороны BC (рис.26.1). Движение сопоставит отрезку BC некоторый отрезок $B'C'$ и точке A — точку A', не лежащую на прямой $B'C'$. Каждому отрезку AX это движение сопоставит отрезок $A'X'$, где точка X' лежит на $B'C'$. Все эти отрезки $A'X'$ заполнят треугольник $A'B'C'$. В него

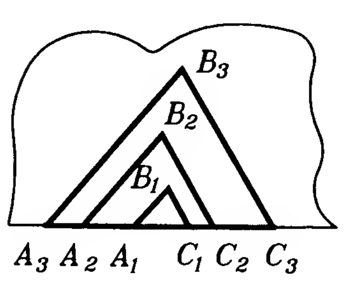


Рис.26.2

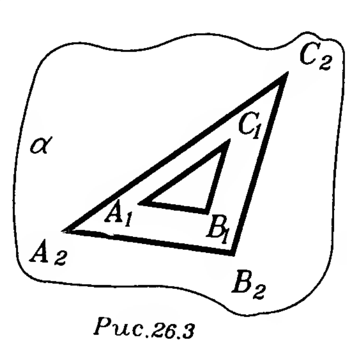


Рис.26.3

и переходит треугольник ABC.

Полуплоскость можно представить как объединение неограниченно расширяющихся треугольников, у которых одна сторона лежит на границе полуплоскости

(рис.26.2). Поэтому полуплоскость перейдет при движении в полуплоскость.

Аналогично, плоскость можно представить как объединение неограниченно расширяющихся треугольников (рис.26.3). Поэтому при движении плоскость отображается на плоскость.

Поскольку движение сохраняет расстояния, то при движении расстояния между фигурами не изменяются. Отсюда следует, в частности, что при движениях параллельные плоскости перейдут в параллельные. ■

Свойство 5. *При движении образом тетраэдра является тетраэдр, образом полупространства — полупространство, образом пространства — все пространство.*

□ Тетраэдр $ABCD$ представляет собой объединение отрезков, соединяющих точку D со всевозможными точками X треугольника ABC (рис.26.4). При движении отрезки отображаются на отрезки, а потому тетраэдр перейдет в тетраэдр.

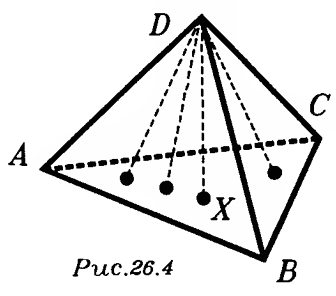


Рис.26.4

Полупространство можно представить как объединение расширяющихся тетраэдров, у которых основания лежат в граничной плоскости полупространства. Поэтому при движении образом полупространства будет полупространство.

Пространство можно представить как объединение неограниченно расширяющихся тетраэдров. Поэтому при движении пространство отображается на все пространство. ■

Свойство 6. *При движении углы сохраняются, т.е. всякий угол отображается на угол того же вида и той же величины. Аналогичное верно и для двугранных углов.*

□ При движении полуплоскость отображается на полуплоскость. Так как выпуклый угол есть пересечение двух полуплоскостей, а невыпуклый угол и двугранный угол есть объединение полуплоскостей, то при движении выпуклый угол переходит в выпуклый угол, а невыпук-

лый угол и двугранный угол соответственно — в невыпуклый и двугранный угол.

Пусть лучи a и b, исходящие из точки O, отобразились на лучи a' и b', исходящие из точки O'. Возьмем треугольник OAB с вершинами A на луче a и B на луче b (рис.26.5). Он отобразится на равный треугольник $O'A'B'$ с вершинами A' на луче a' и B' на луче b'. Значит, углы между лучами a, b и a', b' равны. Поэтому при движении величины углов сохраняются.

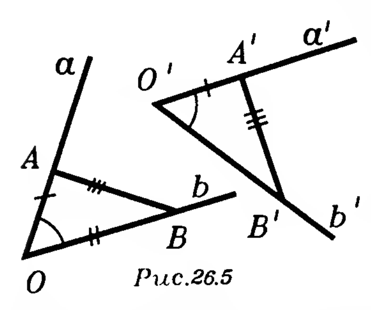


Рис.26.5

Следовательно, сохраняется перпендикулярность прямых, а значит — прямой и плоскости. Вспомнив определения угла между прямой и плоскостью и величины двугранного угла, получим, что величины этих углов сохраняются. ■

Свойство 7. *Движения сохраняют площади поверхностей и объемы тел.*

Действительно, поскольку движение сохраняет перпендикулярность, то движение высоты (треугольников, тетраэдров, призм и т.п.) переводит в высоты (образы этих треугольников, тетраэдров, призм и т.п.). При этом длины этих высот будут сохраняться. Поэтому площади треугольников и объемы тетраэдров при движениях сохраняются. А значит, сохранятся и площади многоугольников, и объемы многогранников. Площади же криволинейных поверхностей и объемы тел, ограниченных такими поверхностями, получаются предельными переходами от площадей многогранных поверхностей и объемов многогранных тел. Поэтому и они при движениях сохраняются. ■

26.3. **Теоремы о задании движений.** В этом пункте мы дадим ответ на такой вопрос: сколько пар соответствующих при движении точек надо задать, чтобы движение определилось ими однозначно? Мы дадим два ответа на этот вопрос. Первый из них содержит следующая теорема.

Т е о р е м а (о задании движения пространства). **Пусть заданы два тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$, имеющие соответственно равные ребра (а, значит, и грани), т.е. выполняются равенства:**

$$AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C',$$
$$AD = A'D',\ CD = C'D',\ BD = B'D'. \qquad (2)$$

Тогда существует и притом единственное движение f, которое переводит тетраэдр $ABCD$ в тетраэдр $A'B'C'D'$, т.е. такое, что

$$A' = f(A),\ B' = f(B),\ C' = f(C),\ D' = f(D).$$

□ Сначала установим с у щ е с т в о в а н и е движения, о котором идет речь в теореме. Зададим два базиса в пространстве

$$e_1 = \overrightarrow{AB},\ e_2 = \overrightarrow{AC},\quad e_3 = \overrightarrow{AD} \qquad (3)$$

и

$$f_1 = \overrightarrow{A'B'},\ f_2 = \overrightarrow{A'C'},\quad f_3 = \overrightarrow{A'D'} \qquad (4)$$

(рис.26.6).

Рис.26.6

Из равенства (2), а также равенств углов

$$\angle BAC = \angle B'A'C',\ \angle BAD = \angle B'A'D',\quad \angle CAD = \angle C'A'D' \qquad (5)$$

вытекает равенство скалярных произведений

$$e_i \cdot e_j = f_i \cdot f_j \qquad (6)$$

для любых пар индексов i, j.

Возьмем теперь любую точку X и разложим вектор $\overrightarrow{AX}$ по базису e_1, e_2, e_3:

$$\overrightarrow{AX} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3. \qquad (7)$$

По коэффициентам x_1, x_2, x_3 и базису f_1, f_2, f_3 построим вектор

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3 \tag{8}$$

и отложим его от точки A'. Получим точку X' — конец вектора $\overrightarrow{A'X'} = \boldsymbol{v}$, т.е.

$$\overrightarrow{A'X'} = x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3. \tag{9}$$

Преобразование f зададим, поставив точке X в соответствие точку $X' = f(X)$. Докажем, что f — движение.

Возьмем еще некоторую точку Y и пусть

$$Y' = f(Y).$$

Если

$$\overrightarrow{AY} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3, \tag{10}$$

то

$$\overrightarrow{A'Y'} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\boldsymbol{f}_3. \tag{11}$$

Тогда

$$\overrightarrow{XY} = (y_1 - x_1)\boldsymbol{e}_1 + (y_2 - x_2)\boldsymbol{e}_2 + (y_3 - x_3)\boldsymbol{e}_3 \tag{12}$$

и

$$\overrightarrow{X'Y'} = (y_1 - x_1)\boldsymbol{f}_1 + (y_2 - x_2)\boldsymbol{f}_2 + (y_3 - x_3)\boldsymbol{f}_3. \tag{13}$$

Если возвести в скалярный квадрат равенства (12) и (13), то получим суммы, в которых слагаемыми будут произведения

$$(y_i - x_i)(y_j - x_j)\cdot \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \quad \text{для } \overrightarrow{XY}^2$$

и

$$(y_i - x_i)(y_j - x_j)\boldsymbol{f}_i\boldsymbol{f}_j \quad \text{для } \overrightarrow{X'Y'}^2.$$

Поскольку выполняются равенства (6), то $\overrightarrow{XY}^2 = \overrightarrow{X'Y'}^2$, а потому $X'Y' = XY$ для любых точек X, Y. Итак, доказано, что f — движение. Ясно, что $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ и $D' = f(D)$.

Докажем теперь единственность такого движения. Допустим, что имеется еще некоторое движение g такое, что

$$A' = g(A),\ B' = g(B),\ C' = g(C) \quad \text{и} \quad D' = g(D).$$

Допустим, что хотя бы для одной точки X ее образы $X' = f(X)$ и $X'' = g(X)$ не совпадают. Поскольку f и g движения, то $X'A' = XA$, $X''A' = XA$, а потому $X'A' = X''A'$. Значит точка A' равноудалена от точек X' и X'', а потому точка A' лежит на плоскости α, перпендикулярной отрезку $X'X''$ и пересекающей его в середине. Точно также доказываем, что точки B', C', D' лежат в плоскости α, т.е. все точки A', B', C', D' лежат в одной плоскости. Но это противоречит тому, что они вершины тетраэдра. Поэтому допущение, что хотя бы для одной точки X ее образы X' и X'' не совпадают, ведет к противоречию. Итак, $f = g$. ■

С л е д с т в и е (о тождественном движении). *Движение, имеющее четыре неподвижные точки, не лежащие в одной плоскости, тождественное.*

26.4. **Неподвижные точки движений.** Оказывается, что *движение либо не имеет неподвижных точек* (например, перенос), *либо имеет лишь одну неподвижную точку* (например, центральная симметрия), *либо имеет множеством своих неподвижных точек прямую* (поворот), *либо таким множеством является плоскость* (зеркальная симметрия), *либо, наконец, множеством его неподвижных точек является все пространство* (тождественное движение).

Справедливость такой классификации вытекает из двух простых лемм.

Л е м м а (о неподвижной прямой). **Если две точки A и B являются неподвижными точками движения f, то любая точка X прямой AB также является неподвижной точкой движения f.**

Действительно, точка $X' = f(X)$, во-первых, лежит на прямой AB, и во-вторых, она удалена от точек A и B на расстояния $X'A = XA$ и $X'B = XB$. Поэтому $X' = X$. ■

Л е м м а (о неподвижной плоскости). **Если три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, являются неподвижными точками движения f, то любая точ-**

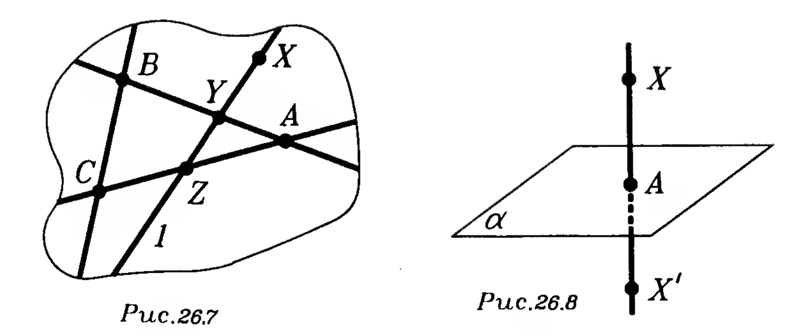


Рис.26.7

Рис.26.8

ка X плоскости ABC является неподвижной точкой движения f.

Действительно, все точки прямых AB, AC, BC неподвижны для движения f (по предыдущей лемме). Проведем через точку X любую прямую l, пересекающую в точках Y и Z прямые AB и AC (рис.26.7). Поскольку Y и Z — неподвижные точки движения f, то и все точки прямой l (в том числе и точка X) — неподвижные для f. ■

Полученная классификация множества неподвижных точек движений позволяет дать следующие признаки зеркальной симметрии и повороту.

Т е о р е м а (признак зеркальной симметрии). **Если множеством неподвижных точек движения является плоскость, то это движение есть симметрия относительно этой плоскости.**

□ Пусть множеством неподвижных точек движения f является плоскость α. Возьмем любую точку X вне этой плоскости и опустим из нее перпендикуляр XA на эту плоскость (рис.26.8). Так как движения сохраняют перпендикулярность и точка A — неподвижная точка движения f, то f переведет прямую XA в эту же прямую. Точка $X' = f(X)$ лежит на прямой XA и удалена от точки A на расстояние XA. Поэтому либо $X' = X$, либо X'— точка, симметричная точке X относительно α. В первом случае f имело бы неподвижные точки, не

лежащие в одной плоскости, что противоречит условию теоремы. Поэтому $X' = S_\alpha(X)$, т.е. $f = S_\alpha$. ■

Доказывая эту теорему, мы установили и такое предложение: *если движение имеет неподвижную плоскость, то оно или тождественное, или симметрия относительно этой плоскости.*

Т е о р е м а (признак поворота). **Движение, множеством неподвижных точек которого является прямая, есть поворот вокруг этой прямой.**

□ Пусть движение f имеет прямую l множеством своих неподвижных точек. Возьмем любую полуплоскость α, имеющую границей прямую l и пусть полуплоскость $\beta = f(\alpha)$ (рис.26.9). Границей β также является прямая l. Пусть φ — угол между α и β. Возьмем любую плоскость $\gamma \perp l$, и пусть A — точка пересечения l и γ. Так как A — неподвижная точка движения f и f сохраняет перпендикулярность прямой и плоскости, то плоскостью $f(\gamma)$ будет плоскость, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой l, т.е. плоскость γ. Итак, движение f осуществляет в каждой плоскости, перпендикулярной прямой l, поворот на угол φ. ■

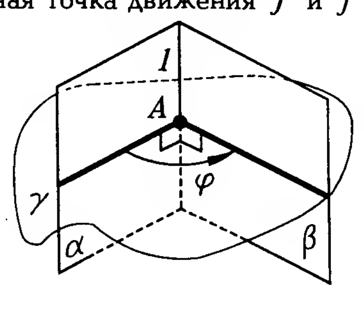


Рис.26.9

26.5. **Два рода движений.** Снова возьмем два равных тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$ и рассмотрим два базиса (3) и (4) (рис.26.6).

Могут представиться две возможности: 1) оба эти базиса имеют одинаковую ориентацию, т.е. тройки векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ либо обе правые, либо обе левые; 2) базисы имеют разную ориентацию.

В первом случае тетраэдр $ABCD$ можно непрерывным движением перевести в тетраэдр $A'B'C'D'$: сначала переносом на вектор $\overrightarrow{AA'}$ совместить A и A',

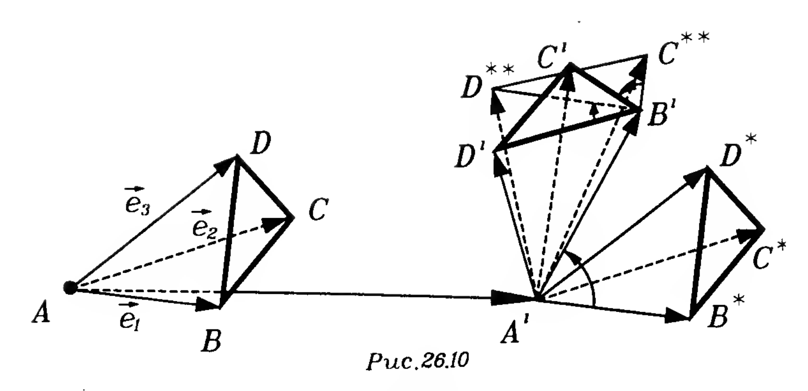


Рис.26.10

затем поворотом совместить AB с $A'B'$ (вокруг прямой, проходящей через A' и перпендикулярной прямым AB и $A'B'$), и, наконец, поворотом вокруг $A'B'$ совместить треугольники ABC и $A'B'C'$, а тем самым и тетраэдр $ABCD$ с $A'B'C'D'$ (рис.26.10).

Во втором случае такое движение лишь переведет тетраэдр $ABCD$ в тетраэдр $A'B'C'D''$, симметричный тетраэдру $A'B'C'D'$ относительно плоскости $A'B'C'$ (рис.26.11). Чтобы завершить совмещение тетраэдров $ABCD$ и $A'B'C'D'$ надо применить еще симметрию относительно плоскости $A'B'C'$: непрерывным движением во втором случае $ABCD$ и $A'B'C'D'$ совместить нельзя.

Движения, соответствующие первому случаю, называются **движениями первого рода**, т.е. движения первого рода — это такие движения, которые сохраняют ориентацию базисов. Движения *первого рода могут быть реализованы непрерывными движениями.*

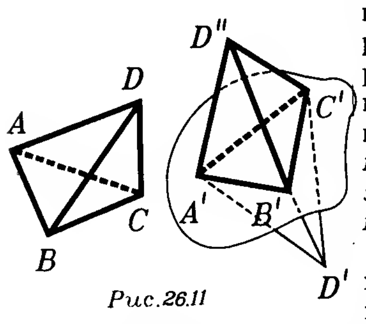


Рис.26.11

Движения, соответствующие второму случаю, называются **движениями второго рода**, т.е. движения второго рода — это такие движения, которые изменяют ориентацию базисов на противоположную.

Движения второго рода не могут быть реализованы непрерывными движениями.

Перенос и поворот являются движениями первого рода: они реализуются непрерывными движениями. Зеркальная симметрия и центральная симметрия — это движения второго рода: они меняют ориентацию базисов.

Так как движения первого рода сохраняют ориентацию базисов, то *композиция любого числа движений первого рода является движением первого рода.*

Композиция движений второго рода может быть как движением первого рода (если берется композиция четного числа движений второго рода), так и движением второго рода (в случае, когда берется композиция нечетного числа движений второго рода).

26.6. **Теорема подвижности пространства.** Оказывается, если нам известен род движения, то теорема о задании движения может быть усилена: вместо четырех пар соответстсвующих точек достаточно рассматривать три. Об этом и говорится в следующей теореме.

Теорема (подвижности пространства). **Пусть в пространстве даны два равных треугольника ABC и $A'B'C'$. Тогда существует единственное движение первого рода и единственное движение второго рода, которые переводят A в A', B в B', C в C'. Каждое из этих движений получается из другого с помощью композиции его с отражением в плоскости $A'B'C'$.**

□ Существование движений, переводящих треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$, вытекает из теоремы о задании движения (п.26.3). Докажем, что их только два.

Пусть два движения f и g удовлетворяют условию теоремы. Рассмотрим движение $g \circ f^{-1}$. Точки A', B', C' являются неподвижными точками этого движения. Действительно,

$$g \circ f^{-1}(A') = g(A) = A'.$$

Аналогично,

$$g \circ f^{-1}(B') = B'$$

и

$$g \circ f^{-1}(C') = C'.$$

В силу леммы о неподвижной плоскости (п.6.4) и следствия признака зеркальной симметрии (п.6.4), движение $g \circ f^{-1}$ либо тождественное, либо является зеркальной симметрией относительно плоскости α, в которой лежит треугольник $A'B'C'$. Если $g \circ f^{-1} = E$, то $g = f$. Если же $g \circ f^{-1} = S_\alpha$, то $(g \circ f^{-1}) \circ f = S_\alpha \circ f$, а потому $g = S_\alpha \circ f$. Поскольку S_α— движение второго рода, то из двух движений f и $S_\alpha \circ f$ одно является движением первого рода, а второе — движением второго рода. ■

26.7. **Композиция отражений в плоскости.** Среди перечисленных нами частных видов движений особую роль играют зеркальные симметрии. Оказывается, любое движение пространства представимо в виде композиции не более четырех зеркальных симметрий. Докажем это утверждение.

Теорема (о композиции зеркальных симметрий). **Движение пространства первого рода представимо композицией двух или четырех симметрий относительно плоскости. Движение пространства второго рода есть либо отражение в плоскости, либо представимо в виде композиции трех симметрий относительно плоскости.**

□ Пусть f— некоторое движение пространства. Возьмем любой треугольник ABC и пусть $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Так как f— движение, то треугольники ABC и $A'B'C'$ равны. Может оказаться, что они симметричны относительно некоторой плоскости α. Тогда симметрия S_α переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. В этом случае теорема доказана, так как тогда согласно теореме подвижности (п.26.6) либо $f = S_\alpha$ (если f — второго рода), либо $f = S_\delta \circ S_\alpha$, где δ — плоскость, в которой лежит треугольник $A'B'C'$.

Рассмотрим общий случай расположения треугольников ABC и $A'B'C'$. В этом случае обозначим через α плоскость, относительно которой симметричны точки A и A' (если $A = A'$, то α — любая плоскость, проходящая через точку A). Положим $B'' = S_\alpha(B)$ и $C'' = S_\alpha(C)$

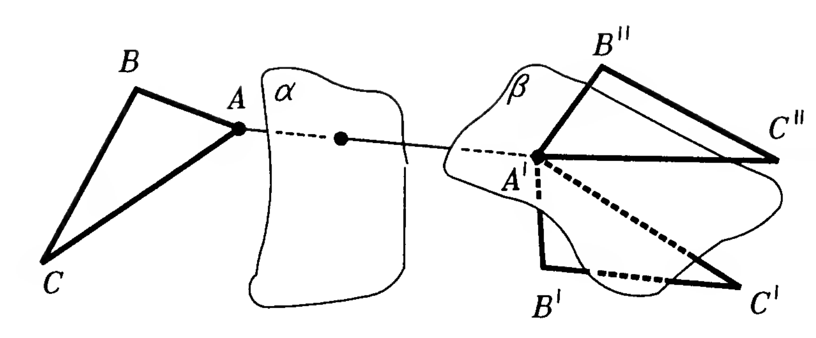


Рис.26.12

(рис.26.12). Так как $A'B'' = AB$ и $A'B' = AB$, то $A'B'' = A'B'$. Пусть $B'' \neq B'$. Тогда точка A' равноудалена от точек B' и B'', а потому лежит в плоскости β, относительно которой симметричны B' и B''. Следовательно, $S_\beta(A') = A'$ и $S_\beta(B'') = B'$. Если же $B'' = B'$, то в качестве плоскости β берем любую плоскость, в которой лежит отрезок $A'B'$.

Положим $C^* = S_\beta(C'')$. Пусть γ — плоскость, относительно которой симметричны точки C^* и C', если $C^* \neq C'$. Если же $C^* = C'$, то полагаем $\gamma = \delta$. Так как $A'C^* = A'C'$ и $B'C^* = B'C'$, то точки B' и A' лежат в плоскости γ. Поэтому $S_\gamma(A') = A'$, $S_\gamma(B') = B'$ и $S_\gamma(C^*) = C'$. Итак, движение f и композиция симметрий $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ переводят A в A', B в B', C в C'. Если f — второго рода, то по теореме подвижности (п.26.6) $f = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$. Если же f — первого рода, то по той же теореме $f = S_\delta \circ S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$. ■

С л е д с т в и е. *Композиция симметрий относительно двух пересекающихся плоскостей есть поворот вокруг прямой, по которой пересекаются эти плоскости.*

§27. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА

27.1. **Движения первого рода, имеющие неподвижную точку.**

Т е о р е м а. **Любое движение пространства первого рода, имеющее неподвижную точку, является поворотом вокруг прямой.**

□ Пусть O — неподвижная точка движения первого рода f. Возьмем любую точку $A \neq O$ и любую точку B, не лежащую на прямой OA, и пусть $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$. Как установлено при доказательстве теоремы п.26.7, треугольник OAB можно перевести в равный ему треугольник $OA'B'$ композицией двух отражений в плоскостях α и β, относительно которых симметричны пары точек A и A' (для α) и $B'' = S_\alpha(B)$ и B' (для β). По теореме подвижности пространства (п.26.6) $f = S_\beta \circ S_\alpha$. Если плоскости α и β совпадают, то $S_\beta \circ S_\alpha$ — тождественное преобразование, т.е. f — тождественный поворот. Если же α и β различные плоскости, то они пересекаются по некоторой прямой a (так как имеют общую точку O). В этом случае композиция $S_\beta \circ S_\alpha$ является поворотом вокруг прямой a, т.е. f является таким поворотом. ■

27.2. **Движения первого рода как винтовые движения.** В этом пункте мы докажем, что любое движение пространства первого рода есть винтовое движение.

Винтовым движением называется композиция поворота и переноса на вектор, параллельный оси поворота. (О таком переносе говорят, что он происходит вдоль оси поворота).

Представление о винтовом движении дает ввинчивающийся или вывинчивающийся винт. Отсюда его название.

Поворот и перенос можно считать частными случаями винтового движения: винтовое движение с нулевым

переносом — это поворот, а винтовое движение с нулевым поворотом — это перенос.

Порядок, в котором происходят перенос и поворот в винтовом движении не имеет значения — результат от этого не зависит (убедитесь в этом!).

Доказательство основного результата этого пункта опирается на следующую лемму.

Л е м м а (о композиции переноса и поворота). **Композиция переноса и нетождественного поворота вокруг прямой, перпендикулярной направлению переноса, есть поворот вокруг некоторой прямой, параллельной оси данного поворота.**

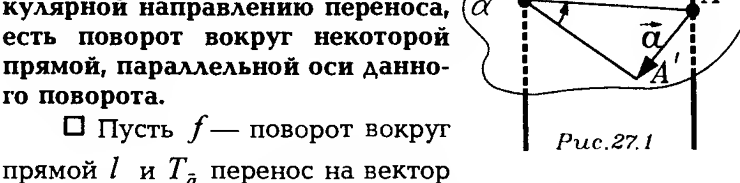


Рис.27.1

□ Пусть f — поворот вокруг прямой l и $T_{\vec{a}}$ перенос на вектор $\boldsymbol{a} \perp l$. Возьмем любую плоскость $\alpha \perp l$ (рис.27.1). Пусть O — точка пересече- ния α и l. Построим в плоскости α равнобедренный треугольник OAA' с вершиной O и таким основанием AA', что $\overrightarrow{AA'} = \boldsymbol{a}$, и с углом $A'OA$ при вершине, равным углу поворота f. Такой треугольник можно построить единственным образом. Поворот f переводит A' в A, т.е. $f(A') = A$. Точка A является неподвижной точкой движения $f \circ T_{\vec{a}}$, так как $f \circ T_{\vec{a}}(A) = f(A') = A$. Более того, любая точка прямой l', которая параллельна l и проходит через точку O, является неподвижной для движения $f \circ T_{\vec{a}}$ и других неподвижных точек у $f \circ T_{\vec{a}}$ нет. По признаку поворота (п.26.4) $f \circ T_{\vec{a}}$ — поворот вокруг прямой l'. ■

Т е о р е м а (о винтовом движении). **Любое движение пространства первого рода есть винтовое движение, которое, в частности, может быть переносом или поворотом вокруг прямой.**

□ Пусть f — движение пространства первого рода. Возьмем любую точку A и пусть $A' = f(A)$. Если $T_{\vec{a}}$ — перенос на вектор $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{A'A}$, то движение $g = f \circ T_{\vec{a}}$ имеет точку A' своей неподвижной точкой, так как $f \circ T_{\vec{a}}(A') = f(A) = A'$. Поэтому $f \circ T_{\vec{a}}$ есть поворот g вокруг некоторой прямой l, проходящей через A':

$$g = f \circ T_{\vec{a}}. \tag{1}$$

Пусть $T_{-\vec{a}}$ — перенос на вектор $-\boldsymbol{a}$, т.е. перенос, обратный к $T_{\vec{a}}$. Тогда из равенства (1) получаем

$$g \circ T_{-\vec{a}} = f \circ T_{\vec{a}} \circ T_{-\vec{a}}. \tag{2}$$

Поскольку $T_{\vec{a}} \circ T_{-\vec{a}} = E$, то из (2) следует, что

$$f = g \circ T_{-\vec{a}}. \tag{3}$$

Разложим вектор $-\boldsymbol{a}$ на составляющие векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, из которых первый параллелен прямой l, а второй перпендикулярен ей. Тогда

$$T_{-\vec{a}} = T_{\vec{c}} \circ T_{\vec{b}} \tag{4}$$

(см. (7) п.25.4). Поэтому из (3) вытекает, что

$$f = g \circ T_{\vec{c}} \circ T_{\vec{b}}. \tag{5}$$

Но по лемме движение $g \circ T_{\vec{c}}$ — это поворот h вокруг некоторой прямой l', параллельной прямой l. Поэтому $f = h \circ T_{\vec{b}}$. Так как вектор $\boldsymbol{b} \parallel l'$, то f есть винтовое движение — композиция переноса $T_{\vec{b}}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ и поворота h вокруг прямой $l' \parallel \boldsymbol{b}$. ■

Итак, никаких других движений первого рода, кроме винтовых, нет. Одним из примеров реализации этой теоремы может служить работа башенного крана со стрелой переменной длины: он может переместить груз из любого места строительной площадки в любое другое ее место.

27.3. **Движение второго рода, имеющее неподвижную точку, как зеркальный поворот.** О зеркальном пово-

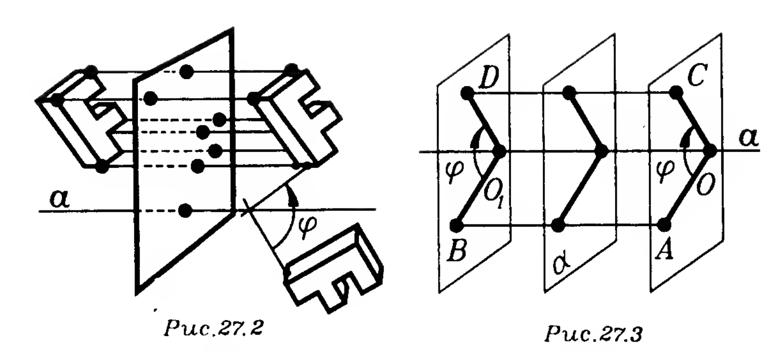


Рис.27.2 Рис.27.3

роте мы уже говорили, когда рассматривали полуправильные многогранники в п.12.3. Напомним, что **зеркальным поворотом вокруг оси a на угол φ** называется композиция поворота вокруг оси a на угол φ и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота (рис.27.2).

Так как поворот и отражение — движения, то и зеркальный поворот — движение. Для зеркального поворота порядок, в котором выполняются составляющие его поворот и отражения, безразличен (рис.27.3).

Роль зеркальных поворотов характеризует следующая теорема.

Т е о р е м а (о зеркальном повороте). **Любое движение пространства второго рода, имеющее неподвижную точку, является зеркальным поворотом, который, в частности, может быть центральной или зеркальной симметрией.**

□ Пусть O — неподвижная точка движения пространства второго рода f. Множество неподвижных точек движения f либо состоит из одной точки O, либо является плоскостью, проходящей через O (всем пространством или прямой оно быть не может, так как этим случаям соответствуют движения первого рода — тождественное или поворот).

Если множество неподвижных точек движения f — плоскость, то f — симметрия относительно этой плоскости (по признаку зеркальной симметрии, п.26.4).

Поэтому осталось рассмотреть случай, когда движение f имеет единственную неподвижную точку — точ-

ку O. В этом случае может оказаться, что для любой точки $A \neq O$, ее образ $B = f(A)$ лежит на прямой OA. Так как $OA = OB$ и $B \neq A$, то точка O — середина отрезка AB. Но тогда f— симметрия относительно точки O.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда найдется такая точка $A \neq O$, образ которой — точка $B = f(A)$— не лежит на прямой OA. Пусть точка $C = f(B)$. Точка C отлична от точки A, так как если $C = A$, то движение f переводит отрезок AB в отрезок BA и имеет его середину своей неподвижной точкой. А это невозможно, так как эта середина отлична от точки O — единственной неподвижной точки движения f.

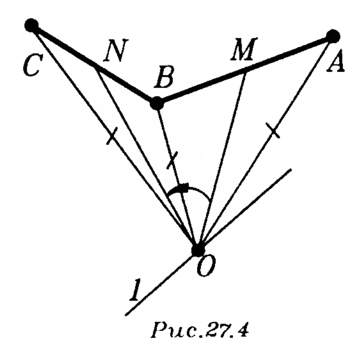


Рис.27.4

Мы получили два равнобедренных треугольника OAB и OBC с общей вершиной O и общей стороной OB (рис.27.4). Движение f переводит треугольник OAB в треугольник OBC.

Проведем высоты OM и ON в этих треугольниках. Тогда зеркальный поворот вокруг прямой l, перпендикулярной плоскости OMN и проходящей через точку O, на угол MON также переводит треугольник OAB в треугольник OBC. По теореме подвижности (п.26.6) движение f совпадает с этим зеркальным поворотом. ■

27.4. **Движения второго рода, не имеющие неподвижных точек, как скользящие отражения.** Для полной классификации всех движений пространства нам осталось рассмотреть движения второго рода, не имеющие неподвижных точек. Они окажутся скользящими отражениями.

Скользящим отражением называется композиция отражения в некоторой плоскости и переноса ("скольже-

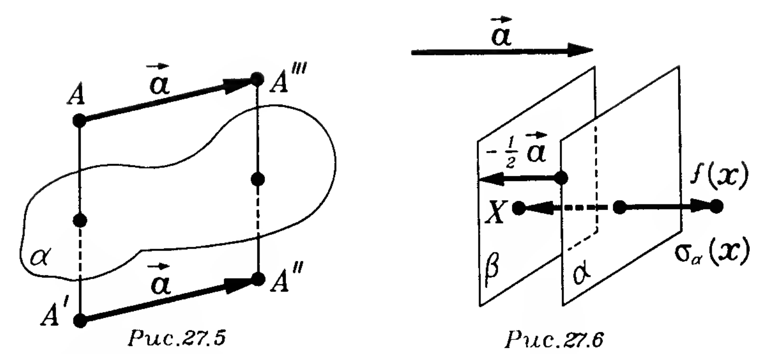


Рис.27.5 Рис.27.6

ния") вдоль этой плоскости (т.е. переноса на вектор, параллельный этой плоскости).

Легко убедиться, что порядок, в котором производятся здесь отражения и перенос, безразличен (рис.27.5).

Скользящее отражение задается плоскостью отражения α и вектором переноса $\boldsymbol{a} \perp \alpha$. Отражение в плоскости можно считать частным случаем скользящего отражения, когда $\boldsymbol{a} = \vec{0}$.

Основной результат данного пункта опирается на следующую лемму.

Л е м м а (о композиции переноса и зеркальной симметрии). **Композиция переноса и отражения в плоскости, перпендикулярной вектору переноса, есть отражение в некоторой плоскости, параллельной данной.**

□ Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ задает перенос $T_{\vec{a}}$ и плоскость $\alpha \perp \boldsymbol{a}$ задает отражение S_α. Возьмем плоскость β, получающуюся из α переносом на вектор $-\frac{\boldsymbol{a}}{2}$ (рис.27.6). Легко видеть, что точки этой плоскости неподвижны при движении $S_\alpha \circ T_{\vec{a}}$. Поэтому $S_\alpha \circ T_{\vec{a}} = S_\beta$. ■

Т е о р е м а (о скользящем отражении). **Движение пространства второго рода, не имеющее неподвижных точек, есть скользящее отражение.**

□ Пусть f — движение пространства второго рода, не имеющее неподвижных точек. Возьмем любую точ-

ку A и пусть $B = f(A)$. Тогда, если $T_{\vec{b}}$ — перенос на вектор $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BA}$, то отображение $g = f \circ T_{\vec{b}}$ будет движением второго рода, имеющим точку B своей неподвижной точкой. Действительно, $g(B) = f \circ T_{\vec{b}}(B) = f(A) = B$. Согласно теореме предыдущего пункта, движение g является зеркальным поворотом, т.е. композицией отражения S_α в некоторой плоскости α и поворота φ вокруг некоторой прямой $l \perp \alpha$, т.е. $g = \varphi \circ S_\alpha$.

Пусть $T_{\vec{a}}$ — перенос на вектор $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$, т.е. перенос, обратный к $T_{\vec{b}}$. Тогда из равенства $g = f \circ T_{\vec{b}}$ следует, что $g \circ T_{\vec{a}} = f \circ T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}}$. Поскольку $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = E$, то $f = g \circ T_{\vec{a}}$.

Разложим вектор $\boldsymbol{a}$ на составляющие $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, из которых первая параллельна плоскости α, а вторая перпендикулярна ей. Поскольку

$$T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}_2} \circ T_{\vec{a}_1}, \tag{6}$$

то из этого равенства и равенств $f = g \circ T_{\vec{a}}$ и $g = \varphi \circ S_\alpha$ получаем

$$f = \varphi \circ S_\alpha \circ T_{\vec{a}_2} \circ T_{\vec{a}_1}. \tag{7}$$

Так как $\boldsymbol{a}_2 \perp \alpha$, то по предыдущей лемме движение $S_\alpha \circ T_{\vec{a}_2}$ есть отражение S_β в некоторой плоскости $\beta \parallel \alpha$. Поэтому из (7) получаем

$$f = \varphi \circ S_\beta \circ T_{\vec{a}_1}. \tag{8}$$

Покажем, что φ — тождественый поворот. Так как $l \perp \alpha$ и $\beta \parallel \alpha$, то $l \perp \beta$. Значит движение $\varphi \circ S_\beta$ является зеркальным поворотом и не зависит от порядка выполнения отражения S_β и поворота φ, т.е. $\varphi \circ S_\beta = S_\beta \circ \varphi$. Из этого равенства и (8) получаем, что

$$f = S_\beta \circ \varphi \circ T_{\vec{a}_1}. \tag{9}$$

Если φ не тождественный поворот, то, поскольку $a_1 \perp l$, по лемме п.27.2 движение $\varphi \circ T_{\vec{a}_1}$ является поворотом ψ вокруг некоторой прямой $l_1 \parallel l$. А тогда $f = S_\beta \circ \psi$ и является зеркальным поворотом, а потому f имеет неподвижную точку, что противоречит условию теоремы. Поэтому $\varphi = E$, а тогда $f = S_\beta \circ T_{\vec{a}_1}$, т.е. f — скользящее отражение. ■

§28. ПОДОБИЕ

28.1. **Определение подобия.** На практике мы часто встречаемся с изготовлением предметов, имеющих одинаковую форму, но разные размеры. Например, на заводах изготовляют автомобили и самолеты, а в магазинах игрушек продаются их модели (уже готовые или наборы деталей, из которых их следует собрать). Проектируя архитектурные сооружения, строители сначала делают макеты их сооружений, той же формы, что и будущие постройки. Одинаковость формы обеспечивается тем, что все соответствующие расстояния изменяются в одном и том же отношении, т.е. умножаются на одно и то же число. Такое преобразование фигуры, при котором это происходит, называется **подобием**, а число — **коэффициентом подобия**. На коробках с деталями моделей самолетов указывают, что модель имеет, например, 1:100 или 1:200 натуральной величины. Перейдем к точным определениям.

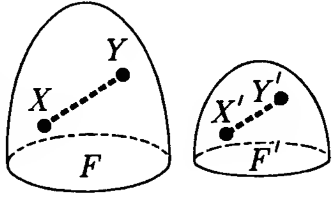


Рис.28.1

Подобием фигуры с коэффициентом $k > 0$ называется такое ее преобразование, при котором любым двум точкам X и Y сопоставляются такие точки X' и Y', что

$$X'Y' = kXY \qquad (1)$$

(рис.28.1).

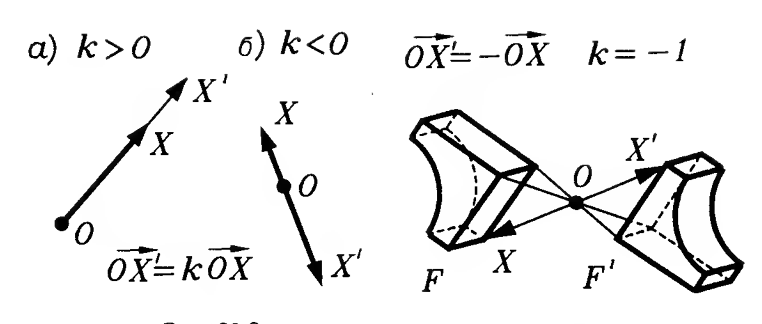


Рис.26.2 Рис.28.3

Фигура F' называется подобной фигуре F с коэффициентом k, если существует подобие с коэффициентом k, переводящее фигуру F в фигуру F'.

Если $k = 1$, *то подобие является движением.*

Любое подобное преобразование может быть представлено композицией гомотетии и движения. Поэтому мы прежде всего изучим свойства гомотетии.

28.2. **Гомотетия. Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$** называется преобразование, при котором каждой точке X сопоставляется такая точка X', что

$$\vec{OX'} = k\vec{OX} \quad (2)$$

(рис.28.2). Не исключается, что $k < 0$ (рис.28.2б).

При $k = -1$ *гомотетия является центральной симметрией с центром в точке O* (рис.28.3). *При $k = 1$ гомотетия является тождественным преобразованием.* Гомотетию с центром O и коэффициентом k обозначаем так: $g_{O,k}$.

Основное свойство гомотетии. *При гомотетии с коэффициентом k каждый вектор умножается на k.*

Подробнее: если точки A, B при гомотетии $g_{O,k}$ перешли в точки A', B', то

$$\vec{A'B'} = k\,\vec{AB}\,. \quad (3)$$

□ Из (2) следует, что $\vec{OA'} = k\vec{OA}$ и $\vec{OB'} = k\vec{OB}$. Поэтому

$$\vec{A'B'} = \vec{OB'} - \vec{OA'} = k\vec{OB} - k\vec{OA} =$$

$$= k(\vec{OB} - \vec{OA}) = k\vec{AB}. \blacksquare$$

Из равенства (3) следует, что

$$A'B' = |k|AB. \qquad (4)$$

Следовательно, *гомотетия с коэффициентом* k *является подобием с коэффициентом* $|k|$.

Основное свойство гомотетии позволяет легко получить ряд других свойств гомотетии.

С в о й с т в о 1. *Гомотетия отрезок переводит в отрезок.*

□ Пусть гомотетия $g_{O,k}$ переводит точки A, B в точки A', B'. Любая точка X отрезка AB задается радиус-вектором

$$\vec{OX} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}, \qquad (5)$$

где $t \in [0,1]$ (см. п.24.3). Умножив равенство (5) на k, получим

$$k\vec{OX} = (1-t)\cdot k\vec{OA} + tk\vec{OB}. \qquad (6)$$

Поскольку $\vec{OA'} = k\vec{OA}$, $\vec{OB'} = k\vec{OB}$ и $\vec{OX'} = k\vec{OX}$, то из этих равенств и (6) получаем, что

$$\vec{OX'} = (1-t)\vec{OA'} + t\vec{OB'} \qquad (7)$$

(рис.28.4). Равенство (7) и означает, что точка $X' = g_{O,k}(X)$ пробегает отрезок $A'B'$, когда t меняется от 0 до 1. ■

С в о й с т в о 2. *Гомотетия сохраняет величины углов, в том числе и перпендикулярность.*

□ Все различные случаи (углы между прямыми, плоскостями и т.д.) сводятся к углам между лучами, идущими из одной точки. А именно, достаточно доказать,

что для любых точек A, B, C и соответствующих им при гомотетии $g_{O,k}$ точек A', B', C' выполняется равенство

$$\angle B'A'C' = \angle BAC \tag{8}$$

(рис.28.5). Положив $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{b}' = \overrightarrow{A'B'}$, $\boldsymbol{c}' = \overrightarrow{A'C'}$. По основному свойству гомотетии $\boldsymbol{b}' = k\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}' = k\boldsymbol{c}$. Так как

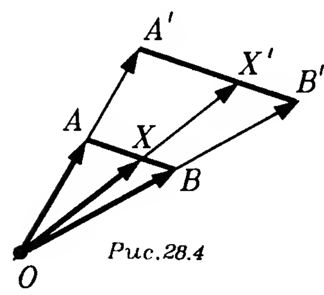


Рис.28.4

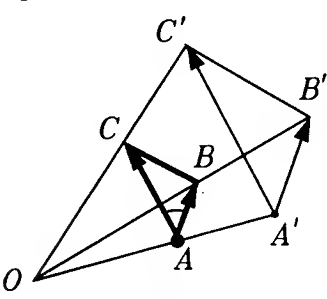


Рис.28.5

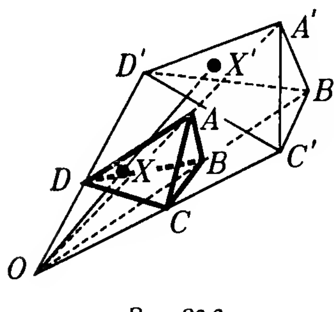


Рис.26.6

$\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{c}' = (k\boldsymbol{b}) \cdot (k\boldsymbol{c}) = k^2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$, то

$$\cos\angle \boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}' = \frac{\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{c}'}{|\boldsymbol{b}'||\boldsymbol{c}'|} = \frac{k^2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})}{|k||\boldsymbol{b}||k||\boldsymbol{c}|} = \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|} = \cos\angle \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}.$$

Из равенства косинусов и следует равенство углов. ■

Свойство 3. *Гомотетия треугольник переводит в треугольник, а тетраэдр переводит в тетраэдр.*

□ То, что треугольник ABC при гомотетии $g_{O,k}$ переходит в треугольник $A'B'C'$, где $A' = g_{O,k}(A)$, $B' = g_{O,k}(B)$, $C' = g_{O,k}(C)$, следует из свойства (1). Действительно, треугольник ABC заполняют отрезки AX, где точка X пробегает отрезок BC. Эти отрезки гомотетия $g_{O,k}$ переведет в отрезки $A'X'$, у которых точка X' пробегает отрезок $B'C'$. Поэтому отрезки $A'X'$

заполнят треугольник $A'B'C'$. Аналогичное рассуждение проводится и для тетраэдров $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (рис.28.6). ■

С в о й с т в о 4. *Гомотетия переводит прямую в прямую, луч — в луч, плоскость — в плоскость, полуплоскость — в полуплоскость и сохраняет при этом отношение их параллельности.*

Эти утверждения доказываются точно так же, как соответствующие свойства движений (см. п.26.2).

С в о й с т в о 5. *Гомотетия обратима и преобразование, обратное гомотетии $g_{O,k}$, является гомотетией $g_{O,\frac{1}{k}}$ с тем же центром и коэффициентом $\frac{1}{k}$.*

Это свойство вытекает из равенства (2) (п.28.2).

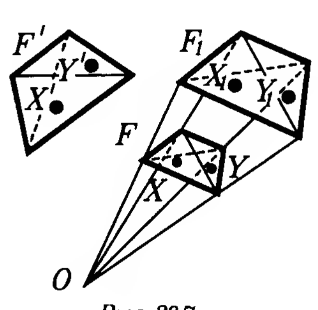


Рис.28.7

28.3. **Свойства подобия.** Во-первых, докажем, что *подобие с коэффициентом k есть композиция гомотетии с коэффициентом k и движения.*

□ Пусть фигура F' получена из фигуры F подобием f с коэффициентом k (рис.28.7). Гомотетией $g_{O,k}$ с любым центром O переведем фигуру F в фигуру F_1. Тогда любым точкам X, Y фигуры F ставятся в соответствие такие точки $X_1 = g_{O,k}(X)$, $Y_1 = g_{O,k}(Y)$, что $X_1Y_1 = kXY$. Но и для точек $X' = f(X), Y' = f(Y)$ также $X'Y' = kX_1Y_1$. Поэтому $X'Y' = X_1Y_1$. Это равенство верно для любых точек X_1, Y_1 фигуры F_1. Следовательно, фигуры F_1 и F' равны, а потому F' можно получить из F_1 некоторым движением φ: $F' = \varphi(F_1)$. Поскольку $F_1 = g_{O,k}(F)$, то $F' = \varphi \circ g_{O,k}(F)$. Итак, $f = \varphi \circ g_{O,k}$.

Теперь, зная свойства движений и свойства гомотетий, получаем как следствия соответствующих свойств такие свойства подобий.

С в о й с т в о 1. *Подобие отрезок переводит в отрезок.*

С в о й с т в о 2. *Подобие сохраняет величины углов.*

С в о й с т в о 3. *Подобие переводит прямые в прямые, плоскости — в плоскости, а также сохраняет отношения параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.*

С в о й с т в о 4. *В результате подобия с коэффициентом k площади фигур умножаются на k^2, а объемы — на k^3.*

Действительно, площади фигур выражаются как произведения длин д в у х отрезков. При подобии длины умножают на k, а потому площади умножаются на k^2. Аналогично, объемы выражаются через произведения длин т р е х отрезков. Поэтому при подобии объемы умножаются на k^3. ■

Из определения подобия непосредственно вытекают такие два свойства:

С в о й с т в о 5. *Подобие обратимо и преобразование, обратное подобию с коэффициентом k, есть подобие с коэффициентом $\frac{1}{k}$.*

С в о й с т в о 6. *Композиция подобий с коэффициентами k_1 и k_2 является подобием с коэффициентом $k_1 k_2$.*

28.4. **Группы преобразований.** Последние два свойства подобий (свойства 5 и 6) напоминают и об аналогичных свойствах других совокупностей преобразований, например, движений или параллельных переносов. Те совокупности преобразований, которые обладают такими свойствами, называются **группами преобразований.** Определим это понятие точнее.

Пусть Q — некоторая фигура (в частности, Q может быть всем пространством). Совокупность обратимых преобразований G фигуры Q называется **группой преобразований фигуры Q**, если выполняются два условия:

1) для любого преобразования f из совокупности G обратное ему преобразование f^{-1}также принадлежит совокупности G;

2) композиция любых двух преобразований f_1 и f_2 из совокупности G также является преобразованием из совокупности G, т.е. $f_2 \circ f_1 \in G$.

Из этого определения следует, что *тождественное преобразование принадлежит любой группе преобразований,* так как, если $f \in G$, то $f^{-1} \in G$, и $f^{-1} \circ f = E_Q \in G$.

У одной и той же фигуры Q могут быть различные группы преобразований. Пусть H и G — две группы преобразований фигуры Q. Если каждое преобразование из группы H является преобразованием из группы G (т.е. H есть часть G), то говорят, что H является **подгруппой группы** G.

Приведем несколько примеров групп преобразований самой широкой фигуры — всего пространства. Проверка того, что для каждого из этих примеров выполняются оба условия, определяющие группу преобразований, либо уже выполнена нами, либо достаточно очевидна и мы оставляем ее читателю в качестве упражнения.

1. *Группа всех подобий пространства.*

2. *Группа всех движений пространства.* Она является подгруппой группы подобий.

3. *Группа всех движений пространства первого рода.* Она является подгруппой группы всех движений пространства.

4. *Группа всех параллельных переносов.* Она является подгруппой группы всех движений первого рода. Группа переносов обладает **коммутативностью**, поскольку $T_{\bar{a}} \cdot T_{\bar{b}} = T_{\bar{b}} \cdot T_{\bar{a}}$, так как $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

5. *Группа всех гомотетий с фиксированным центром.*

6. *Группа всех поворотов вокруг фиксированной прямой.*

7. Подгруппа, состоящая из двух элементов: некоторой симметрии (относительно точки, прямой или плоскости) и тождественного преобразования.

Наиболее широкой группой преобразований данной фигуры Q является группа всех обратимых преобразований фигуры Q. Самая же бедная ее подгруппа состоит всего лишь из одного тождественного преобразования.

Необходимость рассматривать различные группы преобразований того или иного множества (а не только групп преобразований геометрических фигур) возникает очень часто. В математике она впервые появилась в работах французского математика Эвариста Галуа (1811—1832) в его исследованиях о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Когда в XIX веке рядом с евклидовой геометрией появились и другие, неевклидовы геомерии (первой из них была геомерия Лобачевского), то общую точку зрения на эти геометрии в рамках теории преобразований дал немецкий математик Феликс Клейн (1849—1925). Согласно его концепции, каждая геометрия порождается некоторой группой преобразований.

Еще отметим **группу симметрии** данной фигуры Q. Так называется совокупность всех движений, совмещающих фигуру Q саму с собой.

Чем богаче группа симметрии фигуры, тем симметричнее, правильнее эта фигура. Изучая различные фигуры в предыдущих главах, мы каждый раз рассматривали движения, совмещающие эти фигуры, т.е. находили их группы симметрии. Самая симметричная фигура — все пространство: любое движение пространство совмещает с собой. Из многогранников самыми симметричными являются правильные многогранники. Из ограниченных фигур самыми симметричными являются шар и сфера. Вспомните еще раз, какие движения самосовмещают их.

§29. ИНВЕРСИЯ

29.1. **Определение инверсии.** Содержание этого параграфа в большей своей части относится к планиметрии. То преобразование, которое мы сейчас определим и изучим, чаще всего в элементарной геометрии используется при решении задач на построение. При этом используется то обстоятельство, что инверсия преобразует окружности в прямые и обратно. Сначала мы считаем, что фиксирована некоторая плоскость и все построения ведем в этой плоскости. В планиметрии инверсия определяется так.

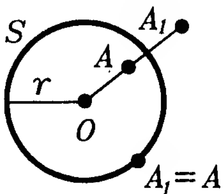


Рис.29.1

Пусть задана некоторая окружность S с центром O и радиусом r (рис.29.1). Каждой точке A, отличной от точки O, поставим в соответствие точку A_1 на луче OA такую, что

$$OA_1 \cdot OA = r^2. \tag{1}$$

Это преобразование называется **инверсией относительно окружности** S и обозначается I_S. Точка O называется **центром инверсии**, радиус r — **радиусом инверсии**, а окружность S — **окружностью инверсии.** В точке O инверсия не определена, т.е. для точки O нет соответствующей ей точки.

Из симметричности точек A и A_1 в определении инверсии вытекает такое свойство:

Свойство 1. *Если точке A соответствует точка A_1 при инверсии I_S, то точке A_1 соответствует точка A, т.е. если $A_1=I_S(A)$, то $A=I_S(A_1)$.*

Это же свойство можно сформулировать и так: *преобразование, обратное инверсии, совпадает с нею, т.е. инверсия является инволюцией.*

Таким образом, $I_S^{-1} \circ I_S = E$.

Свойство 2. *При инверсии каждая точка окружности инверсии неподвижна.*

Это свойство очевидным образом вытекает из (1).

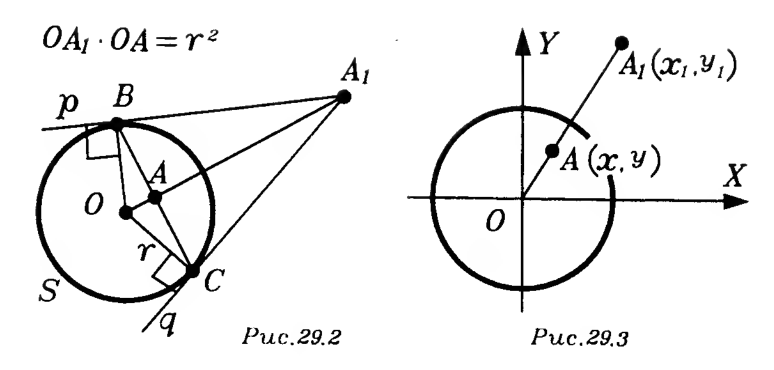


Рис.29.2 Рис.29.3

В остальных случаях пары соответствующих друг другу при инверсии I_S точек A и A_1 лежат по разные стороны от окружности S: одна из них лежит внутри S, а другая — вне S.

Эти свойства говорят о сходстве инверсии и осевой симметрии на плоскости. Поэтому иногда инверсию называют *симметрией относительно окружности.*

Как построить соответствующие друг другу при инверсии точки A и A_1, ясно из рисунка 29.2. Прямые p и q — касательные к окружности S, $OA_1 \cdot OA = r^2$.

Чтобы определить инверсию в пространстве, надо заменить окружность S сферой S, а все остальное — просто повторить. И мы придем к определению **инверсии относительно сферы** S.

29.2. **Аналитическое задание инверсии.** Для изучения дальнейших свойств инверсии удобно применить метод координат. Введем систему прямоугольных координат, поместив их начало в центр O окружности инверсии I_S (рис.29.3). Пусть точка A имеет координаты x, y, а соответствующая ей точка A_1 — координаты x_1, y_1. Тогда $\vec{OA} = (x; y)$, $\vec{OA_1} = (x_1; y_1)$ и

$$\vec{OA_1} = \lambda \vec{OA}. \quad (2)$$

Поэтому $x_1 = \lambda x$, $y_1 = \lambda y$. Найдем множитель λ. Так как $\overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$, то $\lambda > 0$. Из равенства (2) следует, что

$$OA_1 = \lambda OA. \qquad (3)$$

Умножив обе части последнего равенства на OA, получим

$$OA_1 \cdot OA = \lambda OA^2. \qquad (4)$$

Так как $OA_1 \cdot OA = r^2$ и $OA^2 = x^2 + y^2$, то из (4) получаем, что $\lambda = \dfrac{r^2}{x^2 + y^2}$. Следовательно, инверсия I_S задается равенствами

$$x_1 = r^2 \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = r^2 \frac{y}{x^2 + y^2}. \qquad (5)$$

Поскольку $I_S^{-1} = I_S$, то x, y выражаются через x_1, y_1 по таким же формулам:

$$x = r^2 \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = r^2 \frac{y_1}{y_1^2 + x_1^2}. \qquad (6)$$

Ясно, что для пространства все рассуждения аналогичны, а потому в пространстве инверсия задается равенствами:

$$x_1 = r^2 \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y_1 = r^2 \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$(7)$$
$$z_1 = r^2 \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

29.3. **Образы прямых и окружностей, плоскостей и сфер при инверсии.**

Т е о р е м а (об инверсии). **Инверсия на плоскости преобразует:**

1) прямую, проходящую через центр инверсии, в эту же прямую;

2) прямую, не проходящую через центр инверсии, в окружность, проходящую через центр инверсии;

3) окружность, проходящую через центр инверсии, в прямую, не проходящую через центр инверсии;

4) окружность, не проходящую через центр инверсии, в окружность, не проходящую через центр инверсии. (Во всех случаях центр инверсии исключается).

□ Общее уравнение для прямых и окружностей на плоскости таково:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad (8)$$

(если $A^2+B^2+C^2>0$).

Действительно, при $A=0$ уравнение (8) становится линейным уравнением и задает прямую. Уравнение же окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ также является уравнением вида (8).

Выясним теперь, во что преобразует инверсия I_S фигуру F, заданную уравнением (8). Для этого в (8) подставим выражение (7). Получим

$$Ar^4\frac{x_1^2+y_1^2}{(x_1^2+y_1^2)^2}+Br^2\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}+Cr^2\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}+D=0,$$

т.е.

$$D(x_1^2+y_1^2)+r^2(Bx_1+Cy_1)+Ar^4=0. \qquad (9)$$

Уравнение (9) задает образ $I_S(F)$ фигуры F при инверсии I_S.

Рассмотрим последовательно все четыре случая.

1) F — прямая, проходящая через точку O (рис.29.4*а*). Тогда $A=0$ и $D=0$. Поэтому уравнение (9) имеет вид $Bx_1+Cy_1=0$, т.е. задает ту же прямую F.

2) F — прямая, не проходящая через точку O (рис.29.4*б*). Тогда $A=0$, но $D\neq 0$ и уравнение (9) приводится к виду

$$x_1^2+y_1^2-2ax_1-2by_1=0, \qquad (10)$$

где $2a=-\dfrac{Br^2}{D}$ и $2b=-\dfrac{Cr^2}{D}$. Выделив полные квадраты, его можно записать так:

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=a^2+b^2. \qquad (11)$$

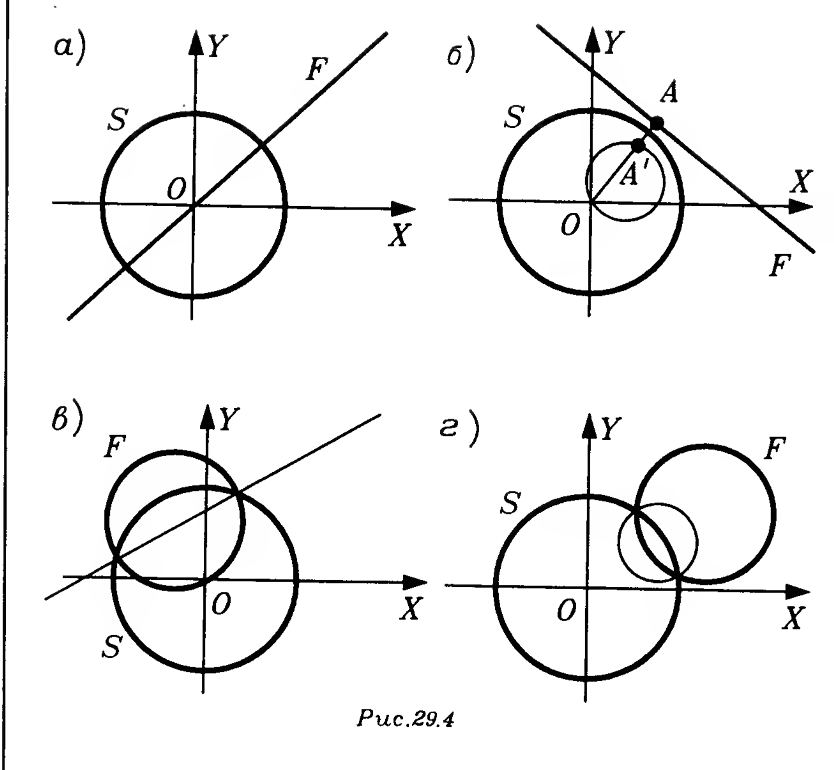


Рис.29.4

Ясно, что (11) задает окружность, а поскольку $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$ удовлетворяют уравнению (10), то эта окружность проходит через точку O.

3) F — окружность, проходящая через точку O. Тогда $A \neq 0$, но $D = 0$ и уравнение (9) приводится к виду

$$Bx_1 + Cy_1 + Ar^2 = 0. \qquad (12)$$

Так как $A \neq 0$, то это уравнение задает прямую, не проходящую через точку O (рис.29.4*в*).

4) F— окружность, не проходящая через точку O (рис.29.4г). В этом случае $A \neq 0$, $D \neq 0$ и уравнение (9) имеет тот же вид, что и уравнение (8): оно тоже задает окружность, не проходящую через точку O. Мы рассмотрели все случаи. ■

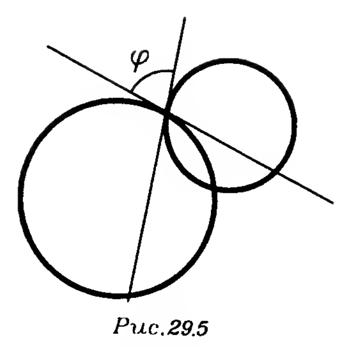
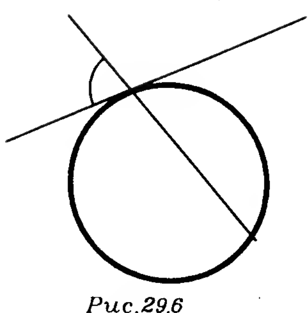


Рис.29.5


Рис.29.6

Несложно повторить все эти рассуждения для пространства и убедиться, что *в пространстве инверсия преобразует плоскость, проходящую через центр инверсии, в ту же плоскость, плоскость, не проходящую через центр инверсии, — в сферу, проходящую через центр инверсии, сферу, проходящую через центр инверсии, — в плоскость, не проходящую через центр инверсии, и, наконец, сферу, не проходящую через центр инверсии, — в сферу, также не проходящую через центр инверсии.*

29.4. **Сохранение величин углов при инверсии.** Ясно, что инверсия не сохраняет расстояний между точками. Но, оказывается, что на плоскости инверсия сохраняет углы между кривыми. Нас интересует лишь случай углов между прямыми и окружностями. Угол между пересекающимися окружностями — это угол между касательными к ним прямыми в точках их пересечения (рис.29.5). Аналогично определяется угол между окружностью и пересекающей ее прямой (рис.29.6).

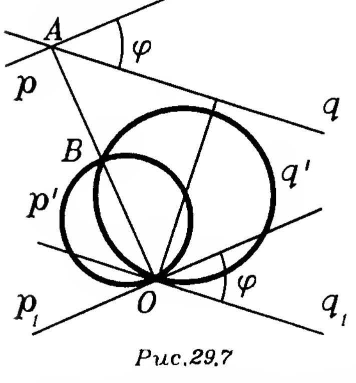


Рис.29.7

Докажем, что *при инверсии углы сохраняются* для случая пересекающихся прямых p и q, не проходящих через центр инверсии — точку O (рис.29.7). Остальные случаи сводятся к этому, так как, например, угол между

окружностями — это угол между их касательными прямыми в точке пересечения окружностей.

Пусть A — точка пересечения прямых p и q. Окружности $U = I_S(p)$ и $V = I_S(q)$ пересекаются в точке O и еще в одной точке $B = I_S(A)$. Поскольку углы между окружностями U и V в точках O и B равны, то будем рассматривать угол φ между ними в точке O. Касательные прямые p_1 и q_1 в точке O к окружностям U и V параллельны соответственно прямым p и q (докажите это!). Поэтому $\angle p_1q_1 = \angle pq = \varphi$. ■

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

ЗАДАЧИ К §25

6.1. **Докажите, что сферы с равными радиусами равны.**

△ Как бы это ни было очевидно — доказательство необходимо. И для этого доказательства у нас сейчас только один способ — получить его на основании определения равных фигур.

Итак, пусть есть две сферы O_1 и O_2 и радиусом R каждая. Если мы найдем такое движение, которое одну из данных сфер отображает на другую, то задача будет решена.

Сначала такое движение стоит "увидеть". Для наших сфер можно увидеть и параллельный перенос, и центральную симметрию, и зеркальную симметрию. После того, как мы их увидели, процесс доказательства не представляет труда — так часто бывает в геометрии. И не беда, что мы не знаем всех свойств этих движений — они нам понадобятся только для нахождения идеи доказательства.

Выберем для доказательства параллельный перенос. Произвольной точке X_1 первой сферы поставим в соответствие такую точку X_2, что $\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{O_1O_2}$. Сразу же можно заметить равенство $\overrightarrow{O_2X_2} = \overrightarrow{O_1X_1}$ (?). Докажем теперь, что: 1) точка X_2 принадлежит второй сфере; 2) $X_1Y_1 = X_2Y_2$ для двух произ-

вольных точек X_1 и Y_1 первой сферы (точка Y_2 — образ точки Y_1).

Первое равенство следует из того, что $O_1X_1X_2O_2$ — параллелограмм(?), а потому $O_2X_2 = O_1X_1$. А так как X_1 принадлежит первой сфере, то $O_1X_1 = R$. Но тогда $O_2X_2 = R$ и X_2 принадлежит второй сфере.

Чтобы доказать равенство $X_1Y_1 = X_2Y_2$, достаточно записать следующие соотношения:

$$\overrightarrow{X_1Y_1} = \overrightarrow{O_1Y_1} - \overrightarrow{O_1X_1}, \quad X_2Y_2 = O_2Y_2 - O_2X_2.$$

Но

$$O_2X_2 = O_1X_1 \text{ и } O_2Y_2 = O_1Y_1,$$

а потому

$$\overrightarrow{X_2Y_2} = \overrightarrow{X_1Y_1}.$$

Но тогда

$$X_1Y_1 = X_2Y_2. \blacktriangle$$

6.2. **Докажите, что в результате движения пересечение фигур переходит в пересечение их образов, а объединение фигур переходит в объединение их образов.**

$\triangle$ Пусть f — движение, A и B — две заданные фигуры. Образ фигуры A в результате движения f обозначим A_1, т.е. $A_1 = f(A)$, а $B_1 = f(B)$. Пусть $C = A \cap B$, а $C_1 = f(C)$. Требуется доказать, что $f(C) = C_1$.

В равенстве $f(C) = C_1$ слева и справа стоят множества. Для доказательства равенства двух множеств доказывают два утверждения:

1) любой элемент из первого множества принадлежит второму;

2) любой элемент второго множества принадлежит первому.

Докажем первое утверждение. Возьмем любую точку $X \in C$ и докажем, что ее образ $X_1 = f(X)$ принадлежит множеству C_1.

Так как $X \in C$, т.е. $X \in A \cap B$, то $X \in A$ и $X \in B$. Так как $f(A) = A_1$, то $X_1 = f(X) \in A_1$. Аналогично, так как $f(B) =$

$= B_1$, то $X_1 = f(X) \in B_1$. Поскольку $X_1 \in A_1$ и $X_1 \in B_1$, то $X_1 \in A_1 \cap B_1 = C_1$.

Докажем второе утверждение. Возьмем точку $Y_1 \in C_1$ и докажем, что ее прообраз Y, т.е. такая точка Y, что $f(Y) = Y_1$, содержится во множестве C. Так как $Y_1 \in C_1$, то $Y_1 \in A_1$ и $Y_1 \in B_1$. Так как $Y_1 \in A_1$, то ее прообраз Y принадлежит множеству A: $Y \in A$ (?). Аналогично, $Y \in B$ (?). Но тогда

$$Y \in A \cap B = C. \blacktriangle$$

В этом доказательстве есть одна тонкость. В задаче дано, что f — движение. Но где же мы это использовали в доказательстве? Вопрос непростой, но попробуйте проанализировать, в чем дело.

А затем принимайтесь за доказательство утверждения.

6.3. Тупоугольный равнобедренный треугольник вращается вокруг оси, проходящей через точку пересечения его высот параллельно большей стороне. Определите объем тела вращения, если тупой угол равен α, а противоположная сторона равна a.

△ Когда предлагается задача на вращение плоской фигуры, вовсе не обязательно рисовать полученную фигуру вращения. Достаточно нарисовать данную плоскую фигуру, ось вращения и точно представить себе, какая получится фигура вращения.

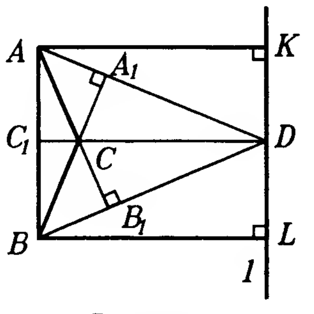


Рис.Р3.93

Итак, сделаем плоский рисунок (рис.Р3.93), на нем ABC — данный треугольник, CC_1, AA_1, BB_1 — его высоты, D — точка пересечения высот треугольника, $AB = a$, $\angle ACB = \alpha$, l — ось вращения, AK и BL — перпендикуляры из точек A и B на прямую l.

Глядя на рисунок, можно понять, что тело вращения представляет собой цилиндр с радиусом основания BL, образующей AB, из которого "вынули" 2 усеченных конуса. Они равны между собой(?), радиусы оснований одного из них BL и CD, высота — DL.

Пусть V — объем тела вращения, V_1 — объем цилиндра, V_2 — объем каждого из усеченных конусов. Тогда

$$V = V_1 - 2V_2.$$

Дальше пишем формулы:

$$V_1 = \pi \cdot BL^2 \cdot BA,$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot DL(BL^2 + CD^2 + BL \cdot CD).$$

Осталось выразить величины, входящие в эти формулы, через данные. $BA = a$. $DL = \frac{a}{2}$. $BL = C_1D$. C_1D найдем из ΔBC_1D. $\angle DBC_1 = \frac{\alpha}{2}$ (?). Тогда

$$C_1D = DB \cdot tg\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \cdot tg\frac{\alpha}{2},$$

а потому

$$BL = \frac{a}{2} \cdot tg\frac{\alpha}{2},\ CD = C_1D - C_1C = BL - CC_1 =$$

$$= \frac{a}{2}tg\frac{\alpha}{2} - BC_1 \cdot tg\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\ (?) = \frac{a}{2}tg\frac{\alpha}{2} - \frac{a}{2}ctg\frac{\alpha}{2}.$$

Теперь все нужные нам величины найдены и остались одни только выкладки. Ответ должен получиться такой:

$$V = \frac{\pi \cdot a^3}{12 sin^2 0{,}5\alpha}\left(3 - 4cos^2\frac{\alpha}{2}\right). \blacktriangle$$

6.4. **Правильная пирамида, в основании которой лежит квадрат со стороной a, вращается вокруг прямой, проходящей через ее вершину. Эта прямая параллельна одной из сторон квадрата, лежащего в основании пирамиды. Вычислите объем тела вращения, если плоский угол при вершине пирамиды равен α.**

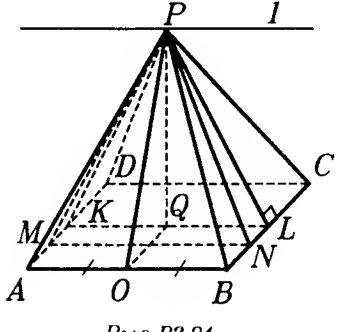


Рис.Р3.94

$\triangle$ Существенное отличие этой задачи от предыдущей в том, что тело вращения (назовем его T) образовано вращением "телесной", пространственной фигуры, а не пло-

ской. В таких задачах прежде всего важно представить и нарисовать плоскую фигуру, в результате вращения которой получается тело T.

Итак, рассмотрим правильную пирамиду $PABCD$, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ (рис.Р3.94). Через вершину P проходит прямая l, вокруг которой вращается пирамида. Считаем, что $l \parallel AB$. Любое плоское сечение пирамиды $PABCD$ плоскостью, проходящей через прямую l, является равнобедренным треугольником PMN. К этим сечениям можно отнести и грани PAB и PCD. Основания у всех таких треугольников равны a, а высоты изменяются от длины высоты PQ пирамиды $PABCD$, до высоты PO треугольника PAB.

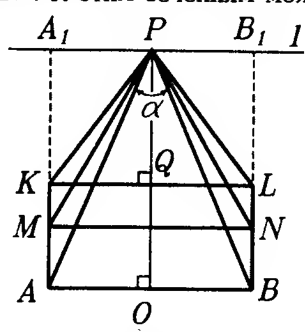


Рис.Р3.95

При вращении пирамиды $PABCD$ вращается вокруг прямой l каждый из треугольников PMN. Чтобы получить плоскую фигуру, вращением которой образовано T, надо нарисовать в одной плоскости все треугольники PMN, совместив их вершины P и направления высот (рис.Р3.95). Получится пятиугольник $PKABL$: его стороны PK и PL — это высоты граней PBC и PAD пирамиды $PABCD$. И теперь становится ясно, что тело T получается так: надо из цилиндра Z, образованного вращением прямоугольника AA_1B_1B вокруг стороны A_1B_1 удалить два конуса U, образованных вращением треугольников KPA_1 и LPB_1 вокруг катетов PA_1 и PB_1.

С самой трудной частью решения задачи мы справились — тело T мы "видим". Посчитать его объем теперь уже не трудно.

Объем цилиндра Z, имеющего высоту a и радиус основания $PO = \frac{a}{2} ctg \frac{\alpha}{2}$, $V(Z) = \pi \cdot \frac{a^3}{4} ctg^2 \frac{\alpha}{2}$.

У конуса U радиус основания равен PQ, но так как нам нужен будет лишь PQ^2, то его и вычисляем:

$$PQ^2 = PO^2 - OQ^2 = \frac{a^2}{4}\left(ctg^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) = \frac{a^2 cos\ \alpha}{4 sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Высота конуса U равна $\frac{a}{2}$, поэтому его объем

$$V(U) = \frac{\pi \cdot a^3 cos\ \alpha}{24 sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Находим объем тела T :

$$V(T) = V(Z) - 2V(U) = \frac{\pi \cdot a^3}{12}\left(3ctg^2\frac{\alpha}{2} - \frac{cos\ \alpha}{sin^2\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Тригонометрическую часть этой формулы можно еще упростить:

$$3ctg^2\frac{\alpha}{2} - \frac{cos\ \alpha}{sin^2\frac{\alpha}{2}} = 3ctg^2\frac{\alpha}{2} - ctg^2\frac{\alpha}{2} + 1 = 1 + 2ctg^2\frac{\alpha}{2}.$$

Итак, окончательно,

$$V(T) = \frac{\pi \cdot a^3}{12}(1 + 2ctg^2\frac{\alpha}{2}).$$ ▲

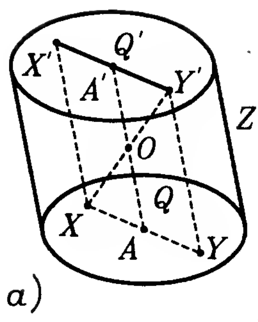
ЗАДАЧИ К §26

6.5. **Две сферы S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 имеют общую окружиость C. Докажнте, что прямая O_1O_2 перпеидикуляриа плоскости α, в которой лежит эта окружиость.**

△ Конечно, эту задачу нетрудно решить и без применения симметрий. Но можно предложить и такое решение. Проведем через прямую O_1O_2 любую плоскость β, и пусть σ_β — отражение в плоскости β. Тогда, очевидно, $\sigma_\beta(S_1) = S_1$ и $\sigma_\beta(S_2) = S_2$, а потому

$$\sigma_\beta(C) = \sigma_\beta(S_1 \cap S_2) = \sigma_\beta(S_1) \cap \sigma_\beta(S_2) = S_1 \cap S_2 = C.$$

Итак, отражение σ_β переводит C в C_1, а тогда σ_β переводит и плоскость α, в которой лежит C, в ту же плоскость α (?). Но



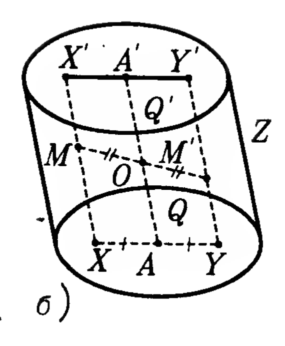


Рис.Р3.96

это возможно лишь тогда, когда $\beta \perp \alpha$. Итак, любая плоскость β, проходящая через прямую O_1O_2, перпендикулярна плоскости α. Но это возможно лишь тогда, когда $O_1O_2 \perp \alpha$ (?). ▲

6.6. **Докажите, что центральиая симметричиость цилиндра равиосильиа цеитральной симметричиости его осиоваиия. (Здесь речь идет о цилиндре общего вида.)**

△ Пусть Z — цилиндр, имеющий центр симметрии — точку O, а Q и Q' — его основания (рис.Р3.96*а*). Пусть Q лежит в плоскости α, а Q' — в плоскости α'. Проведем через точку O прямую, параллельную образующим цилиндра. Она пересечет плоскость α в точке A, а плоскость α' в точке A'. Точка O является серединой отрезка AA' (?). Покажем, что точка A — центр симметрии основания Q, а точка A' — центр симметрии основания Q'. Возьмем любую точку $X \in Q$, и пусть Y' — симметричная ей точка (относительно точки O). Ясно, что $Y' \in Q'$. Точка Y' является одним из концов образующей YY' цилиндра Z. Так как $XO = OY'$ и $OA \parallel YY'$, то $XA = AY$. Поэтому точка Y симметрична точке X относительно точки A. Итак, точка A — центр симметрии основания Q. Точно так же точка A' — центр симметрии основания Q'.

Пусть теперь, наоборот, дано, что цилиндр Z имеет основание, симметричное относительно некоторой точки A. Тогда строим образующую AA' и берем точку O — середину этого отрезка. Возьмем затем любую точку $M \in Z$ и проведем через

нее образующую XX' (рис.Р3.96б). Точка Y, симметричная точке X относительно точки A, будет точкой основания Q. Идущая из Y образующая YY' цилиндра Z пересечет прямую OM в точке $M' \in Z$, симметричной точке M относительно точки O. Итак, O — центр симметрии цилиндра Z. ▲

6.7. **Куб повериули иа 60° отиосительио его диагоиали. Найдите пересечение и объедииеиие исходиого и получениого куба.**

△ Прежде всего вспомним, что в кубе есть сечение плоскостью, являющееся правильным шестиугольником и перпендикулярное диагонали куба. Если в кубе $J = ABCDA_1B_1C_1D_1$ взять диагональ AC_1, то такое сечение можно получить, если провести через середину этой диагонали (точку O) плоскость $\alpha \perp (AC_1)$ (рис.Р3.97). В сечении получим правильный шестиугольник $KLMNPQ = T$, причем точка K — середина ребра DD_1, точка L — середина ребра D_1A_1 и т.д. При повороте υ куба J вокруг (AC_1) на 60° шестиугольник T перейдет в себя. Будем считать, что точка K перешла в точку L, точка L — в точку M и т.д. Так как вершины A и C_1 лежат на оси поворота, то $\upsilon(A) = A$ и $\upsilon(C_1) = C_1$. Поэтому отрезки AK, AL и т.д. перейдут соответственно в отрезки AL, AM и т.д. Поскольку отрезки AK и AL лежат в грани AA_1DD_1, то плоскость этой грани после поворота υ перейдет в плоскость ALM, а образ этой грани — квадрат $\upsilon(AA_1D_1D)$ — отсечет от куба J тетраэдр AA_1LM. Кроме того, от куба J повернутый куб $\upsilon(J)$ отсечет еще два тетраэдра с вершиной A — $ABNP$ и $ADQK$, а также три тетраэдра с вершиной C_1 (назовите их). Следовательно, общая часть куба J и куба $\upsilon(J)$ состоит из двух шестиугольных пирамид с вершинами A и C_1 и общим основанием $KLMNQ$. ▲

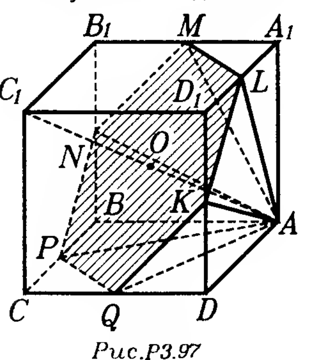


Рис.Р3.97

6.8. **Пусть плоская фигура имела: а) центр симметрии; б) ось симметрии. Докажите, что ее образ при любом движеиии обладает тем же свойством.**

△ а) Пусть фигуру F, имеющую центр симметрии — точку O, движение f отобразило на фигуру F'. Покажем, что тогда фигура F' тоже имеет центр симметрии, причем, этим центром будет точка $O' = f(O)$. Для этого надо проверить, что если взять любую точку Y фигуры F' и построить симметричную ей относительно точки O' точку (рис.Р3.98), то построенная точка тоже будет точкой фигуры F'. Это построение проведем так. Поскольку $F' = f(F)$ и $Y \in F'$, то найдется такая точка $X \in F$, что $f(X) = Y$. Так как точка O — центр симметрии фигуры F, то точка X' симметрична точке X относительно O, а также является точкой фигуры F. Но тогда ее образ — точка $Y' = f(X')$ — будет точкой фигуры F'. Образом отрезка XX' при движении f будет отрезок YY' (свойство 2), а середина отрезка XX' — точка O — переходит в середину отрезка YY' (?). Но образом точки O является точка O'. Поэтому точка O' — середина отрезка YY', т.е. точка Y' симметрична точке Y относительно точки O' и принадлежит фигуре F'. Следовательно, фигура F' симметрична и точка O' — ее центр симметрии. ▲

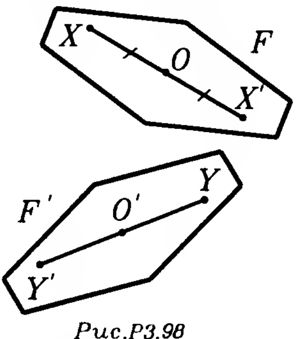


Рис.Р3.98

6.9. **В правильиой четырехугольной усечениой пирамиде противоположные граии перпеидикуляриы. Разность сторои их основания равиа 1. Как вычислить ее высоту?**

△ Нарисуем эту усеченную пирамиду $ABCDA_1B_1C_1D_1$, нарисовав сначала пунктирно правильную пирамиду $PABCD$, из которой получена усеченная пирамида (рис.Р3.99*а*). Усеченные пирамиды аналогичны трапециям, и задачи о них сводятся, обычно, к задачам о трапециях. Так и здесь. Заметим, во-первых, что противоположными гранями у многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются лишь пары боковых граней BB_1C_1C,

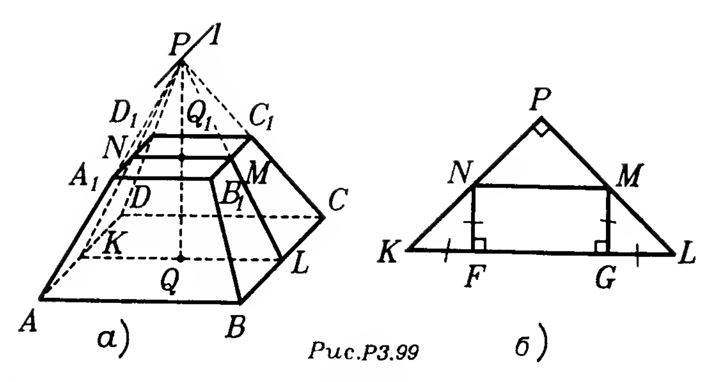


Рис.Р3.99

AA_1D_1D и AA_1B_1B, CC_1D_1D. Их плоскости и перпендикулярны. Рассмотрим первую пару граней. Их плоскости пересекаются по прямой l, проходящей через вершину P и параллельной ребрам BC и AD (?). Проведем через точку P плоскость, перпендикулярную прямой l. Эта плоскость пересечет пирамиду $PABCD$ по прямоугольному равнобедренному треугольнику PKL, а усеченную пирамиду по равнобедренной трапеции $KLMN$ с острым углом, равным 45° (?). Часть QQ_1 высоты PQ пирамиды $PABCD$ является высотой как усеченной пирамиды, так и трапеции $KLMN$. Мы свели нашу задачу к простой планиметрической задаче (рис.Р3.99б). Из рисунка Р3.99б ясно, что высота $H = MG = KF = \frac{1}{2}(KL - MN) = \frac{1}{2}$. ▲

6.10. **Два равных шара касаются. Через их общую точку проведена плоскость, пересекающая каждый шар по кругу. Докажите, что эти круги равны.**

△ Решить эту задачу можно ничего не рисуя, ничего не вычисляя, а лишь ссылаясь на уже известные утверждения. Итак, пусть два равных шара F и G касаются в точке A и через A проходит плоскость α, пересекающая F по кругу $C = F \cap \alpha$ и G по кругу $D = G \cap a$. Шары F и G симметричны относительно точки A (?). Поэтому центральная симметрия S_A с центром A переводит их друг в друга: $F = S_A(G)$ и $G = S_A(F)$. Но точка A (как и любая другая точка плоскости α) является центром симметрии плоскости α. Поэтому $S_A(\alpha) = \alpha$. Но тогда согласно задаче 6.2.,

$$S_A(C) = S_A(F \cap \alpha) = S_A(F) \cap S_A(\alpha) = G \cap \alpha = D.$$

Поскольку движение S_A переводит круг C в круг D, то эти круги равны. ▲

ЗАДАЧИ К §27

6.11. **Докажите, что движение, изменяющее направления векторов на противоположные, является центральной симметрией.**

△ В задаче речь идет о таком движении f, которое обладает следующим свойством: какие бы две точки A и B мы не выбрали, направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, у которого $A_1 = f(A)$ и $B_1 = f(B)$, противоположно направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, т.е. $\overrightarrow{A_1B_1} \downarrow\uparrow \overrightarrow{AB}$. Поскольку f — движение, то $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |\overrightarrow{AB}|$. Но тогда, учитывая, что $\overrightarrow{A_1B_1} \downarrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, имеем: $\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{AB}$.

Пусть $C = f(A_1)$. По условию задачи $\overrightarrow{A_1C} = -\overrightarrow{AA_1}$. Кроме того $\overrightarrow{A_1A} = -\overrightarrow{AA_1}$. Поэтому $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A}$, т.е. $C = A$. Итак, движение f является инволюцией. Поэтому $f(AA_1) = A_1A$. Следовательно, точка O — середина отрезка AA_1 — будет неподвижной точкой движения f (?). Любую точку M движение f переводит в такую точку M_1, что $\overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{OM}$, т.е. точка O является серединой отрезка MM_1. Поэтому f — центральная симметрия относительно точки O. ▲

6.12. **Докажите, что композиция двух центральных симметрий является переносом.**

△ Центральная симметрия S_A меняет направление на противоположное. Аналогично, центральная симметрия S_B также меняет направление на противоположное. Поэтому их композиция $S_B \circ S_A$ является движением, не изменяющим направлений. А такое движение, как установлено в п.25.4, является переносом. ▲

6.13. **В результате каких движений отображается на себя правильная пирамида?**

△ Будем рассматривать правильную прямоугольную пирамиду T с вершиной P и основанием $A_1A_2 \ldots A_n$, отличную от правильного тетраэдра (о нем рассказано в п.12.4). Ее боковыми гранями являются равнобедренные, но не равносторонние, треугольники PA_iA_{i+1} с вершиной P и основаниями A_iA_{i+1}. Движения, самосовмещающие пирамиду T, переводят эти треугольники друг в друга, оставляя вершину P неподвижной(?). Эти движения самосовмещают правильный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$, оставляя его центр Q неподвижным. Следовательно, все движения самосовмещающие T, имеют неподвижную прямую PQ. Они являются либо поворотами вокруг этой прямой на углы, кратные углу $\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$, либо симметриями относительно плоскостей, проходящих через прямую PQ и оси симметрии основания пирамиды T. ▲

6.14. **Является ли тетраэдр правильным, если он имеет: а) плоскости симметрии; б) оси симметрии; в) некоторое число и тех, и других?**

△ а) правильная треугольная пирамида, отличная от правильного тетраэдра, имеет три плоскости симметрии. Так что ответ на первый вопрос — отрицательный: в общем случае — не является.

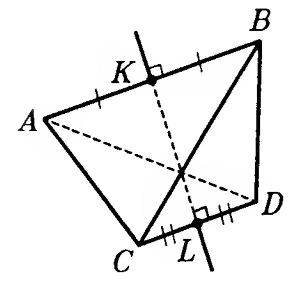


Рис.Р3.100

б) Если тетраэдр $ABCD$ имеет ось симметрии l, то эта ось должна проходить через середины K, L двух скрещивающихся ребер (например, AB и CD) и быть перпендикулярна им (рис.Р3.100). Поэтому у тетраэдра не может быть больше трех осей симметрии. Ясно, что тетраэдр AB_1CD_1, вписанный в прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.Р3.101) имеет три оси симметрии, проходящие через центры противоположных граней параллелепипеда, но правильным не является, если параллелепипед — не куб.

Если около тетраэдра $ABCD$ описать параллелепипед так, что скрещивающиеся ребра тетраэдра окажутся диагоналями противоположных граней параллелепипеда (как это сделать подсказывает рис.Р3.101), то наличие оси симметрии у тетраэд-

ра равносильно тому, что этот параллелепипед окажется прямым(?). Прямоугольный же параллелепипед даст уже три оси симметрии. А ровно двух осей симметрии у тетраэдра быть не может.

в) Если на рис.Р3.101 прямоугольный параллелепипед не куб, но имеет грань — квадрат, то тетраэдр AB_1CD_1 имеет три оси симметрии и две плоскости симметрии. Поэтому необходимо не менее трех плоскостей симметрии, чтобы тетраэдр оказался правильным. Если эти плоскости не проходят через одну вершину тетраэдра, то этого и достаточно для правильности тетраэдра(?). Если же они проходят через одну вершину, то их наличие обеспечивает лишь правильность пирамиды, а чтобы тетраэдр оказался правильным необходимо еще наличие хотя бы одной оси симметрии(?): выпишите сами равенство ребер.

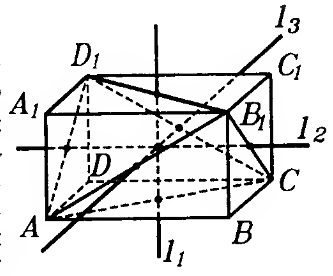


Рис.Р3.101

В заключении напомним, что у правильного тетраэдра три оси симметрии и шесть плоскостей симметрии. ▲

6.15. **Может ли ограниченное тело: а) перейти в себя в результате переноса; б) иметь больше одного центра симметрии?**

△ а) Допустим тело F самосовмещается в результате переноса T на ненулевой вектор $\boldsymbol{a}$. Возьмем любую точку A_0 тела F и построим последовательность точек $A_1 = T(A_0)$, $A_2 = T(A_1), \dots, A_n = T(A_{n-1}), \dots$. Поскольку $T(F) = F$, то все точки A_n принадлежат F. Так как $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = \dots = \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \boldsymbol{a}$, то точки A_n лежат на одной прямой и уходят по этой прямой на бесконечность, так как $A_0A_n = n|\boldsymbol{a}|$. Следовательно, тело F неограниченно.

б) Допустим тело F имеет два центра симметрии — точки A и B. Тогда $S_A(F) = F$ и $S_B(F) = F$. Поэтому $S_B \circ S_A(F) = F$. Итак, движение $S_B \circ S_A$ самосовмещает тело F. Но как доказано в задаче 6.12, $S_B \circ S_A$ — перенос. Следовательно, как вытекает из пункта а), тело T — неограниченно. ▲

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧИ К §25

Рисуем

6.1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма. Перенос задается вектором: а) $0{,}5\vec{AB}$; б) $\vec{AO}$, где O — центр нижнего основания. Нарисуйте образ призмы при этом переносе. Нарисуйте объединение и пересечение исходной и полученной призм.

6.2. Дан правильный тетраэдр. Нарисуйте тетраэдр, который получается из данного в результате: а) центральной симметрии относительно середины высоты; б) зеркальной симметрии относительно плоскости, проходящей через середину высоты перпендикулярно к ней; в) поворота на 60° вокруг его высоты; *г) поворота на 90° вокруг прямой, соединяющей середины его противоположных ребер. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного тетраэдров.

6.3. Дан куб. Нарисуйте куб, который получается из данного в результате: а) переноса на вектор, направленный по его диагонали, длиной в половину этой диагонали; б) центральной симметрии относительно точки, находящейся на его диагонали и делящей ее в отношении 2:1; в) зеркальной симметрии относительно плоскости, которая пересекает его по правильному шестиугольнику; г) поворота на 90° вокруг прямой, проходящей через середины двух параллельных ребер, не лежащих в одной грани. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кубов.

6.4. Нарисуйте тела, которые можно получить, вращая круг.

6.5. Нарисуйте тела, которые получаются при вращении: а) куба вокруг ребра; б) куба вокруг диагонали; в) правильного тетраэдра вокруг ребра; г) конуса вокруг прямой, параллельной оси и проходящей вне его.

Планируем

6.6. Как найти объем и площадь поверхности фигур — объединений и пересечений — из задач 6.1, 6.2?

6.7. Как найти объем и площадь поверхности фигур из задачи 6.5?

Представляем

6.8. Может ли центр симметрии тела не принадлежать ему?

6.9. Два равных отрезка: а) параллельны; б) имеют ровно одну общую точку; в) скрещиваются. Каким движением можно один из них отобразить на другом?

6.10. Два отрезка симметричны друг другу относительно двух плоскостей. Какая получится фигура, если их концы последовательно соединить отрезками?

6.11. Через некоторую прямую проведены всевозможные плоскости. Данная точка отражается от всех этих плоскостей. Какую фигуру образуют все полученные точки?

6.12. Верно ли, что: а) наклонный параллелепипед, две грани которого перпендикулярны основанию, имеет плоскость симметрии; б) среди граней параллелепипеда, имеющего плоскость симметрии, есть прямоугольники; в) параллелепипед, имеющий две плоскости симметрии, является прямоугольным?

6.13. Как разрезать куб на три равные пирамиды?

Оцениваем

6.14. Прямоугольный треугольник с гипотенузой d вращается вокруг одного из катетов. При каком условии объем тела вращения будет наибольшим?

6.15. Периметр равнобедренного треугольника равен P. Этот треугольник вращается вокруг основания. Какой из таких треугольников дает наибольший объем тела вращения?

Думаем

6.16. Центр куба отражается в плоскости каждой его грани. Докажите, что полученные точки являются вершинами октаэдра. Можно ли таким путем получить и другие правильные многогранники?

6.17. В данный шар вписан:

а) правильный тетраэдр;

б) куб. Грани этого многогранника продлили до пересечения со сферой. На какие фигуры разделилась сфера? На какие фигуры разделился шар? Сколько среди них равных друг другу?

Исследуем

6.18. Является ли движением пространства такое его преобразование, которое точке с координатами $(x;y;z)$ ставит в соответствие точку с координатами:

а) $(-x;y;z)$; б) $(x;-y;-z)$; в) $(-x;-y;-z)$; г) $(|x|;y;z)$;

д) $(x;y;0)$; е) $(0;0;z)$; ж) $(x+a;y+b;z+c)$; з) $(2-x;y;z)$;

и) $(z; x; y)$; к) $(2x; y; z)$; л) $(2x; 0{,}5y; z)$; м) $(x+y; y; z)$;

н) $(x+y; y+z; z+x)$?

6.19. Многогранник имеет центр симметрии, центр описанного шара, центр вписанного шара и центр масс. Сколько из этих точек могут совпадать?

П о с т у п а е м в В У З

6.20. Из конца диаметра шара проведена хорда так, что поверхность, образуемая вращением ее вокруг этого диаметра, делит объем шара на две равновеликие части. Определите угол между хордой и диаметром.

Ответ: $\arccos \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

6.21. Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг внешней оси, параллельной стороне треугольника и отстоящей от нее на расстоянии, равном половине высоты треугольника. Найдите объем тела вращения.

Ответ: $\dfrac{5\pi \cdot a^3}{8}$.

6.22. Треугольник ABC вращается вокруг биссектрисы AD. Докажите, что площади поверхностей, описанных при этом сторонами AB и AC, относятся как объемы, полученные вращением частей ABD и ACD.

6.23. Равнобедренный треугольник, основание которого равно a, а угол при основании α, вращается вокруг прямой, проходящей через один из концов основания перпендикулярно к нему. Найдите площадь поверхности получившегося при этом тела вращения.

Ответ: $\dfrac{\pi \cdot a^2}{\cos \alpha}$.

6.24. Часть квадрата $ABCD$, оставшаяся после того, как из него вырезали четверть окружности с центром в вершине D и радиусами, равными стороне квадрата, вращается вокруг оси, проходящей через D параллельно диагонали AC. Найдите объем полученного тела вращения, если сторона квадрата равна a.

Ответ: $\dfrac{\pi \cdot a^3}{\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

6.25. Площадь прямоугольной трапеции $ABCD$ равна S, длина высоты AB равна h, величина острого угла ADC тра-

пеции равна α. На боковой стороне CD взята точка E так, что $CE = ED$. Найдите объем тела, полученного вращением четырехугольника $ABED$ вокруг прямой AB.

Ответ: $\frac{\pi}{24h}(16S^2 + h^4 ctg^2\alpha + 6Sh^2 ctg\ \alpha)$.

6.26. Найдите объем тела, полученного при вращении правильного шестиугольника вокруг его стороны, равной a.

Ответ: $4{,}5\pi \cdot a^3$.

6.27. На окружности полукруга радиуса R даны точки A и B. Если N — один из концов диаметра, а O — центр окружности, то $\angle AON = \alpha$, $\angle BON = \beta$ $\left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. Определите площадь полной поверхности тела, образованного вращением кругового сектора AOB вокруг диаметра.

Ответ: $2\pi \cdot R^2 sin\ 0{,}5(\alpha + \beta)(2sin 0{,}5(\alpha - \beta) + cos\ 0{,}5(\alpha - \beta))$.

6.28. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Каждая из его вершин симметрично отражена относительно плоскости противоположной ей грани, в результате чего получены соответственно точки $KLMN$. Найдите отношение объемов исходного и полученного тетраэдров.

Ответ: 27:125.

6.29. В тетраэдре проведены отрезки, соединяющие его вершины с точками пересечения медиан противоположных граней. Все они пересекаются в точке O. Второй тетраэдр симметричен первому относительно точки O. Объем исходного тетраэдра равен V. Найдите объем общей части двух тетраэдров.

Ответ: $0{,}5V$.

6.30. Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a, а боковое ребро — длину $1{,}125a$. Точка E — середина ребра AB, а точка M — лежит на отрезке EC и $EM = 0{,}25EC$. Вторая призма симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно прямой MC_1. Найдите объем общей части этих призм.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{48}a^3$.

6.31. Дан правильный тетраэдр объема V. Второй тетраэдр получается из первого поворотом его на угол

α ($\alpha \le 0{,}5\pi$) вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер тетраэдра. Найдите объем общей части этих двух тетраэдров.

Ответ: $V \dfrac{1+tg^2 0{,}5\alpha}{(1+tg\ 0{,}5\alpha)^2}$.

6.32. Куб с ребром a повернули на 90° вокруг прямой, соединяющей середины двух параллельных и не лежащих в одной грани ребер. Найдите объем общей части исходного куба и повернутого.

Ответ: $\dfrac{a^3}{3}(3\sqrt{2}-2)$.

6.33. Правильная треугольная пирамида со стороной основания a повернута вокруг оси симметрии на угол 60°. Определите объем общей части исходной и повернутой пирамид, если боковые грани — прямоугольные треугольники.

Ответ: $\dfrac{1}{36}a^3\sqrt{2}$.

6.34. В шар радиуса R вписан правильный тетраэдр. Поворотом его на угол $\dfrac{\pi}{3}$ вокруг высоты получается новый тетраэдр, вписанный в шар. Найдите объем части шара, внешней по отношению к обоим тетраэдрам.

Ответ: $R^3 \cdot \left(\dfrac{4\pi}{3} - \dfrac{32\sqrt{3}}{81}\right)$.

6.35. Конус вращения вокруг оси — прямой, перпендикулярной его высоте и проходящей через вершину. Найдите площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, если образующая конуса равна 5, а высота равна 4.

Ответ: $50 \cdot arccos\ 0{,}8$.

ЗАДАЧИ К §26

Дополняем теорию

6.36. Докажите, что плоскость переходит в параллельную ей плоскость (если не в себя) в результате:

а) переноса; б) центральной симметрии.

Планируем

6.37. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка O — центр грани $ABCD$. Как вычислить угол между прямой B_1O и:

а) прямой CC_1; б) прямой CD_1; в) плоскостью CC_1D;

г) плоскостью A_1C_1D?

6.38. Пусть $PABCD$ — пирамида, в основании которой лежит ромб $ABCD$. $PB \perp (ABC)$. Площадь грани PBC равна S. Через точку K — середину ребра AD — проводится сечение, параллельное плоскости PAB. Как найти его площадь?

6.39. Каждая боковая грань правильного тетраэдра совершила поворот вокруг ребер основания на один и тот же угол во внешнюю сторону. При этом получился многогранник с шестью вершинами и равными ребрами. На какой угол повернулись грани?

Представляем

6.40. Найдутся ли два равных круговых сечения одной плоскостью у двух неравных конусов, если они стоят на одной плоскости по одну сторону от нее?

6.41. Две окружности центрально-симметричны и не лежат в одной плоскости. Верно ли, что они лежат на поверхности: а) одной сферы; б) одного цилиндра? А если эти окружности зеркально-симметричны?

6.42. В каком случае два равных:

а) шара; б) цилиндра; в) конуса центрально-симметричны? Зеркально симметричны?

6.43. Какими поворотами шар можно отобразить на себя?

6.44. Какими поворотами одна из данных фигур отображается на другую, если эти фигуры: а) две прямые; б) две плоскости; в) два равных шара? Найдется ли такой поворот, который при этом и вторую фигуру отобразит на первую?

6.45. Всегда ли, вращая выпуклую фигуру, мы получим выпуклое тело?

Думаем

6.46. Используя свойства переноса, докажите, что: а) два перпендикуляра к одной плоскости параллельны; б) две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны; в) если прямая параллельна прямой, перпендикулярной плоскости, то она перпендикулярна плоскости; г) линейные углы двугранного угла равны между собой.

6.47. Докажите, что объединение двух плоскостей является фигурой: а) центрально-симметричной; б) зеркально-симметричной.

6.48. Прямая b получена из прямой a отражением в плоскости α. Эти прямые имеют общую точку. Докажите, что эта точка лежит в плоскости α.

6.49. В шаре радиусом R провели через центр две плоскости, образующие между собой угол φ. Как узнать, в каком отношении они разбили объем шара?

6.50. Через биссектрису угла провели плоскость. Докажите, что стороны угла образуют с ней равные углы.

Исследуем

6.51. Можно ли равными параллелепипедами заполнить все пространство? Можно ли зто сделать другими равными многогранниками?

6.52. Будет ли сечение центрально-симметричного тела, проходящее через центр симметрии, центрально-симметрично?

6.53. Тело центрально-симметрично. Будет ли центрально-симметрична его ортогональная проекция? Будет ли верно обратное?

6.54. Каждое из двух тел центрально-симметрично. Будет ли центрально-симметрично их: а) объединение; б) пересечение?

6.55. Центрально-симметричное тело разделили плоскостью. Одна его часть оказалась центрально-симметричной. Будет ли таковой и другая его часть?

6.56. Существует ли многогранник, имеющий любое наперед заданное число плоскостей симметрии?

ЗАДАЧИ К §27

Дополняем теорию

6.57. Докажите, что композиция двух отражений в пересекающихся плоскостях является поворотом, а в двух параллельных плоскостях — параллельным переносом.

6.58. Нарисуйте фигуру, которая переходит в себя в результате: а) винта; б) зеркального поворота; в) скользящего отражения.

6.59. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. В результате некоторого движения он переходит в другой куб. Нарисуйте этот другой куб, если движение таково: а) винт с осью поворота, проходящей через центры O и O_1 граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, и

вектором $\overrightarrow{AA_1}$, а угол поворота равен 45°; б) зеркальный поворот на 45° с осью поворота OO_1 и отражением в плоскости, перпендикулярной прямой OO_1 и проходящей через центр куба; в) скользящее отражение, где отражение происходит в плоскости, перпендикулярной диагонали куба и проходящей через центр куба, а вектор равен $\overrightarrow{AC}$.

6.60. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. В результате движения он переходит в другой тетраэдр. Нарисуйте этот другой тетраэдр, если движение таково:

а) винт с осью поворота PQ (Q — центр основания), углом поворота 60° и вектором $0{,}5QP$;

б) зеркальный поворот с осью поворота PQ, углом поворота 60° и плоскостью отражения, перпендикулярной PQ и проходящей через середину высоты PQ;

в) скользящее отражение с плоскостью отражения, проходящей через PB и K — середину AC, и вектором $0{,}5\overrightarrow{KB}$.

Представляем

6.61. Сохраняет ли ориентацию базиса: а) перенос; б) центральная симметрия; в) зеркальная симметрия; г) поворот; д) винт; е) зеркальный поворот; ж) скользящее отражение?

6.62. Имеет ли движение неподвижные точки, если это движение: а) перенос; б) центральная симметрия; в) зеркальная симметрия; г) поворот; д) винт; е) зеркальный поворот; ж) скользящее отражение?

6.63. Даны два равных равнобедренных треугольника. Какими движениями их можно совместить, если они имеют общую: а) вершину равных сторон; б) сторону основания; в) боковую сторону; г) медиану к основанию; д) среднюю линию боковых сторон?

6.64. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Каким движением можно отобразить: а) ребро AA_1 на ребро CC_1; б) ребро AB на ребро DD_1; в) диагональ на другую диагональ; г) отрезок B_1C на отрезок DC_1; д) отрезок, соединяющий середины параллельных ребер, не лежащих в одной грани, на другой такой же; е) треугольник C_1BD на треугольник A_1BD; ж) треугольник C_1BD на треугольник AB_1D_1; з) треугольник C_1BD на тре-

угольник B_1AC; и) треугольник C_1BD на треугольник BC_1A_1; к) сечение AB_1C_1D на сечение DA_1B_1C? Будет ли в таком движении и вторая фигура отображаться на первую?

6.65. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр. Каким движением можно отобразить:

а) ребро AD на ребро DC; б) ребро AD на ребро BC;

в) одну из его высот на другую;

г) отрезок, соединяющий середины противоположных ребер, на другой такой же отрезок;

д) сечение одной плоскостью симметрии на другое такое же;

е) сечение, являющееся квадратом, на другое такое же? Будет ли в таком движении и вторая фигура отображаться на первую?

6.66. В результате каких движений отображается на себя: а) отрезок; б) прямая; в) круг; г) квадрат; д) правильный многоугольник; е) ромб; ж) плоскость; з) двугранный угол?

6.67. В результате каких движений отображается на себя тетраэдр $PABC$, у которого: а) $PB = PC = AC = AB$; б) $PB = PC = AC = AB$, $PA = BC$; в) $PA = BC$, $PB = AC$, $PC = AB$?

6.68. Тело является объединением двух шаров, но не шаром. Какими движениями оно отображается на себя?

6.69. У четырехугольной пирамиды: а) все боковые ребра равны и противоположные плоские углы при вершине равны; б) все плоские углы при вершине равны и противоположные боковые ребра равны. Какими движениями ее можно самосовместить?

6.70. Какими движениями отображается на себя антипризма?

6.71. Как разделить куб на: а) 8 равных кубов; б) 6 равных пирамид; в) 3 равные пирамиды; г) 4 равные треугольные призмы?

6.72. Как разделить прямую треугольную призму на 3 равновеликих тетраэдра? Есть ли среди них равные?

6.73. Как разделить параллелепипед на: а) 6 равновеликих пирамид; б) три равновеликие пирамиды? Есть ли среди них равные?

6.74. В шаре радиусом 1 провели три радиуса OA, OB, OC, из которых каждые два перпендикулярны. Какая часть объема шара ограничена четвертями больших кругов шара OAB, OAC, OBC и поверхностью? А какая часть поверхности?

Думаем

6.75. Две правильные четырехугольные пирамиды P_1ABCD и P_2ABCD имеют общее основание $ABCD$. Точка K — середина ребра P_1B, точка L — середина ребра P_2A, точка M — точка пересечения медиан в грани ADP_2, точка N — точка пересечения медиан в грани CDP_1. Докажите, что:

а) $\angle P_1C, P_2B = \angle P_2B, P_1A$; б) $\angle P_1B, P_2CD = \angle P_2A, P_1BC$;

в) $\angle P_1AB, P_2AD = \angle P_2AD, P_1CD$; г) $KM = LN$;

д) расстояние от точки K до плоскости CDP_2 равно расстоянию от точки L до плоскости P_1BC.

Исследуем

6.76. Возьмите композицию любых двух известных вам движений и выясните: а) меняет ли она ориентацию плоскости; б) имеет ли она неподвижные точки?

6.77. Сколько неподвижных точек может иметь каждое известное вам движение? Как они расположены? А сколько оно может иметь неподвижных прямых? Плоскостей?

6.78. Прямая b получается из прямой a некоторым движением. Установите расположение этих прямых между собой, если это движение: а) винт; б) зеркальный поворот; в) зеркальное отражение.

Переключаемся

6.79. На цилиндре радиусом R и высотой H намотана проволока. Как вы узнаете ее длину?

6.80. Вам нужно спроектировать винтовую лестницу. Как вы будете действовать?

6.81. Можете ли вы объяснить принцип действия уголкового отражателя? Он составлен из трех попарно перпендикулярных зеркал.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

ГЛАВА 1

1.1. В плоскости α через точку O проведите прямую c_1, параллельную прямой a, и докажите, что c_1 совпадает с прямой c.

1.3. Выберите одну из диагоналей и докажите, что каждая из оставшихся диагоналей пересекает ее в середине.

1.4. Все утверждения доказываются из равенства треугольников. Они обобщаются для любой правильной n-угольной пирамиды.

1.5. Достаточно доказать, что этой плоскостью делится пополам линейный угол этого двугранного угла. Утверждение обобщается для любой правильной n-угольной пирамиды.

1.20. Для вычисления PQ используйте два раза теорему косинусов.

1.21. Нарисуете линейные углы этих двугранных углов и треугольники, в которых эти линейные углы являются углами треугольников. Обобщается на правильную n-угольную пирамиду.

1.23—1.24. Попробуйте дать ответ, ничего не рисуя. Попытайтесь увидеть такую плоскость, которая содержит одну из данных прямых и пересекает другую. Тогда эти прямые скрещиваются или пересекаются.

1.25. Под граничными значениями понимаются (здесь и далее) наибольшее и наименьшее значения. Попытайтесь увидеть такие положения точки K, при которых расстояние KC становится наибольшим или наименьшим. Для этого можно представить себе треугольник ABK, вращающийся вокруг AB. Оба гранчных значения для KC достигаются, когда точка K оказывается в плоскости ABC. При доказательстве используется теорема косинусов.

1.26. Необходимо рассмотреть два случая. В первом случае оценивается расстояние между известными ребрами. Во втором случае оценивается расстояние между ребром известным и ребром неизвестным. В каждом случае это расстояние выражается как функция от x, где x (длина неизвестного ребра. Полученная функция исследуется на наибольшее и наименьшее значения, при этом важно понимать, в каких границах лежит сама величина x.

1.27. В равнобедренном треугольнике ABX основание AB постоянно, поэтому при движении точки X, надо просле-

дить только за изменением его высоты, проведенной из X на AB.

1.28. Может.

1.29. а), б) Можно в любой. в) Можно в некоторой. г) Нет.

1.30. Рассмотрите отрезок KL как сторону треугольника KXL, где X (середина AB. Воспользуйтесь неравенством треугольника и свойством его средней линии.

1.31. Рассмотрите тетраэдр $ABCD$, считая все его ребра известными. Воспользуйтесь формулой для медианы треугольника, в котором известны все его стороны.

1.34. Достаточно измерить расстояние до самолета три раза через равные промежутки времени.

1.38. Используйте результат задачи 1.35а.

1.39. Рассмотрите правильную треугольную пирамиду, вершина которой находится в конце данной диагонали куба, а основание которой (треугольник с вершинами в рассматриваемых концах ребер. Затем используйте результат задачи 1.35а.

1.42. Произвольную точку внутри острого угла между плоскостями спроектируйте на каждую из данных плоскостей и на прямую их пересечения. Соедините проекцию на прямую с проекциями на плоскости. Используя теорему о трех перпендикулярах, получите нужный результат.

1.43. "Положите" треугольник BCX на плоскость BCA так, чтобы точки X и A оказались с одной стороны от BC. Задача становится планиметрической.

1.44. Проведите высоту пирамиды и используйте результат задачи 1.43.

1.45. Проведите плоскость, перпендикулярную данной прямой в данной точке. Докажите теперь, что все данные перпендикуляры лежат в этой плоскости.

1.46. Через точку на ребре двугранного угла проведите плоскость, перпендикулярную этому ребру. Она пересекает двугранный угол по линейному углу, а биссектор (по биссектрисе этого линейного угла. Задача становится планиметрической. Не забудьте, что в таких задачах доказываются два взаимно обратных утверждения.

1.47. Данная точка получается в результате пересечения трех разумно выбранных вами биссекторов двугранных углов данного многогранника.

1.68. Обозначьте все отрезки на рисунке. Задачу решает использование теоремы Пифагора и теоремы косинусов.

1.69. В более трудной задаче г) введите дополнительный параметр — ребро основания. Через величину бокового ребра и ребра основания можно выразить величину данного угла. Но

тогда решается и обратная задача — выразить ребро основания через боковое ребро и данный двугранный угол. А найти высоту пирамиды, зная ребро основания и боковое ребро — это задача пункта а).

1.70—1.72. Наиболее трудные из этих задач решаются с помощью введения дополнительного линейного параметра, как это было указано в задаче 1.69.

1.74. Не больше двух.

1.75. Сведите эту задачу к планиметрической.

1.76. Проведите высоту тетраэдра из точки P. Она будет высотой во всех треугольниках PXY, являющихся нужными нам сечениями тетраэдра. Поэтому осталось оценить границы для величины XY в треугольнике ABC. Задача стала планиметрической.

1.77. Решая задачу б), обратите внимание на случай, когда все плоские углы при вершине P — тупые.

1.78. Все такие прямые пересекаются в одной и той же точке. Результат обобщается на случай правильной n-угольной пирамиды, если данные точки — центры окружностей, описанных около ее граней.

1.79. Проведите плоскость через данную точку, перпендикулярную прямой пересечения любых двух данных плоскостей, и докажите, что все проведенные перпендикуляры лежат в этой плоскости.

1.80. Из любых трех.

1.81. Можно.

1.90. Достаточно трех равных и сравнительно (с шестом) длинных тросов.

1.91. Чтобы увеличить площадь куска колбасы.

1.92. Проведите плоскость через эти параллельные прямые и задача станет планиметрической.

1.93. Используйте транзитивность параллельности прямых в пространстве (если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$).

1.94. Поскольку требуется доказать равносильность двух утверждений, постольку надо доказывать два взаимно обратных предложения: 1) если плоскости параллельны, то и перпендикуляры к ним параллельны (или совпадают); 2) если перпендикуляры к двум плоскостям параллельны, то и плоскости параллельны.

1.95. Эти задачи быстро решаются, если через данную прямую удачно провести плоскость, после чего ситуация становится планиметрической.

1.97. Проведите через другую прямую пару плоскостей, соответственно параллельных данным плоскостям. Задача свелась к задаче 1.93.

1.98. Проведите доказательство методом от противного. Для получения противоречия используйте транзитивность параллельности прямых в пространстве.

1.100. Докажите методом от противного. Для получения противоречия используйте задачу 1.93.

1.101. Используйте понятие угла между скрещивающимися прямыми.

1.109. Длины этих отрезков вычисляются после того, как сами отрезки оказываются гипотенузами некоторых прямоугольных треугольников.

1.110. Все расстояния находятся после того, как правильно нарисованы соответствующие перпендикуляры.

1.111—1.112. Для нахождения угла необходимо, чтобы на рисунке появился угол как пара лучей с общей вершиной. В эту пару лучей обычно входит один из данных лучей, тогда другой луч пары сонаправлен с другим из данных лучей. Например, для решения задачи 1.111а проведем из вершины A луч, сонаправленный с лучом CC_1 — получим луч AA_1, после чего ответ ясен. Иногда пара лучей имеет вершину в хорошо выбранной точке. Например, в задаче 1.112д такой точкой является точка B_1.

1.114. В этой задаче прежде всего надо понять, что может быть несколько случаев расположения параллелограмма относительно плоскости. Проще всего, если он весь находится с одной стороны от плоскости. Задача решается благодаря такому соображению: если известны расстояния до плоскости двух концов некоторого отрезка, то легко найти расстояние до нее от середины этого отрезка. В нашей задаче таким отрезком является одна из диагоналей параллелограмма.

1.115. Попробуйте получить результат по аналогии с планиметрией, заменив в условии плоскость на прямую.

1.116. Сначала выполните аналогичную планиметрическую задачу.

1.117. В задачах а) и б) сначала решите задачу в той плоскости, где лежат эти прямые, а затем "выходите в пространство". В задаче в) идите по аналогии с планиметрией. В задаче г) проведите одну плоскость через данную прямую и найдите фигуру в этой плоскости, а затем рассмотрите все множество таких плоскостей.

1.118. а) Треугольник. б) Точка. в — г) Отрезок.

1.119. Полуплоскость.

1.120. Проведите через P прямую, параллельную AD, и рассмотрите треугольник, частью которого является сечение.

1.121. Ребро призмы и отрезок, соединяющий середины скрещивающихся диагоналей.

1.122. Спроектируйте на плоскость треугольника точки K и L. Сравните между собой радиусы описанной и вписанной окружностей для треугольника.

1.123. Прежде всего эти сечения имеет смысл построить. Они будут треугольниками.

1.124. Здесь могут быть логически разные случаи: в вершине A сходятся: 1) три острых угла ромбов; 2) два острых угла и один тупой; 3) один острый угол и два тупых; 4) три тупых угла. Все случаи можно свести к первому.

1.125. а), в) Нет. б) Да.

1.136. Посмотрите на их расположение.

1.137. Возможны разные ответы.

ГЛАВА 2

2.1. В задаче возможны 2 случая расположения сфер.

2.2. Выразите одну из величин через другую и радиус сферы. Проанализируйте полученные формулы.

2.3. а), б) Сведите к планиметрии. в) Окружность.

2.4. Докажите методом от противного.

2.5. Докажите методом от противного.

2.6. Рассмотрите 3 величины: радиус шара, радиус сечения и расстояние от центра шара до сечения. Установите связь между ними. Проанализируйте полученную формулу.

2.7. Через центр сферы, общую точку окружностей и их центры проведите плоскости. Докажите, что они совпадают.

2.14. Радиус сферы, проведенный в любую точку шестидесятой параллели, составляет с экваториальной плоскостью угол 60°.

2.15. а) Центр сферы проектируется в центр окружности, описанной около треугольника, вершинами которого являются данные точки. б) Центр сферы проектируется в центр окружности, вписанной в данный треугольник.

2.16. Спроектируйте данную конфигурацию на плоскость, проходящую через центр шара и перпендикулярную данной прямой. Задача свелась к планиметрической.

2.19. в) 14. г) 20.

2.24. Нарисуйте такое множество точек сначала на плоскости. Полученную фигуру повращайте вокруг данного отрезка.

2.27. Наибольшее значение угла достигается тогда, когда общая прямая касательных плоскостей перпендикулярна данной плоскости. Наименьшее значение угла достигается тогда, когда эта прямая параллельна данной плоскости.

2.28. а) Его центр лежит в плоскости, проведенной через центр данного шара перпендикулярно прямой пересечения данных плоскостей. Наибольшего такого шара нет. б) Посмотрите в угол комнаты.

2.29. Докажите, что для каждой точки первого сечения найдется симметричная (центрально, зеркально) точка во втором сечении. И наоборот((Хотя это и кажется странным).

2.30. а) Возможны два случая. б) Сведите задачу к планиметрической.

2.31. а), б) Можно. в) Нельзя.

2.32. а), б) Можно. в) Нельзя.

2.33. Возможны два случая.

2.50. Да.

2.51. Да.

2.54. Для каждого населенного пункта считаются известными его координаты на Земле.

2.55. Используйте равноудаленность точек биссекторной плоскости от граней двугранного угла.

2.56. Возьмите на этом луче точку, удаленную от вершины трехгранного угла на 1. Спроектируйте ее на все ребра трехгранного угла.

2.60. Используйте результат задачи 2.56.

2.61. Главный инструмент для работы здесь (теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла. При этом должно быть понятно, что трехгранный угол полностью определяется своими плоскими углами, а потому в нем можно найти все однозначно заданные элементы.

2.62. Так как данная точка равноудалена от двух граней трехгранного угла, то она лежит на биссекторе соответствующего двугранного угла. Далее можно использовать результаты задачи 2.61.

2.63. Из условия следует, что в этом трехгранном угле все плоские углы равны. Далее, раз точка равноудалена от всех граней, то она лежит на луче, образующем равные углы с ребрами трехгранного угла и выходящем из вершины данного угла. Для ответа на вопрос задачи потребуется ввести самим как данные некие линейные и угловые величины, например, расстояние от данной точки до вершины считать равным a, а двугранные углы трехгранного угла положить равными φ.

2.66. Отложите от его вершины O три равных отрезка OA, OB и OC и спроектируйте точку O на плоскость ABC.

2.67. а), б) Проведите через вершину трехгранного угла лучи, перпендикулярные плоскости каждой его грани. Рассмотрите углы между данной прямой и этими лучами и перейдите затем к углам между этой прямой и гранью трехгранного угла.

в) Используйте два раза теорему косинусов (или ее следствие) в двух трехгранных углах: данном и образованном двумя ребрами данного трехгранного угла и лучом данной прямой.

2.68. Задача сводится к сравнению двух углов, которые луч OX (O — вершина угла, X — взятая точка) составляет с ребрами и гранями трехгранного угла.

2.69. Нет.

2.70. Для начала у него есть пара равных двугранных углов.

2.71. Из задачи 2.70 следует, что у него равны все двугранные углы.

2.80. а) Рассмотрите осевое сечение цилиндра. б) Рассмотрите диаметральное сечение сферы.

2.81. Рассмотрите диаметральное сечение сферы.

2.82. Рассмотрите осевое сечение такого цилиндра.

2.89. Это сечение является прямоугольником.

2.90. Спроектируйте эту конфигурацию на плоскость основания цилиндра.

2.91. Рассмотрите сечение этой конфигурации плоскостью, проходящей через ось цилиндра.

2.96. а) Когда AB пересекает ось цилиндра. б) Дальше всего, когда параллелен оси.

2.97. Рассмотрите сечение этой конфигурации плоскостью, проходящей через ось цилиндра.

2.98. Сведите эту задачу к планиметрической.

2.99. Считайте цилиндр бесконечно длинным. Проведите плоскость через центр шара перпендикулярно оси цилиндра.

2.100. а) Рассмотрите множество общих точек прямой пересечения опорной плоскости с плоскостью основания цилиндра и основания цилиндра.

2.101. Рассмотрите плоскость, проходящую через основания обоих цилиндров, и прямую ее пересечения с опорной плоскостью. Сошлитесь на предыдущую задачу.

2.102. Выясните, какие возможны случаи взаимного расположения цилиндров. В каждом из них сведите задачу к планиметрической.

2.103. Поэкспериментируйте на карандашах или ручках.

2.109. Сначала установите, какое он займет положение внутри футляра.

2.110. Бочку катят так, что пол все время касается цилиндрической поверхности. Как перевести бочку в такое положение(

2.111. Сведите эту задачу к планиметрической.

2.112. Сведите эту задачу к планиметрической.

2.113. Найдите точку, равноудаленную от всех вершин.

2.114. Найдите точку, равноудаленную от оснований и боковых граней призмы.

2.115. Для доказательства равенства многоугольников достаточно доказать равенство их соответственных сторон и углов. Обратите внимание на то, что перпендикулярное сечение призмы не обязано принадлежать призме.

2.117. Задачу решает рассмотрение двух прямоугольных треугольников.

2.123. б) Боковое ребро параллельно противоположной грани. в) Расстояние от вершины до противоположного ребра основания, которому эта вершина не принадлежит, находится как высота в треугольнике, вершинами которого являются данная вершина призмы и две вершины другого основания призмы. г) Сводится к в).

2.124. Обратите внимание на то, какова проекция луча AA_1 на плоскость ABC. Используйте соотношения в трехгранном угле. Установите форму грани BB_1C_1C.

2.125. Определите положение центра этой сферы.

2.127. Везде ответ положительный.

2.129. а) Рассмотрите случаи треугольного и четырехугольного сечений. Не забудьте, что грани призмы являются ее сечениями. б) Кроме боковой грани, в которой лежит диагональ, ее сечениями являются треугольники. Основанием у всех этих треугольников является данная диагональ, поэтому на ребрах призмы надо искать точки наиболее (наименее) удаленные от прямой, на которой лежит данная диагональ. в) Имеется ввиду следующее. Если призма обозначена $ABCA_1B_1C_1$ и сечение проводится через вершину C, то оно идет параллельно A_1B_1. Есть одна тонкость, — в частности, одно из таких сечений проходит через A_1B_1.

2.130. Такие сечения могут проходить как через ребро длиной 2, так и через ребро длиной 1.

2.131. "Делают" призму так — от углов квадрата "отрезают" равные квадратные уголки, а затем сгибают оставшуюся часть листа, "скрепляя" между собой стороны уголков.

2.132. Обратите внимание на то, что отрезок, лежащий в грани, можно причислить к тем, которые ей параллельны. Сам этот отрезок можно построить, проведя через одну из переменных точек на диагонали, например AB_1, сечение, параллельное грани CBB_1C_1.

2.133. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед, AB_1D_1 и BDC_1 — два данных его сечения. Проведите плоскость AA_1C_1C и сведите задачу к планиметрической.

2.134. В задачах а) и в) используйте соотношение между ребрами прямоугольного параллелепипеда и его диагональю; в задачах б) и г) используйте зависимость между косинусами углов, которые диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с его ребрами (возможно и чисто "наглядное" решение).

2.147. Искомые пути ищите на развертках.

2.149. Рассмотрите осевое сечение конуса.

2.150. Рассмотрите осевое сечение конуса.

2.151. Рассмотрите сечение сферы, проходящее через ее центр — для описанного около сферы конуса; рассмотрите осевое сечение конуса — для вписанной сферы.

2.157. Проведя осевое сечение усеченного конуса, сведите задачу к планиметрической.

2.158. Проведя осевое сечение конуса, сведите задачу к планиметрической.

2.159. Примите образующую поверхности конуса равной 1. Пусть данные углы — α и β. Выразите через α и β элементы прямоугольного треугольника, один катет которого — высота конуса, а другой — высота из вершины конуса в проведенном сечении. А само сечение выберите таким, чтобы оно пересекало основание конуса по хорде, параллельной диаметру основания конуса, в выбранном осевом сечении.

2.160. Сведите задачу к планиметрической.

2.161. Так как сфера задана (радиусом), то однозначно характеризуют вписанный в нее конус его высота или образующая поверхности (но не радиус основания!). Далее сведите задачу к планиметрической.

2.164. Нет.

2.165. В конусе — нет, в усеченном конусе — да.

2.166. Рассмотрите всевозможные треугольные сечения конуса.

2.167. Рассмотрите конусы двух видов: те у кого в осевом сечении тупоугольный треугольник и прочие.

2.168. Сведите задачу к планиметрии.

2.169. Обратите внимание на то, что конус, о котором говорится в условии задачи, не фиксирован. Поэтому введите еще один параметр этого конуса, который может меняться. Затем сведите задачу к планиметрической.

2.170. Решение аналогично решению задачи 2.100.

2.171. Выберите осевое сечение и сечение, проходящее через две его образующие, такие, чтобы они пересекали основание конуса по параллельным отрезкам. Примите, что образующая конуса равна 1. Выразите через α и β плоские углы трехгранного угла, вершина которого находится в точке пересечения плоскостей основания конуса и двух проведенных опорных плоскостей. Используйте соотношения в трехгранном угле.

2.172. Центры таких шаров лежат в одной плоскости. Рассмотрите сечение данной конфигурации этой плоскостью.

2.173. Три конуса, лежащие на плоскости так, как сказано в условии, образуют "жесткую" конструкцию. Иначе говоря, можно однозначно найти угол в осевом сечении каждого из них. Но тогда однозначно фиксируется углубление между ними. Остается выяснить, войдет ли в него конус с тем же осевым сечением и той же образующей (или высотой, или радиусом основания), что и данные.

2.185. Сведите задачу к планиметрии.

2.186. а) Коническая поверхность. б) Надо понять, что такое "1 оборот конуса". Затем сведите к планиметрии.

2.188. Рассмотрите тетраэдр, одна вершина которого находится в вершине данной пирамиды, другая вершина является центром основания данной правильной пирамиды, а еще две — являются соседними вершинами основания данной правильной пирамиды. Только в задаче е) может понадобиться еще один такой же тетраэдр, соседний с первым.

2.189. В задачах а) и в) центр искомой сферы лежит на высоте пирамиды или ее продолжении. Осталось узнать — где именно. В задаче б) рассмотрите биссекторы трех двугранных углов данного тетраэдра.

2.195. Рассмотрите тетраэдр, о котором уже говорилось в задаче 2.188. Учтите, что мы считаем число n известным, а потому известен угол в основании этого тетраэдра, вершина которого находится в центре основания данной правильной пирами-

ды. В задаче б) можно использовать результаты, полученные для сферы, описанной около конуса. В задаче ж) можно использовать теорему косинусов для трехгранного угла. В задаче з) искомый угол можно найти как угол между перпендикулярами к этим граням, проведенным из центра основания данной правильной пирамиды.

2.196. Рассмотрите данную усеченную пирамиду как часть полной пирамиды. Затем перейдите к рассмотрению тетраэдра, о котором говорилось в задаче 2.188. Используйте подобие.

2.197. а), г) Используйте подобие. в) Такое сечение не обязательно будет треугольником.

2.198. д) Плоскость такого сечения может пересекать пирамиду только по ребру.

2.199. а), в) Установите положение проекции PA на плоскость ABC. б) Воспользуйтесь известной формулой для угла между прямыми, одна из которых лежит на плоскости, а другая ее пересекает. г), д) Воспользуйтесь теоремой косинусов для трехгранного угла.

2.200. а) То же, что в задаче 2.199, б). б)Рассмотрите трехгранный угол с вершиной P и ребрами PD, PA, PC. в) Найдите угол между AD и перпендикуляром к плоскости DPC, проведенным к ней из вершины B. г), д) Найдите угол между перпендикулярами к этим плоскостям, проведенными из точки B.

2.204. От 1 до 4.

2.205. Эти значения не достигаются.

2.206. Когда оно проходит еще через сторону основания пирамиды или через диагональ этого основания.

2.207. Наименьшее значение диагонали достигается в параллелепипеде, основанием которого является квадрат.

2.208. Возможны два вида сечений (треугольное и четырехугольное.

2.209. Проведите 2 таких отрезка. Найдите треугольник, в котором они лежат. Затем найдите отношение, в котором два проведенных отрезка делят друг друга. Далее, рассмотрите другие пары отрезков, причем в качестве первого отрезка пары возьмите один и тот же отрезок (тот, который был в первой паре проведенных отрезков.

2.210. Да.

2.211. Возможны разные формы сечения: четырехугольник, треугольник или ребро основания.

2.256. а) Да. б) Не обязательно.

ГЛАВА 3

3.7. Для фигур вращения достаточно рассмотреть плоские фигуры, от вращения которых получаются данные неплоские фигуры, и, тем самым, свести задачу к планиметрии.

3.8. а) Сфера. б) Шар без сферы.

3.9. а) Да. б) 3.

3.10. а) Не всегда. б) Не всегда. в) Нет.

3.11. а) Да. б) Да. в) Нет.

3.12. а), б), в) Да.

3.13. Нет.

3.14. а) Если не точка. б), г), д), е) Не всегда. в) Да.

3.15. Сначала докажите, что она содержит сторону BC треугольника ABC (A, B, C — данные точки). Затем возьмите любую точку X треугольника и проведите отрезок, одним концом которого является A, другой конец лежит на BC и проходит через X.

3.16. Проведите сечение сферы через эти три точки.

3.17. а) Внутренней. б) Данных для однозначного ответа мало.

3.18. Рассмотрите сечение шара диаметральной плоскостью, проходящей через точку X.

3.21. Проведите сечение сферы плоскостью, проходящей через грань многогранника.

3.37. Возможны два вида сечений. Полезно увидеть этот многогранник как часть призмы.

3.38. Рассмотрите развертку этого тетраэдра.

3.40. а) Любое число частей.

3.41. б) Куб, к одной из граней которого пристроена четырехугольная пирамида, основание которой совпадает с гранью. Пирамида достаточно высокая.

3.42. Нет.

3.43. Тот же пример, что и в задаче 3.41, б).

3.44. б) Куб с фиксированной пирамидой, построенной как в задаче 3.41, б). в) "Отрежьте" от куба подходящий уголок.

3.46. Рассмотрите всевозможные развертки.

3.47. Разберитесь, что происходит с любой правильной пирамидой, у которой "срезан" уголок от вершины основания.

3.48. В выпуклом многограннике каждое ребро принадлежит двум и только двум граням.

3.49. Нет.

3.50—3.51. Да.

3.52. Для правильного тетраэдра и гексаэдра (куба) такой точкой является центр описанной сферы. Для октаэдра и икосаэдра существование такой точки доказывается легче, если рассмотреть их вершины на поверхности куба. Для додекаэдра вопрос решается из соображений двойственности.

3.56. а) Используйте тот факт, что $AB \parallel PDC$. б), в) Используйте параллельность плоскостей ABP и CDQ. г) Используйте параллельность этих плоскостей.

3.59. При каждом положении точки N отрезок NP будет наибольшим, когда P совпадает с A (или C). Отрезок MN будет наибольшим, когда N совпадает с B.

3.60. Докажите, что эти 4 точки K, L, M, N лежат в одной плоскости. Установите вид четырехугольника $KLNM$.

3.61. Ищите такую точку на высоте правильного тетраэдра.

3.75. Сведите задачу к планиметрической.

ГЛАВА 4

4.4. Сначала найдите объем вылившейся воды.

4.6. Смените основание куба.

4.9.—4.10. Рассмотрите сечение данной конфигурации плоскостью, проходящей через ось цилиндра.

4.11. Считайте, что размеры куска картона известны.

4.12. Рассмотрите сечение данной конфигурации плоскостью, проходящей через диаметр полушара и две вершины основания призмы. Можно также достроить данную конфигурацию до призмы, вписанной в шар.

4.13. Углы диагонали с гранями можно заменить углами диагонали с ребрами, перпендикулярными этим граням.

4.14. а), б). Кроме обычного решения, когда переменными считаются ребра призмы, попробуйте решить задачу, когда переменными считаются углы, которые диагональ образует с ребрами.

4.15. Эта призма должна быть вписанной.

4.16. а), б). Возможны различные случаи.

4.17. То же, что и в задаче 4.16.

4.18. Не поленитесь потратить время на хороший рисунок.

4.19. а) Нет. б) Да.

4.35. Докажите, что $\dfrac{S_\perp}{S} = \dfrac{H}{L}$, где S — площадь основания призмы, H — ее высота.

4.40. а) Вспомните, куда в таком случае проектируется ребро AA_1, и затем воспользуйтесь соотношениями в трехгранном угле.

4.41. б) Найдите ту вершину параллелепипеда, в которой сходятся только острые углы ромбов.

4.44. Сделайте хороший планиметрический рисунок фигуры, которая вращается, и установите, какая получается пространственная фигура при вращении каждой стороны нарисованного плоскостью многоугольника.

4.45. д) Используя соотношения в трехгранном угле, найдите угол в боковой грани, прилежащей к ребру основания пирамиды.

4.46. г) Вершина пирамиды проектируется в центр квадрата.

4.47. Можно воспользоваться теоремой о параллельном сечении пирамиды и связать ее с отношением объемов подобных пирамид.

4.48. е) Разбейте тетраэдр на два тетраэдра, проведя сечение через BC, перпендикулярное PA.

4.49. а) Вершина тетраэдра проектируется в центр окружности, описанной около основания. б) Рассмотрите тетраэдр как часть параллелепипеда, заданного этими ребрами и этими углами.

4.50. Установите, куда проектируется вершина пирамиды.

4.53. в) 1:3. г) 1:1. д) Найдите, в каком отношении сечение делит ребро PC.

4.57. а) Отношение радиуса к высоте равно $\sqrt{2}$.

4.58. а) Такого нет.

4.60. а) Конуса с наименьшим объемом нет. б), в) Конуса с наибольшим объемом нет.

4.61. Рассмотрите сечение пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро и высоту пирамиды.

4.62. Задача сводится к планиметрической, ибо высота у конуса и тетраэдра одна и та же.

4.64. Проверьте, в каждую ли из этих пирамид можно вписать шар. Если да, то ищите его радиус по формуле $R = \frac{3V}{S}$ (R — радиус шара, V и S — объем и площадь поверхности пирамиды). Если нет, то ищите наибольший шар среди шаров, касающихся основания и двух противоположных граней.

4.65. Окружность верхнего основания цилиндра касается каждой боковой грани в точке, лежащей на апофеме пирамиды. Рассмотрите сечение данной конфигурации плоскостью, проходящей через апофемы противоположных граней.

4.66. Рассмотрите осевое сечение конуса.

4.67. а) Параллелепипед необходим прямоугольный. б), в) Высоты этих пирамид лежат на диаметре шара. Рассмотрите сечение, проходящее через высоту и боковое ребро. г) Ось призмы лежит на диаметре шара. д), е) Оси этих тел лежат на диаметре шара. Рассмотрите осевые сечения.

4.68. Этот многогранник является тетраэдром.

4.69. Объем каждого из них составляет 0,25 объема всего тетраэдра.

4.70. Разбейте многогранник на пирамиды с вершиной во взятой точке, основаниями которых являются грани многогранника. Дальше работайте с объемами.

4.71. Примите за основание пирамиды ту грань, которая содержит угол β. Далее используйте соотношения в трехгранном угле. Учтите, что угол α может быть трех разных видов.

4.72. Многоугольники, полученные на гранях, могут быть разного вида.

4.73. а) Проведите плоскость через AB, перпендикулярную CD.

4.118. Рассмотрите ее как разность площадей боковых поверхностей двух конусов.

4.123. Используйте формулу для вычисления площади боковой поверхности, в которой есть периметр перпендикулярного сечения.

4.124. Попытайтесь использовать в подходящем случае формулу $S_б = \dfrac{S_o}{\cos\varphi}$, где $S_б$ — площадь боковой поверхности, S_o — площадь основания, φ — угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

4.131. Используйте (по возможности) формулу $R = \dfrac{3V}{S}$, где R — искомый радиус, V и S — объем и площадь поверхности многогранника, описанного около данного шара.

4.137. Поверхности с наибольшей площадью нет.

4.138. Наибольших нет.

4.139. а), в) Наибольшей нет. б), г) Наименьшего нет.

4.142. Наибольших нет.

4.144. Указание то же, что и к задаче 4.124.

4.145. Из площади сферы вычитаются площади четырех сферических сегментов.

4.146. Возможны два положения такого конуса.

ГЛАВА 5

5.1. а) $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; б) $x = q\dfrac{x_1 + x_2}{p+q}$; в) $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$. Для y и z выражения аналогичные.

5.6. Применить формулу для расстояния между точками.

5.7. Найти длины сторон ΔABC и воспользоваться теоремой косинусов.

5.8. а) Найти расстояние до точки $O(0;0;0)$. б), в), г) Спроектировать эти точки на координатные оси и плоскости и найти расстояние от них до этих проекций.

5.10. б), в) Воспользоваться результатами задачи 5.1.

5.13. Выясните, как расположен отрезок KL относительно плоскости ABC, и сведите задачу к планиметрической, спроектировав KL на эту плоскость.

5.14. а) Воспользуйтесь задачей 5.1а. б) Следует задать четыре вершины, не лежащие на одной грани. Рассмотрите различные случаи.

5.15. Сначала найти координаты вершины $C(a;b;0)$, решив систему уравнений $AC = AB$, $BC = AB$, а затем найти точку $D(x;y;z)$, решив систему $AD = AB$, $BD = AB$, $CD = AB$.

5.18. Рассуждайте по аналогии с решением задачи 5.3 (из задач с решениями). При $a = 2$ нет решений, при $a = \sqrt{6}$ — единственное, при $a = 3$ — бесконечное множество.

5.25. г) Найти координаты центра $M(a;b;c)$, решив систему уравнений $MA = MB = MC = MD$. д) Найдите сначала центр этой сферы, используя касание сферы и плоскости yz. е) Центры этих сфер имеют координаты $(\pm 1;\pm 1;\pm 1)$.

5.29. а)—д) Нарисуйте систему координат и данную сферу и вы увидите решение. е)—ж) Проведите плоскость $x = 2$ и сведите задачу к планиметрической.

5.30. б) Радиус сферы равен 1; в) Три сферы, радиусами 3, 4, 5. г) Спроектируйте центр на координатные оси. Сферы должны проходить через эти проекции.

5.32. а)—в) Центром сферы может быть любая точка, равноудаленная от заданных точек. В случаях а), б) эти точки обра-

зуют плоскость, в случае в) — прямую, в случае г) — такой сферы нет.

5.33. Введите координаты, выбрав за начало одну из вершин куба и направив оси по ребрам куба. Сделайте рисунок и ответьте на последний вопрос без вычислений.

5.34. Сделайте рисунок.

5.38. Сначала ищем точку B на прямой MN, используя условие, что $\angle ABM = \frac{\pi}{6}$, а затем ищем точку C на прямой MN, используя условие $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$.

5.39. Вычислить площадь основания призмы, найти ее высоту и отложить от точки $(1;0;1)$ вектор, перпендикулярный основанию призмы и равный по модулю ее высоте. Два решения.

5.51. Введите систему координат с началом в точке D и осями DA, DC, DD_1.

5.52. а) Нет. б) Нет. в) Да.

5.53. Шар с центром O и радиусом 2.

5.54. Аналогичную фигуру.

5.55. Вспомните неравенство треугольника.

5.58. а) $\vec{AX} = x\vec{AB}$, $x \in R$. б) $\vec{AX} = x\vec{AB}$, $x \in [0;1]$;

в) $\vec{AX} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, $x \in R$, $y \in R$.

5.66. а) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \pm\frac{1}{2}\right)$; б, в) Найдите зависимость между углами, которые образует вектор с координатными плоскостями и осями координат; г) $(cos\varphi_1, cos\varphi_2, cos\varphi_3)$.

5.72. Выразите радиус-векторы этих точек, идущие из точки D, через векторы $\vec{AD}$, $\vec{DC}$, $\vec{DD_1}$ и сравните эти выражения с разложением вектора $\vec{DB_1}$ по этим же векторам.

5.78. Введите координаты с началом A и осями AB, AC, AD.

5.84. Сделайте рисунок. г-д) Выразите векторы $\vec{BK}$ и $\vec{LM}$ через векторы $\vec{DA}$, $\vec{DB}$, $\vec{DC}$.

5.85. а—д) Непосредственно по определению. е, ж) Разложите векторы $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{B_1D}$ по тройке векторов, идущих по ребрам куба из его вершины.

5.86. Разложите векторы по тройке ребер куба, идущих из одной вершины.

5.87. Получите равенство $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, возведите его в скалярный квадрат и воспользуйтесь результатами задачи 5.9 из задач с решениями.

5.88. Разложите вектор диагонали по векторам ребер и возведите в скалярный квадрат.

5.89. Выразите векторы этих отрезков через векторы ребер куба и возведите в скалярный квадрат.

5.90. Выразите вектор $\overrightarrow{XY}$ через $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ и примените скалярное умножение.

5.91. Решите систему $6-\beta+\alpha=0$, $\beta^2=4$.

5.104. В уравнении $2x+y-3z=0$ две из переменных положить равными нулю и найти третью координату.

5.105. Если векторы нормалей этих плоскостей неколлинеарны, то плоскости пересекаются.

5.106—5.107. Определить вектор нормали и воспользоваться результатами п.24.2.

5.108. Угол между плоскостями равен углу между их нормалями.

5.109. Полупространство.

5.111. Отдельно рассмотрите случаи, когда равен нулю свободный член уравнения и когда обращается в нуль один из коэффициентов при переменных x, y, z.

5.112. а) Не могут. б) Могут в тех случаях, когда эта плоскость координатная.

5.113. $-y+z=1$ в плоскости yz, $x-y=1$ в плоскости xy, $x+z=1$ в плоскости xz.

ГЛАВА 6

6.6. Пусть P — исходный многогранник, Q — его образ, F — их пересечение, G — их объединение. Следует найти объем того из многогранников F и G, который находится проще, а объем второго из них находится из соотношения:

$$V(F)+V(G)=2V(P).$$

6.7. Вычисляются объемы и площади поверхности следующих тел: а) цилиндра, б) тела, состоящего из двух конусов и цилиндра между ними; в) двух конусов; г) усеченного конуса, из которого удален усеченный конус.

6.8. Может.

6.11. Сведите задачу к планиметрической.

6.12. Попробуйте построить опровергающие примеры.

6.14. Катет, вокруг которого вращается треугольник, равен $\frac{d}{\sqrt{3}}$.

6.15. Если основание равно $\frac{1}{4}P$.

6.16. Да, можно.

6.18. а) Да. б) Да. в) Да. г) Нет. д) Нет. е) Нет. ж) Да. з) Да. и) Да. к) Нет. л) Нет. м) Нет. н) Нет.

6.19. Могут совпадать все четыре, например, у куба.

6.37. Сделайте хороший чертеж и попробуйте в каждом случае перенос, который сблизит рассматриваемые объекты. Но можно применить и векторы.

6.38. Постройте сечение, проходящее через точку K, а затем осуществите его перенос на вектор $\vec{KA}$. И сразу увидите, что площадь сечения равна $\frac{3}{4}S$.

6.39. $2\arcsin\frac{1}{3}$.

6.40. Осуществите перенос одного конуса на вектор, идущий из центра его основания в центр основания другого конуса, и вы увидите, что не всегда найдутся такие сечения.

6.41. В первом случае не верно, а во втором — верно.

6.42. а) Всегда. б) Если соответствующей симметрией обладают пары их оснований. в) Если соответствующей симметрией обладают их основание и вершины.

6.43. Любыми, если ось поворота проходит через центр шара.

6.44. Соответствующая осевая симметрия в пространстве и будет таким поворотом.

6.45. Постройте опровергающий пример.

6.46. В отношении $\varphi : (2\pi - \varphi)$.

6.50. Произведите поворот в пространстве вокруг биссектрисы на 180°.

6.51. Да, можно.

6.52. Будет.

6.53. Будет. Обратное неверно.

6.54. Не всегда.

6.55. Поищите опровергающий пример.

6.56. Вспомните о правильных пирамидах.

6.61. а) Да. б) Нет. в) Нет. г) Да. д) Да. е) Нет. ж) Нет.

6.62. а) Нет. б) Да. в) Да. г) Да. д) Нет. е) Да. ж) Нет.

6.63. Во всех случаях поворотом и зеркальным поворотом, который может оказаться зеркальной или центральной симметриями.

6.64. а) Поворотом, переносом, центральной симметрией. б), ж) Винтом и зеркальным поворотом. в), е), и) Поворотом и зеркальной симметрией. г) Осевой симметрией и зеркальным поворотом. д) Осевой и зеркальной симметриями. з) Поворотом и зеркальным поворотом. к) Поворотом и зеркальной симметрией. При симметриях обе фигуры переходят друг в друга.

6.65. Для всех случаев имеются поворот и зеркальный поворот, совмещающие фигуры. Поворот иногда сводится к осевой симметрии (п.б.), а зеркальный поворот — к зеркальной симметрии (п.п.а,в,г,е). Симметрии совмещают друг с другом обе фигуры.

6.67. а) Если $PA \neq BC$, то двумя зеркальными симметриями и осевой симметрией, которая является их композицией. б) К движениям, указанным в п. а), добавляется зеркальный поворот, самосовмещающий квадратное сечение тетраэдра $PABC$. в) Такой тетраэдр был рассмотрен при решении задачи 6.14 из задач с решениями (рис.Р3.101). Он имеет три оси симметрии.

6.68. Если шары не равны, то поворотами вокруг линии центров и зеркальными симметриями. Если шары равны, то добавляется еще центральная симметрия.

6.69. Выясните, каким четырехугольником является основание пирамиды.

6.70. См. п. 12.3.

6.74. $\frac{1}{8}$.

6.76. См. п. 26.5.

6.77. См. п. 26.4.

6.78. а, б) Возможны все случаи взаимного расположения прямых. в) Совпадают, параллельны или пересекаются.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ФОРМУЛЫ ПЛАНИМЕТРИИ

I. Треугольник.

Элементы треугольника ABC: стороны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, углы A, B, C, высоты h_a, h_b, h_c (рис.1).

Признаки равенства: первый признак — по двум сторонам и углу, заключенному между ними (рис.2); второй признак — по стороне и прилежащим к ней углам (рис.3); третий признак — по трем сторонам (рис.4).

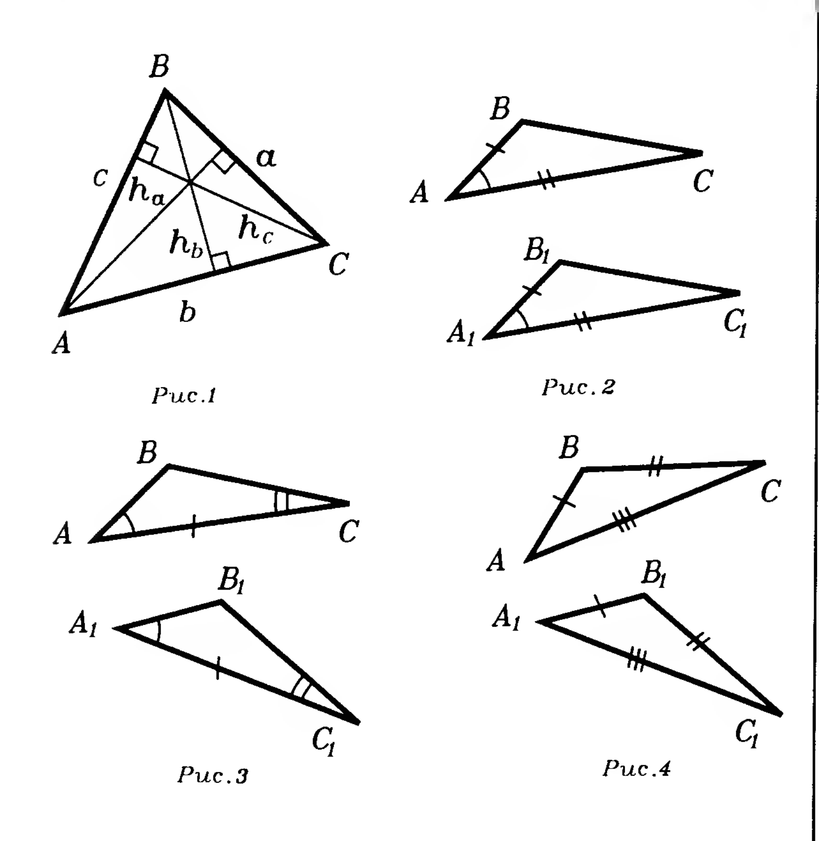


Рис.1

Рис.2

Рис.3

Рис.4

Сумма углов: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (рис.5).

Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2} a h_a$ (рис.6).

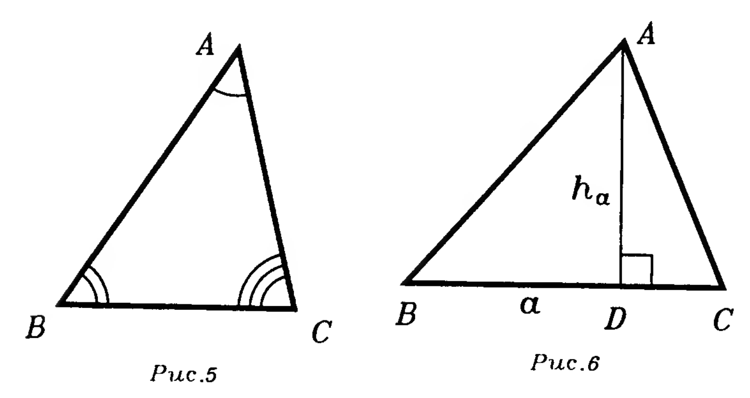


Рис.5

Рис.6

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Замечательные точки треугольника: 1) точка пересечения серединных перпендикуляров сторон — центр описанной окружности (рис.7);

2) точка пересечения биссектрис — центр вписанной окружности (рис.8);

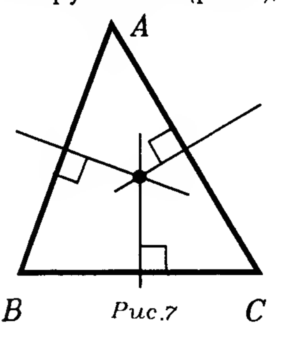


Рис.7

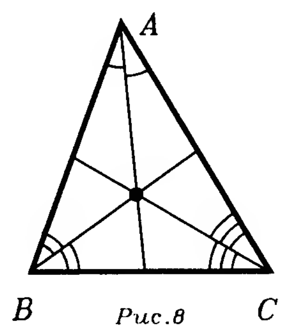


Рис.8

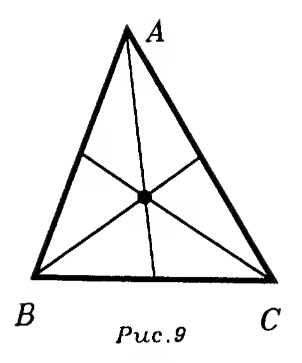


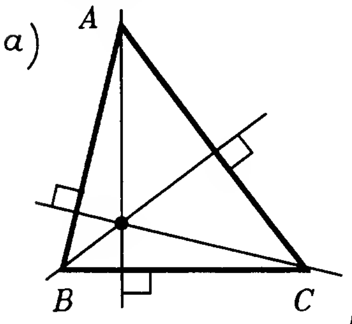
Рис.9

3) точка пересечения медиан — центр масс треугольника (рис.9);

4) точка пересечения высот треугольника (рис.10*а*) или их продолжений (рис.10*б*).

II. **Равнобедренный треугольник.**

Следующие свойства являются характерными свойствами равнобедренного треугольника: 1) в равнобедренном треугольнике углы при основании равны (рис.11); 2) медиана равнобедренного треугольника, проведенная из его вершины, является биссектрисой и высотой (рис.12).



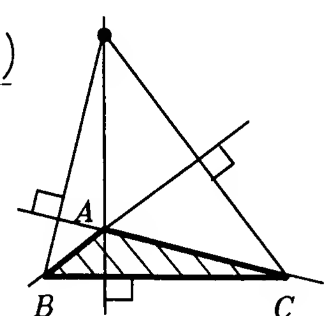


Рис.10

III. **Прямоугольный треугольник.**

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$ (рис.13);

$$sinA = cosB = \frac{a}{c}; \; sinB = cosA = \frac{b}{c}.$$

IV. **Подобие треугольников.**

Признаки подобия. 1) по равенству двух углов (рис.14); 2) по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними; 3) по пропорциональности сторон.

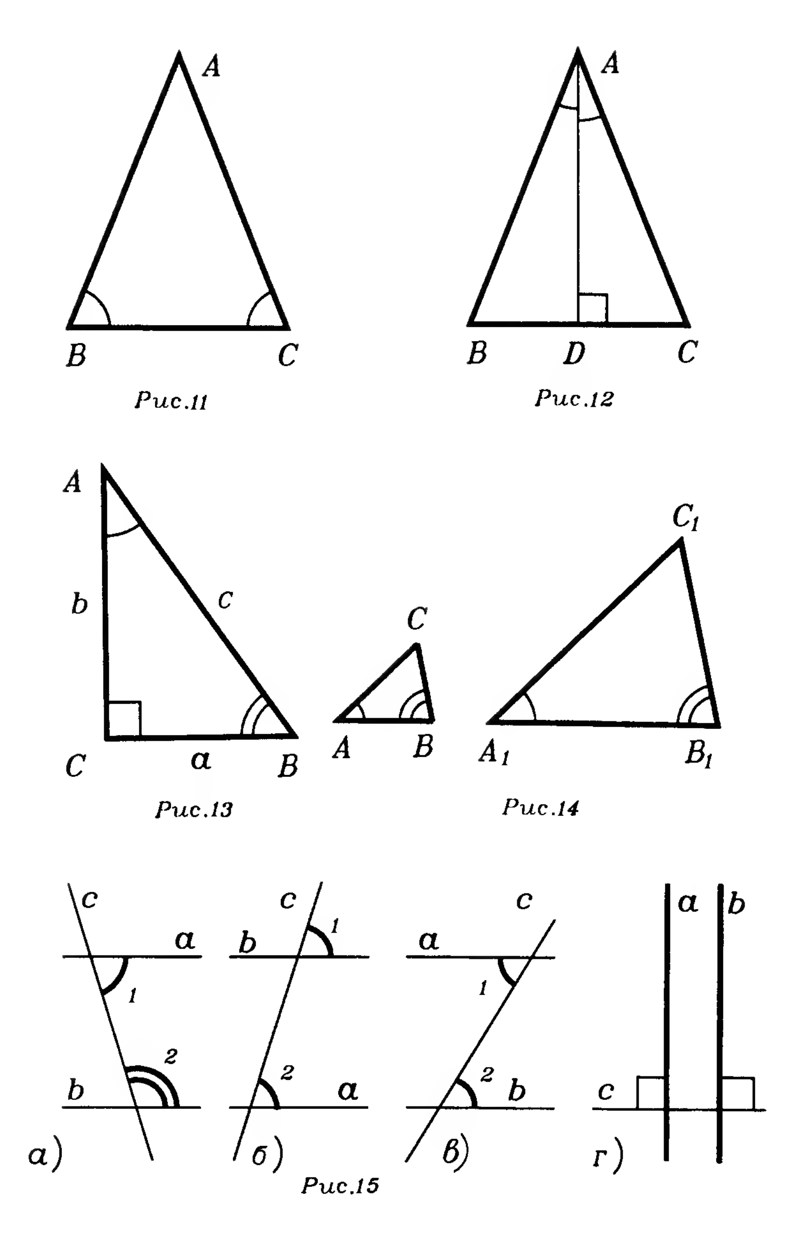


Рис.11

Рис.12

Рис.13

Рис.14

а) б) в) г)

Рис.15

V. **Параллельность.**

Признаки параллельности: 1) сумма внутренних односторонних углов равна 180° (рис.15*а*); 2) соответственные углы равны (рис.15*б*); 3) внутренние накрест лежащие углы равны (рис.15*в*); 4) два перпендикуляра к одной прямой на плоскости параллельны (рис.15*г*).

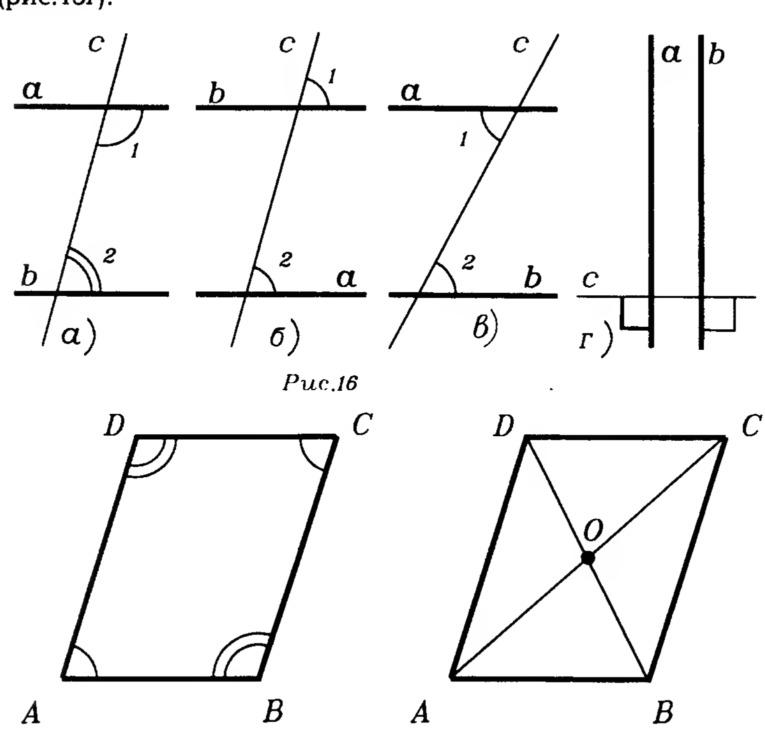


Рис.16

Рис.17

Рис.18

Свойства параллельности: эти предложения являются обратными к признакам параллельности (рис.16).

Свойства параллелограмма: 1) противоположные стороны и углы параллелограмма равны (рис.17); 2) диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам (рис.18).

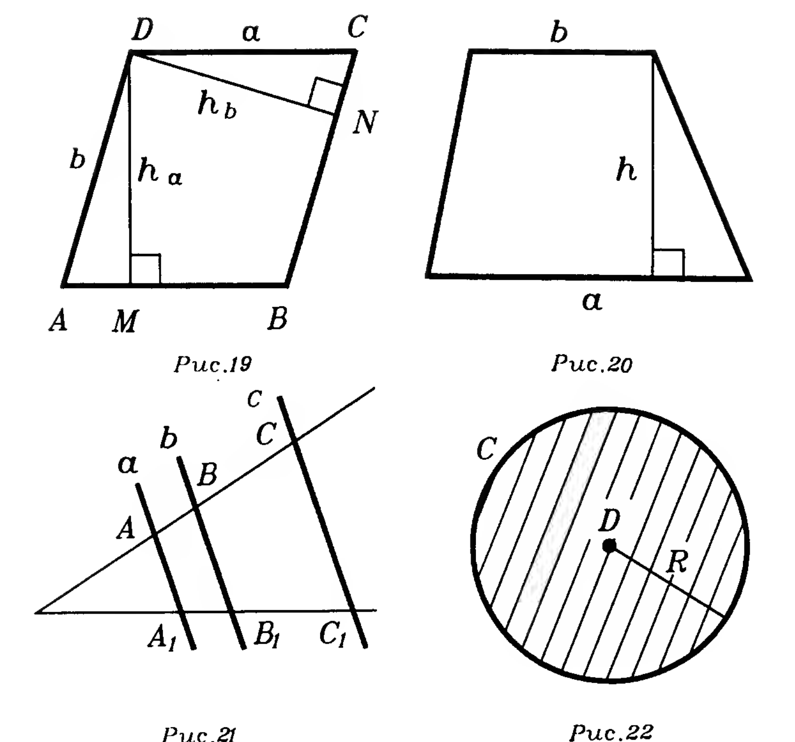


Рис.19 Рис.20

Рис.21 Рис.22

Площадь параллелограмма и трапеции: $S = ah_a = bh_b$ (рис.19) и $S = \frac{a+b}{2}h$ (рис.20).

Теорема Фалеса: параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки (рис.21).

VI. **Окружность и круг.**

Длина L окружности радиуса R вычисляется по формуле: $L = 2\pi R$, а площадь S круга радиуса R — по формуле: $S = \pi R^2$ (рис.22).

Предметный указатель

В предметном указателе указан пункт, где вводится соответствующее понятие.

Список использованной литературы

а) Школьные учебники

[1]. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.
Геометрия. 7-9. "Просвещение", М., 1995
[2]. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.
Геометрия. 8-9. (Для школ и классов с углубленным изучением математики). "Просвещение", М., 1995
[3]. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.
Геометрия 10-11. (Для школ и классов с углубленным изучением математики). "Просвещение", М., 1995
[4]. Погорелов А. В.
Геометрия. 7-11. "Просвещение", М., 1995

б) Учебники для высшей школы

[5]. Александров А. Д.
Основания геометрии. "Наука", М., 1987
[6]. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю.
Геометрия. "Наука", М., 1990

в) Журнальные статьи А.Д. Александрова

[7]. **О геометрии.** "Математика в школе", 1980, №3
[8]. **Что такое многогранник?** "Математика в школе", 1981, №1 и №2
[9]. **Так что же такое вектор?** "Математика в школе", 1984, №5
[10]. **Тупость и гений.** "Квант", 1982, №11 и №12.
[11]. **О геометии Лобачевского.** "Математика в школе", 1993, №2 и №3

Статьи [7] и [10] опубликованы также в сборнике статей А.Д. Александрова **"Проблемы науки и позиция ученого"**, "Наука", Л., 1988

Издательство «Alfa» выражает благодарность Каргиной В. Г. — преподавателю школы № 3 Висагинаса — за ценные рекомендации, которые были использованы при обработке материала книги и подготовке оригинал-макета.

Учебное издание

Александров Александр Данилович
Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Оригинал-макет изготовлен издательством «Alfa»
(г. Висагинас, Литва)

Главный редактор *В. Жабцев*
Корректоры *М. Жабцева, А. Шафранова*
Компьютерный набор выполнил *А. Хомчик*

Подписано в печать с готовых диапозитивов 15.12.97. Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 36. Тираж 15 000 экз. Заказ 13.

Издательство «Alfa». Лицензия № 835. Литовская Республика, 4671, г. Висагинас, ул. Тайкос, 44-8.

При участии ООО «Харвест». Лицензия ЛВ № 32 от 27.08.97. 220013, Минск, ул. Я. Коласа, 35-305.

Ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат ППП им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23.

Качество печати соответствует качеству предоставленных издательством диапозитивов.